# المتميز

# فى

# الرياضيات البحتة

# التفاضل و التكامل

الجزء النظرى

و

حلول التمارين

الوحدة الأولى

| لوه \| س \| | نهـــــا س ← ∞ | ءص / ءس | ∫ |
|---|---|---|---|

## إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

# الوحدة الأولى .... الاشتقاق و تطبيقاته

## ١ – ١ اشتقاق الدوال المثلثية

تذكر ما يلى :

[١] معدل تغير الدالة د عند النقطة ( أ ، د ( أ ) ) =

$$\lim_{و \to ٠} \frac{د ( أ + و ) - د ( أ )}{و}$$ بشرط أن تكون النهاية موجودة

= د$'$ ( أ ) " مشتقة الدالة د عند نفس النقطة "

= ميل المماس لمنحنى الدالة د عند نفس النقطة

= ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة د عند نفس النقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

[٢] قواعد الاشتقاق :

(١) إذا كانت : د ( س ) = أ حيث : أ ∈ ح

فإن : د$'$ ( س ) = صفر

(٢) إذا كانت : ص = س$^{ن}$ حيث : ن ∈ ح

فإن : ص$'$ = ن س$^{ن - ١}$

ملاحظات :

١) إذا كانت : ص = س فإن : ص$'$ = ١

٢) إذا كانت : ص = أ س$^{ن}$ حيث : ن ، أ ∈ ح

فإن : ص$'$ = أ ن س$^{ن - ١}$

٣) إذا كانت : ص = $\sqrt{س}$ فإن : ص$'$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

(٣) إذا كانت : د ( س ) = ع ( س ) ± ى ( س )

فإن : د$'$ ( س ) = ع$'$ ( س ) ± ى$'$ ( س )

(٤) إذا كانت : د ( س ) = ع ( س ) · ى ( س ) فإن :

د$'$ ( س ) = ع ( س ) · ى$'$ ( س ) + ى ( س ) · ع$'$ ( س )

(٥) إذا كانت : د ( س ) = $\frac{ع ( س )}{ى ( س )}$ فإن :

$$د' ( س ) = \frac{ى ( س ) ع' ( س ) - ع ( س ) ى' ( س )}{[ ى ( س ) ]^{٢}}$$

حيث : ى ( س ) ≠ صفر

(٦) قاعدة السلسلة :

إذا كانت : ص = د (ع ) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع

، ع = ر ( س ) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = ( د ○ ر ) ( س ) = د [ ر ( س ) ]

تكون : قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

و يكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ أى أن :

$$\frac{ء}{ءس} \left( د [ ر ( س ) ] \right) = د' [ ر ( س ) ] \times ر' ( س )$$

(٧) إذا كانت : ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{ء}{ءس} ( ص^{ن} ) = ن ص^{ن - ١} \times \frac{ءص}{ءس}$

أحمد الشتوى

(٨) إذا كانت : ص = $[$ د ( س ) $]^{ن}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ن $[$ د ( س ) $]^{ن - ١}$ × د$'$( س )

(٩) إذا كانت : ص = $\sqrt{د(س)}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د'(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$

**(١٠) اشتقاق الدوال المثلثية الأساسية :**

١) إذا كانت : د ( س ) = حا س

فإن : د$'$( س ) = حتا س

٢) إذا كانت : د ( س ) = حتا س

فإن : د$'$( س ) = − حا س

٣) إذا كانت : د ( س ) = طا س

فإن : د$'$( س ) = قا$^{٢}$ س

**و بصفة عامة :**

[١ إذا كانت : ع = د ( س ) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

١) و كانت : ص = حا ع فإن : ص$'$ = حتا ع × ع$'$

٢) و كانت : ص = حتا ع فإن : ص$'$ = − حا ع × ع$'$

٣) و كانت : ص = طا ع فإن : ص$'$ = قا$^{٢}$ ع × ع$'$

[٢ (١) إذا كانت : ص = حا$^{ن}$ د ( س )

فإن : ص$'$ = ن حا$^{ن - ١}$ د ( س ) × حتا س × د$'$( س )

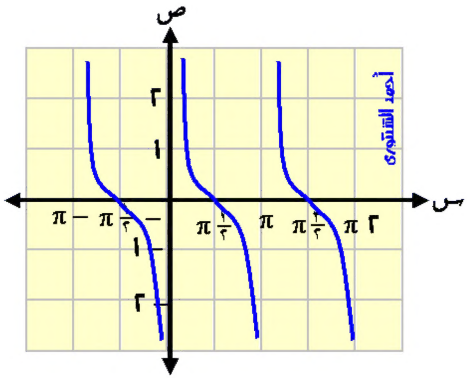
(٢) إذا كانت : ص = حتا$^{ن}$ د ( س )

فإن : ص$'$ = − ن حتا$^{ن - ١}$ د ( س ) × حا د ( س ) × د$'$( س )

(٣) إذا كانت : ص = طا$^{ن}$ د ( س )

فإن : ص$'$ = ن طا$^{ن - ١}$ د ( س ) × قا$^{٢}$ د ( س ) × د$'$( س )

## اشتقاق مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية




(١) إذا كانت : ص = ظتا س

حيث : س ∈ ح ،

س ≠ ن $\pi$ ، ن ∈ ص

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − قتا$^{٢}$ س

**البرهان :**

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{حتا\ س}{حا\ س}\right)$

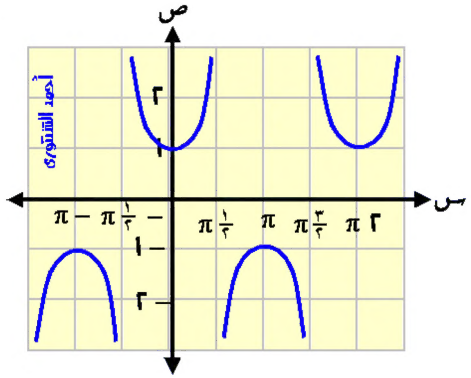
$= \frac{حا\ س \times (-\ حا\ س) - حتا\ س \times حتا\ س}{(حا\ س)^{٢}}$

$= \frac{-١}{(حا\ س)^{٢}} = -$ قتا$^{٢}$ س

(٢) إذا كانت : ص = قا س

حيث : س ∈ ح ، س ≠ $\frac{1}{2}$ ( ٢ ن + ١ ) π ، ن ∈ ص فإن :

$\frac{دص}{دس}$ = قا س طا س




البرهان :

$\frac{دص}{دس} = \frac{د}{دس} \left( \frac{١}{حتا\ س} \right)$

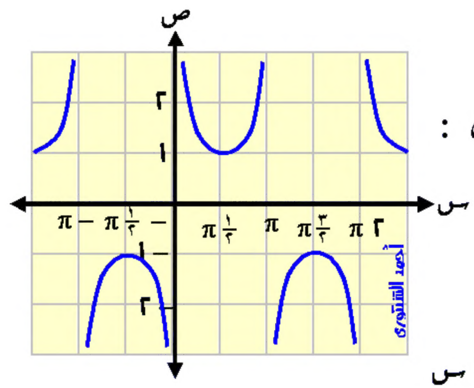
$= \frac{حتا\ س \times صفر - ١ \times (-\ حا\ س)}{(حتا\ س)^٢}$

$= \frac{حا\ س}{(حتا\ س)^٢} = \frac{١}{حتا\ س} \times \frac{حا\ س}{حتا\ س}$ = قا س طا س

(٣) إذا كانت : ص = قتا س

حيث : س ∈ ح ، س ≠ ن π ، ن ∈ ص فإن :

$\frac{دص}{دس}$ = − قتا س طتا س




البرهان :

$\frac{دص}{دس} = \frac{د}{دس} \left( \frac{١}{حتا\ س} \right)$

$= \frac{حا\ س \times صفر - ١ \times حتا\ س}{(حا\ س)^٢}$

$= \frac{-\ حتا\ س}{(حا\ س)^٢} = \frac{-١}{حا\ س} \times \frac{حتا\ س}{حا\ س}$ = − قتا س طتا س

و بصفة عامة :

[١ إذا كانت : ع = د ( س ) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

١) و كانت : ص = طتا ع فإن : ص' = − قتا$^٢$ ع × ع'

٢) و كانت : ص = قا ع فإن : ص' = − قا ع طا ع × ع'

٣) و كانت : ص = قتا ع فإن : ص' = − قتا ع طتا ع × ع'

[٢ (١) إذا كانت : ص = طتا$^ن$ د (س)

فإن : ص' = − ن طتا$^{ن-١}$ د (س) قتا$^٢$ س د' (س)

(٢) إذا كانت : ص = قا$^ن$ د (س)

فإن : ص' = ن قا$^{ن-١}$ د (س) قا د (س) طا د (س) د' (س)

= ن قا$^ن$ د (س) طا د (س) د' (س)

(٣) إذا كانت : ص = قتا$^ن$ د ( س )

فإن : ص' = − ن قتا$^{ن-١}$ د (س) قتا د (س) طتا د (س) د' (س)

= − ن قتا$^ن$ د (س) طتا د (س) د' (س)

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٦

أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كانت ص تساوى :

(أ) ٢ حا س − ٣ قتا س　　(ب) حتا س + ٤ قا س

(حـ) قا س طا س　　(ء) قتا س طتا س

(هـ) $\frac{قا\ س}{١ + قا\ س}$　　(و) $\frac{١ - قتا\ س}{١ + قتا\ س}$

أحمد الشتورى

**الحل**

(أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ حتا س + ٣ قتا س طتا س

(ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − حا س + ٤ قا س طا س

(جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا س × قا$^{2}$ س + طا س × قا س طا س

= قا س ( قا$^{2}$ س + طا$^{2}$ س )

(ء) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قتا س × ( − قتا س طتا س ) + طتا س × ( − قتا س طتا س )

= − قتا س ( قتا$^{2}$ س + طتا$^{2}$ س )

(هـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{( ١ + قا س ) قا س طا س − قا س قا س طا س}}{\text{( ١ + قا س )}^{2}}$

= $\frac{\text{قا س طا س ( ١ + قا س − قا س )}}{\text{( ١ + قا س )}^{2}}$ = $\frac{\text{قا س طا س}}{\text{( ١ + قا س )}^{2}}$

(و) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{( ١ + قتا س ) قتا س طتا س − ( ١ − قتا س ) ( − قتا س طتا س )}}{\text{( ١ + قتا س )}^{2}}$

= $\frac{\text{قتا س طتا س ( ١ + قتا س + ١ − قتا س )}}{\text{( ١ + قتا س )}^{2}}$ = $\frac{\text{٢ قتا س طتا س}}{\text{( ١ + قتا س )}^{2}}$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٧

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت ص تساوى :

(أ) طتا ( س$^{2}$ + ٣ )  (ب) قا $\sqrt{\text{س − ٢}}$

(جـ) حا ( قتا ٣ س$^{2}$ )  (ء) ٣ قا ٢ س + ٢ قتا ٣ س

(هـ) − قتا$^{3}$ ( ٢ س + π )  (و) س$^{2}$ قا $\frac{1}{\text{س}}$

**الحل**

(أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا$^{2}$ ( س$^{2}$ + ٣ ) × ٢ س = − ٢ س قتا$^{2}$ ( س$^{2}$ + ٣ )

(ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا $\sqrt{\text{س − ٢}}$ طا $\sqrt{\text{س − ٢}}$ × $\frac{1}{\text{٢} \sqrt{\text{س − ٢}}}$

(جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = حتا ( قتا ٣ س$^{2}$ ) × ( − قتا ٣ س$^{2}$ طتا ٣ س$^{2}$ ) × ٦ س

= − ٦ س قتا ٣ س$^{2}$ طتا ٣ س$^{2}$ حتا ( قتا ٣ س$^{2}$ )

(ء) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٦ قا ٢ س طا ٢ س − ٦ قتا ٣ س طتا ٣ س

(هـ) ص = − قتا$^{3}$ ( ٢ س + π ) = − ( قتا ( ٢ س + π ) )$^{3}$

= − ( − قتا ٢ س )$^{3}$ = قتا$^{3}$ ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ قتا$^{2}$ ٢ س × − قتا ٢ س طتا ٢ س × ٢

= − ٦ قتا$^{3}$ ٢ س طتا ٢ س

(و) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س قا $\frac{1}{\text{س}}$ + س$^{2}$ قا $\frac{1}{\text{س}}$ طا $\frac{1}{\text{س}}$ × $\frac{-1}{\text{س}^{2}}$

= ٢ س قا $\frac{1}{\text{س}}$ − قا $\frac{1}{\text{س}}$ طا $\frac{1}{\text{س}}$

## حل تمارين ( ١ – ١ ) صفحة ٨ بالكتاب المدرسى

إذا كانت : د ، ر ، ن دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س أكمل ما يلى باستخدام القيم المعطاة فى الجدول المقابل

| س | ١ | ٢ |
|---|---|---|
| د ( س ) | – ١ | ٤ |
| ر ( س ) | ٢ | ١ |
| د/ ( س ) | ١ | ٥ |
| ر/ ( س ) | ٢ | – ٣ |

(١) ن ( س ) = ٣ د ( س ) – ٢ ر ( س )
فإن : ن/ ( ١ ) = ....

(٢) ن ( س ) = د ( س ) [ ٥ + ر ( س ) ]
فإن : ن/ ( ٢ ) = ....

(٣) ن ( س ) = د ( س ) ÷ [ ر ( س ) + ٢ ]
فإن : ن/ ( ١ ) = ....

(٤) ن ( س ) = د [ ر ( س ) ] فإن : ن/ ( ١ ) = ....

(٥) ن ( س ) = ر [ ٣ س – د ( س ) ] فإن : ن/ ( ٢ ) = ....

(٦) ن ( س ) = [ س^٣ + ر ( س ) ]^-٢ فإن : ن/ ( ١ ) = ....

الحل

(١) ∵ ن ( س ) = ٣ د ( س ) – ٢ ر ( س )
∴ ن/ ( س ) = ٣ د/ ( س ) – ٢ ر/ ( س )
∴ ن/ ( ١ ) = ٣ د/ ( ١ ) – ٢ ر/ ( ١ ) = ٣ × ١ – ٢ × ٢ = ٣ – ٤ = – ١

(٢) ∵ ن ( س ) = د ( س ) [ ٥ + ر ( س ) ]
∴ ن/ ( س ) = د/ ( س ) × [ ٥ + ر ( س ) ] + د ( س ) × ر/ ( س )
∴ ن/ ( ٢ ) = د/ ( ٢ ) × [ ٥ + ر ( ٢ ) ] + د ( ٢ ) × ر/ ( ٢ )
= ٥ × [ ٥ + ١ ] + ٤ × ( – ٣ ) = ٣٠ – ١٢ = ١٨

(٣) ∵ ن ( س ) = د ( س ) ÷ [ ر ( س ) + ٢ ] = د ( س ) / ( ر ( س ) + ٢ )
∴ ن/ ( س ) = ( [ ر ( س ) + ٢ ] × د/ ( س ) – د ( س ) × ر/ ( س ) ) / [ ر ( س ) + ٢ ]^٢
∴ ن/ ( ١ ) = ( [ ر ( ١ ) + ٢ ] × د/ ( ١ ) – د ( ١ ) × ر/ ( ١ ) ) / [ ر ( ١ ) + ٢ ]^٢
= ( [ ٢ + ٢ ] × ١ – ( – ١ ) × ٢ ) / [ ٢ + ٢ ]^٢ = ٦/١٦ = ٣/٨

(٤) ∵ ن ( س ) = د [ ر ( س ) ]
∴ ن/ ( س ) = د/ [ ر ( س ) ] × ر/ ( س )
∴ ن/ ( ١ ) = د/ [ ر ( ١ ) ] × ر/ ( ١ ) = د/ ( ٢ ) × ر/ ( ١ ) = ٥ × ٢ = ١٠

(٥) ∵ ن ( س ) = ر [ ٣ س – د ( س ) ]
∴ ن/ ( س ) = ر/ [ ٣ س – د ( س ) ] × [ ٣ – د/ ( س ) ]
∴ ن/ ( ٢ ) = ر/ [ ٣ × ٢ – د ( ٢ ) ] × [ ٣ – د/ ( ٢ ) ]
= ر/ [ ٦ – ٤ ] × [ ٣ – ٥ ] = ر/ ( ٢ ) × ( – ٣ )
= ( – ٣ ) × ( – ٢ ) = ٦

(٦) ∵ ن ( س ) = [ س^٣ + ر ( س ) ]^-٢
∴ ن/ ( س ) = ( – ٢ ) [ س^٣ + ر ( س ) ]^-٣ × [ ٣ + ر/ ( س ) ]
∴ ن/ ( ١ ) = ( – ٢ ) [ (١)^٣ + ر ( ١ ) ]^-٣ × [ ٣ + ر/ ( ١ ) ]
= ( – ٢ ) [ ١ + ٢ ]^-٣ × [ ٣ + ٢ ]
= ( – ٢ ) [ ٣ ]^-٣ × [ ٥ ] = – ٢ × ١/٢٧ × ٥ = – ١٠/٢٧

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلى :

(٧) ص = $\text{س}^{٣}$ − ٢ قا س

(٨) ص = قتا ( ٢ − ٣ س )

(٩) ص = طتا ( π − $\frac{١}{\text{س}}$ )

(١٠) ص = طا ( طتا س )

(١١) ص = $( ١ + \text{طتا س} )^{٢}$

(١٢) ص = قتا ( π − ٢ س )

(١٣) ص = حتا ٢ س − ٥ طتا ٣ س

(١٤) ص = طا ٣ س − قتا ٢ س

(١٥) ص = $\text{حا}^{٢}$ ٣ س + $\text{قا}^{٢}$ س

(١٦) ص = قا س طا ٢ س

(١٧) ص = $\text{طتا}^{٣} \sqrt{\text{س}}$

(١٨) ص = $\text{قتا}^{٢} ( ١ + \text{س}^{٢} )$

(١٩) ص = ٣ $\text{قا}^{٢}$ ( ٢ س + π )

(٢٠) ص = $\sqrt{١ + \text{قتا س}}$

(٢١) ص = $\text{س}^{٣}$ طتا ٣ س

(٢٢) ص = $( \text{قتا س} + \text{طتا س} )^{-١}$

(٢٣) ص = $\frac{\text{طتا ٣ س}}{\text{٢ س} + ٣}$

(٢٤) ص = $\frac{١ - \text{قا س}}{١ + \text{قا س}}$

الحل

(٧) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ $\text{س}^{٢}$ − ٢ قا س طا س

(٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا ( ٢ − ٣ س ) طتا ( ٢ − ٣ س ) × ( − ٣ )

= ٣ قتا ( ٢ − ٣ س ) طتا ( ٢ − ٣ س )

(٩) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − $\text{قتا}^{٢}$ ( π − $\frac{١}{\text{س}}$ ) × ( − $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ ) = $\frac{-١}{\text{س}^{٣}}$ $\text{قتا}^{٢}$ ( π − $\frac{١}{\text{س}}$ )

(١٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\text{قا}^{٢}$( طتا س ) × ( − $\text{قتا}^{٢}$ س ) = ( − $\text{قتا}^{٢}$ س ) $\text{قا}^{٢}$( طتا س )

(١١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ ( ١ + طتا س ) × ( − $\text{قتا}^{٢}$ س ) = ( − ٢ $\text{قتا}^{٢}$ س ) ( ١ + طتا س )

(١٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − قتا ( π − ٢ س ) طتا ( π − ٢ س ) × ( − ٢ )

= ٢ قتا ( π − ٢ س ) طتا ( π − ٢ س )

(١٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − حا ٢ س × ٢ − ٥ $\text{قتا}^{٢}$ ٣ س × ( − ٣ )

= ( − ٢ ) حا ٢ س + ١٥ $\text{قتا}^{٢}$ ٣ س

(١٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\text{قا}^{٢}$ ٣ س × ٣ − ( − قتا ٢ س طتا ٢ س ) × ٢

= ٣ $\text{قا}^{٢}$ ٣ س + ٢ قتا ٢ س طتا ٢ س

(١٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ حا ٣ س حتا ٣ س × ٣ + ٢ قا ٢ س × قا ٢ س طا ٢ س

= حا ٦ س × ٣ + ٢ $\text{قا}^{٢}$ ٢ س طا ٢ س

= ٣ حا ٦ س + ٢ $\text{قا}^{٢}$ ٢ س طا ٢ س

(١٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا س × $\text{قا}^{٢}$ ٢ س × ٢ + طا ٢ س × قا س طا س

= ٢ قا س $\text{قا}^{٢}$ ٢ س + طا ٢ س قا س طا س

(١٧) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ $\text{طتا}^{٢} \sqrt{\text{س}}$ × ( − $\text{قتا}^{٢} \sqrt{\text{س}}$ ) × $\frac{١}{٢ \sqrt{\text{س}}}$

= $\frac{-٣}{٢ \sqrt{\text{س}}}$ $\text{طتا}^{٢} \sqrt{\text{س}}$ $\text{قتا}^{٢} \sqrt{\text{س}}$

(١٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ قتا ( ١ + $\text{س}^{٢}$ ) [ − قتا ( ١ + $\text{س}^{٢}$ ) طتا ( ١ + $\text{س}^{٢}$ ) ] × ٢ س

= ( − ٤ س ) $\text{قتا}^{٢}$( ١ + $\text{س}^{٢}$ ) طتا ( ١ + $\text{س}^{٢}$ )

(١٩) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ × ٢ قا ( ٢ س + π ) طا ( ٢ س + π ) × ٢

= ١٢ قا ( ٢ س + π ) طا ( ٢ س + π )

(٢٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢ \sqrt{١ + \text{قتا س}}}$ × ( − قتا س طتا س ) = $\frac{- \text{قتا س طتا س}}{٢ \sqrt{١ + \text{قتا س}}}$

(٢١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\text{س}^{٢}$ × ( − $\text{قتا}^{٢}$ ٣ س ) × ٣ + طتا ٣ س × ٢ س

= ( − ٣ $\text{س}^{٢}$ ) $\text{قتا}^{٢}$ ٣ س + ٢ س طتا ٣ س

(٢٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ( − ١ ) $( \text{قتا س} + \text{طتا س} )^{-٢}$ × ( − قتا س طتا س + $\text{قتا}^{٢}$ س )

= ( قتا س طتا س − $\text{قتا}^{٢}$ س ) $( \text{قتا س} + \text{طتا س} )^{-٢}$

$$= \frac{\text{قتا س}\,(\text{قتا س} - \text{قتا س})}{(\text{قتا س} + \text{طتا س})^{٢}} = \frac{\text{قتا س}}{\text{قتا س} - \text{قتا س}}$$

**(٢٣)** $$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{٢س} + ٣) \times (-\text{قتا}^{٢}\,\text{٣س}) \times ٣ - \text{طتا ٣س}}{(\text{٢س} + ٣)^{٢}}$$

$$= \frac{(-٣)(\text{٢س} + ٣)\,\text{قتا}^{٢}\,\text{٣س} - ٢\,\text{طتا ٣س}}{(\text{٢س} + ٣)^{٢}}$$

**(٢٤)** $$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(١ + \text{قا س}) \times (-\text{قا س طا س}) - (١ - \text{قا س}) \times (\text{قا س طا س})}{(١ + \text{قا س})^{٢}}$$

$$= \frac{(-\text{قا س طا س}) - \text{قا}^{٢}\text{س طا س} - \text{قا س طا س} + \text{قا}^{٢}\text{س طا س}}{(١ + \text{قا س})^{٢}}$$

$$= \frac{-٢\,\text{قا س طا س}}{(١ + \text{قا س})^{٢}}$$

**(٢٥)** إذا كان : $\text{ص} = \text{طتا}\,\tfrac{١}{٢}\pi\,\text{ع}$ ، $\text{ع} = ٣\sqrt{\text{س}}$

أوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند : $\text{س} = ١$

**الحل**

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = (-\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi\,\text{ع}) \times \tfrac{١}{٢}\pi\,\text{ع} = (-\tfrac{١}{٢}\pi\,\text{ع})\,\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi\,\text{ع}$$

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = (-\tfrac{١}{٢}\pi)\,\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi\,\text{ع} \times \frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$= (-\tfrac{١}{٢}\pi)\,\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi \times ٣\sqrt{\text{س}} \times \frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{٤\sqrt{\text{س}}}\right)\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi\sqrt{\text{س}}$$

، عندما $\text{س} = ١$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-\tfrac{١}{٤}\pi)\,\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi$

$$= (-\tfrac{١}{٤}\pi) \times ١ = (-\tfrac{١}{٤}\pi)$$

**حل آخر**

$$\text{ص} = \text{طتا}\,\tfrac{١}{٢}\pi\,\text{ع} = \text{طتا}\,\tfrac{١}{٢}\pi \times ٣\sqrt{\text{س}} = \text{طتا}\,\tfrac{١}{٢}\pi\sqrt{\text{س}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi\sqrt{\text{س}}) \times \tfrac{١}{٢}\pi\sqrt{\text{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

$$= (-\tfrac{١}{٤}\pi)\,\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi\sqrt{\text{س}}$$

، عندما $\text{س} = ١$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-\tfrac{١}{٤}\pi)\,\text{قتا}^{٢}\,\tfrac{١}{٢}\pi$

$$= (-\tfrac{١}{٤}\pi) \times ١ = (-\tfrac{١}{٤}\pi)$$

**(٢٦)** إذا كان : $\text{ص} = \sqrt{٥ - ٢\text{ع}}$ ، $\text{ع} = \text{قا ٢س}$

أثبت أن : $\sqrt{٣}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ١٢ = ٠$ عند : $\text{س} = \tfrac{١}{٦}\pi$

**الحل**

$$\text{ص} = (٥ - ٢\text{ع})^{\frac{١}{٢}} = (٥ - ٢\,\text{قا ٢س})^{\frac{١}{٢}}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \tfrac{١}{٢}(٥ - ٢\,\text{قا ٢س})^{-\frac{١}{٢}} \times (-٢\,\text{قا ٢س طا ٢س} \times ٢)$$

$$= (-٢\,\text{قا ٢س طا ٢س})(٥ - ٢\,\text{قا ٢س})^{-\frac{١}{٢}}$$

عندما : $\text{س} = \tfrac{١}{٦}\pi$

فإن : $$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-٢\,\text{قا}\,\tfrac{١}{٣}\pi\,\text{طا}\,\tfrac{١}{٣}\pi)(٥ - ٢\,\text{قا}\,\tfrac{١}{٣}\pi)^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= (-٢ \times ٢ \times \sqrt{٣})(٥ - ٢ \times ٢)^{-\frac{١}{٢}}$$

$$= (-٤\sqrt{٣})(١)^{-\frac{١}{٢}} = (-٤\sqrt{٣})$$

∴ الطرف الأيمن $= \sqrt{٣} \times ( - ٤ \sqrt{٣} ) + ١٢$

$= ( - ١٢ ) + ١٢ = ٠ =$ الطرف الأيسر

**٢٧)** أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث : ص = د ( س ) لكل مما يلى :

(أ) ص = ٢ طتا س + $\sqrt{٢}$ قا س عند : س = $\frac{١}{٤}\pi$

(ب) ص = ٣ طا س − قتا$^{٢}$ س عند : س = $\frac{٣}{٤}\pi$

**الحل**

(أ) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ × ( − قتا$^{٢}$ س ) + $\sqrt{٢}$ قا س طا س

= ( − ٢ ) قتا$^{٢}$ س + $\sqrt{٢}$ قا س طا س

∴ ميل المماس = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{١}{٤}\pi}$

= ( − ٢ ) قتا$^{٢}$ $\frac{١}{٤}\pi$ + $\sqrt{٢}$ قا $\frac{١}{٤}\pi$ طا $\frac{١}{٤}\pi$

$= ( - ٢ ) \times ( \sqrt{٢} )^{٢} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times ١$

$= ( - ٢ ) \times ٢ + ٢ = ( - ٤ ) + ٢ = ( - ٢ )$

(ب) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ قا$^{٢}$ س − ٢ قتا س × ( − قتا س طتا س )

= ٣ قا$^{٢}$ س + ٢ قتا$^{٢}$ س طتا س

∴ ميل المماس = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = \frac{٣}{٤}\pi}$

= ٣ قا$^{٢}$ $\frac{٣}{٤}\pi$ + ٢ قتا$^{٢}$ $\frac{٣}{٤}\pi$ طتا $\frac{٣}{٤}\pi$

$= ٣ \times ( - \sqrt{٢} )^{٢} + ٢ \times ( \sqrt{٢} )^{٢} \times ( - ١ )$

$= ٣ \times ٢ + ٢ \times ٢ \times ( - ١ ) = ٦ - ٤ = ٢$

## ١ – ٢ الاشتقاق الضمنى و البارامترى

**الدالة الصريحة :**

الدالة الصريحة هى دالة على الصورة : ص = د ( س )
أى كل معادلة يرتبط فيها المتغير التابع ص بالمتغير المستقل س
حيث تحدد قيمة ص مباشرة متى علم قيمة س
، و يكون ص فى أحد طرفى المعادلة ، و س فى الطرف الآخر

**العلاقة الضمنية :**

العلاقة الضمنية هى علاقة على الصورة : ع ( س ، ص ) = ٠
يرتبط فيها ص بالمتغير س بمعادلة تحوى س ، ص معاً
أى أن : النقطة ( س ، ص ) تقع على المنحنى البيانى لها

**ملاحظات :**

**(١)** إذا أمكن كتابة العلاقة ع ( س ، ص ) = ٠ على الصورة :
ص = د ( س ) " دالة واحدة صريحة "
فإن : العلاقة ع ( س ، ص ) = ٠
هى علاقة ضمنية تعرف حالة واحدة صريحة

**(٢)** بعض العلاقات الضمنية تعرف دالتين صريحتين

**(٣)** فى كثير من المعادلات على الصورة د ( س ، ص ) = ٠
يصعب التعبير عن ص بدلالة س مباشرة
لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى المتغير س
تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية

**الدالة الضمنية :**

الدالة الضمنية هى دالة على الصورة : د ( س ، ص ) = ٠

## اشتقاق الدالة الضمنية ( الاشتقاق الضمنى ) :

(١) لايجاد $\frac{ءص}{ءس}$ لعلاقة ضمنية نحولها لعلاقة صريحة ثم نستخدم قواعد الاشتقاق

(٢) إذا تعذر تحويل العلاقة الضمنية لعلاقة صريحة ( أى لا يمكن فصل المتغير ص فى طرف مستقل ) نشتق طرفى المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص وفقاً لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب

**ملاحظات :**

(١) $\frac{ء}{ءس}(ص^{ن}) = ن ص^{ن-١} \times \frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء}{ءص}(س^{ن}) = ن س^{ن-١} \times \frac{ءس}{ءص}$

(٢) العلاقة سواء كانت صريحة أو ضمنية يكون لها نفس المشتقة و نحصل عليها بالاشتقاق بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص

### إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٠

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان :

(أ) $س^{٣} - ٥ س ص + ص^{٣} = ٤ س$

(ب) $س^{٢} ص + ص^{٢} س = ٢٥$

**الحل**

(أ) ∵ $س^{٣} - ٥ س ص + ص^{٣} = ٤ س$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٣ س^{٢} - ٥ ص - ٥ س \frac{ءص}{ءس} + ٣ ص^{٢} \frac{ءص}{ءس} = ٤$

∴ $\frac{ءص}{ءس} ( ٣ ص^{٢} - ٥ س ) = ٤ - ٣ س^{٢} + ٥ ص$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤ - ٣ س^{٢} + ٥ ص}{٣ ص^{٢} - ٥ س}$

(ب) ∵ $س^{٢} ص + ص^{٢} س = ٢٥$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢ س ص + س^{٢} \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص س \frac{ءص}{ءس} + ص^{٢} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} ( س^{٢} + ٢ ص س ) = - ( ص^{٢} + ٢ س ص )$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-( ص^{٢} + ٢ س ص )}{س^{٢} + ٢ ص س}$

### إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١١

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان :

(أ) س حتا ص + ص حتا س = ١

(ب) ٣ ص = حا س حتا ٢ ص

**الحل**

(أ) ∵ س حتا ص + ص حتا س = ١ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$حتا ص + س حا ص \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} حتا س - ص حا س = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} ( حتا س - س حا ص ) = ص حا س - حتا ص$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص حا س - حتا ص}{حتا س - س حا ص}$

(ب) ∵ ٣ ص = حا س حتا ٢ ص ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٣ \frac{ءص}{ءس} = حتا س حتا ٢ ص - ٢ حا س حا ٢ ص \frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} ( ٣ + ٢ حا س حا ٢ ص ) = حتا س حتا ٢ ص$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{حتا س حتا ٢ ص}{٣ + ٢ حا س حا ٢ ص}$

## الاشتقاق البارامترى :

إذا أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى و الإحداثى الصادى للنقطة ( س ، ص ) كدالة فى متغير ثالث ن ( يسمى الوسيط أو البارامتر ) بالمعادلتين : س = د ( ن ) ، ص = ر ( ن ) فإن : المعادلتين معاً تمثلان معادلة لمنحى واحد معبراً عنه بالصورة البارامترية حيث : الدالتين د ، ر قابلتين للاشتقاق بالنسبة إلى ن و يكون :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$$

### ملاحظات :

(١) يمكن تحويل الصورة البارامترية إلى الصورة الصريحة أو الضمنية بحذف المتغيلا البارامترى ( ن ) من معادلتى س ، ص

(٢) لايجاد مشتقة الدالة د ( س ) بالنسبة إلى الدالة ر ( س )

نفرض أن : ص = د ( س ) ، ع = ر ( س )

فتكون : مشتقة الدالة د ( س ) بالنسبة إلى الدالة ر ( س )

هى : $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءع}$

### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٢

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للمنحنيات الآتية عند القيم المعطاة :

(أ) س = ( ن + ٧ ) ( ن − ٢ ) ، ص = ( ن$^٢$ + ١ ) ( ن − ٢ ) ، ن = −١

(ب) س = قا$^٢$ θ − ٢ ، ص = ١ − طا θ ، θ = − $\frac{٣}{٤}$ π

(جـ) س = $\sqrt{٣ن - ٢}$ ، ص = $\sqrt{٤ن + ١}$ ، ن = ٢

### الحل

(أ) ∵ س = ( ن + ٧ ) ( ن − ٢ ) = ن$^٢$ + ٥ ن − ١٤

∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ ن + ٥

، ∵ ص = ( ن$^٢$ + ١ ) ( ن − ٢ ) = ن$^٣$ − ٢ ن$^٢$ + ن − ٢

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٣ ن$^٢$ − ٤ ن + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣ن^٢ - ٤ن + ١}{٢ن + ٥}$

، عندما : ن = −١ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٨}{٣}$

(ب) ∵ س = قا$^٢$ θ − ١ = طا$^٢$ θ ∴ $\frac{ءس}{ءθ}$ = ٢ طا θ قا$^٢$ θ

، ∵ ص = طا θ ∴ $\frac{ءص}{ءθ}$ = قا$^٢$ θ

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءθ} \div \frac{ءس}{ءθ} = \frac{قا^٢ θ}{٢ طا θ قا^٢ θ} = \frac{١}{٢ طا θ}$

و عندما : θ = − $\frac{٣}{٤}$ π فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢ طا (-\frac{٣}{٤} π)} = \frac{١}{٢}$

(جـ) ∵ س = $\sqrt{٣ن - ٢}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣ن - ٢}}$

، ∵ ص = $\sqrt{٤ن + ١}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤ن + ١}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٤\sqrt{٣ن - ٢}}{٣\sqrt{٤ن + ١}}$

، عندما : ن = ٢ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٨}{٩}$

## إجابة تفكير ناقد صفحة ١٢

أوجد قيمة البارامتر ع التى يكون عندها للمنحنى :

$س = ٢ع^{٣} - ٥ع^{٢} - ٤ع + ١٢$ ، $ص = ٢ع^{٢} + ع - ٤$

مماس أفقى و آخر رأسى

**الحل**

∵ $س = ٢ع^{٣} - ٥ع^{٢} - ٤ع + ١٢$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٦ع^{٢} - ١٠ع - ٤$

، ∵ $ص = ٢ع^{٢} + ع - ٤$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٤ع + ١$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٤ع + ١}{٦ع^{٢} - ١٠ع - ٤}$

ليكون للمنحنى مماس أفقى فإن : ميل المماس = صفر أى : $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ نضع : $٤ن + ١ = ٠$ و منها : $ن = -\frac{١}{٤}$

، و ليكون للمنحنى مماس رأسى فإن : ميل المماس = غير معرف

∴ نضع : $٦ن^{٢} - ١٠ن - ٤ = ٠$ ∴ $٣ن^{٢} - ٥ن - ٢ = ٠$

∴ $(٣ن - ٢)(ن - ١) = ٠$ و منها : $ن = \frac{٢}{٣}$ أ، $ن = ١$

## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٢

باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد :

(أ) مشتقة $س^{٢} + ١$ بالنسبة إلى $\sqrt{س^{٢} - ١}$

(ب) مشتقة $\sqrt{٨ + س^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س - ١}$

عندما : $س = ١$

(حـ) مشتقة $س - حا س$ بالنسبة إلى $٢ - حتا س$

عندما : $س = \frac{١}{٣}\pi$

**الحل**

(أ) نضع : $ص = س^{٢} + ١$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢س$

، $ع = \sqrt{س^{٢} - ١} = (س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٢}(س^{٢} - ١)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ١}} \times \frac{١}{٢س}$

(ب) نضع : $ص = \sqrt{٨ + س^{٢}} = (٨ + س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(٨ + س^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times ٢س = \frac{س}{\sqrt{٨ + س^{٢}}}$

، $ع = \frac{س}{س + ١}$ ∴ $\frac{ءع}{ءس} = \frac{(س + ١) \times ١ - س \times ١}{(س + ١)^{٢}} = \frac{١}{(س + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{س}{\sqrt{٨ + س^{٢}}} \times \frac{(س + ١)^{٢}}{١}$

، عندما : $س = ١$ ∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{٣} \times ٤ = \frac{٤}{٣}$

(حـ) نضع : $ص = س - حا س$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١ - حتا س$

، $ع = ٢ - حتا س$ ∴ $\frac{ءع}{ءس} = حا س$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{١ - حتا س}{حا س}$

، عندما : $س = \frac{١}{٣}\pi$ ∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١ - \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$

## حل تمارين ( ١ – ٢ ) صفحة ١٣ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : $س^٢ + ص^٢ = ١$ فإن : $\frac{ع ص}{ع س} = ....$

(أ) $س$ (ب) $\frac{١}{ص}$ (جـ) $-\frac{س}{ص}$ (د) $-\frac{ص}{س}$

(٢) إذا كان : $س^٢ + ص^٢ = ٢ س ص$ فإن : $\frac{ع ص}{ع س} = ....$

(أ) $-١$ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(٣) إذا كان : $ص^٢ - ٢\sqrt{س} = ٠$ فإن : $\frac{ع ص}{ع س} = ....$

(أ) $\frac{٢ ص}{\sqrt{س}}$ (ب) $\sqrt{س}$ (جـ) $\frac{س}{ص^٢}$ (د) $\frac{١}{ص^٣}$

(٤) إذا كان : $س = ٢ن^٢ + ٣$ ، $ص = \sqrt{ن^٣}$ ، $ن = ١$ فإن : $\frac{ع ص}{ع س} = ....$

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٣ (د) ٦

(٥) ميل المماس للمنحنى : $س ص^٢ = ٣$ عند النقطة ( ٣ ، ١ ) يساوى ....

(أ) $-٣$ (ب) $-\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

### الحل

(١) ∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢س + ٢ص \frac{ع ص}{ع س} = ٠$ و منها : $\frac{ع ص}{ع س} = -\frac{س}{ص}$

(٢) ∵ $س^٢ + ص^٢ = ٢ س ص$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢س + ٢ص \frac{ع ص}{ع س} = ٢س \frac{ع ص}{ع س} + ٢ص$ و منها :

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ص - س}{ص - س} = ١$

(٣) ∵ $ص^٢ = ٢\sqrt{س}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢ص \frac{ع ص}{ع س} = ٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ و منها :

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{١}{ص \times ٢\sqrt{س}} = \frac{١}{ص \times ص^٢} = \frac{١}{ص^٣}$

(٤) ∵ $س = ٢ن^٢ + ٣$ ∴ $\frac{ع س}{ع ن} = ٤ن$

، ∵ $ص = \sqrt{ن^٣} = ن^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $\frac{ع ص}{ع ن} = \frac{٣}{٢} ن^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{ن}$

∴ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ن} \div \frac{ع س}{ع ن} = \frac{\frac{٣}{٢}\sqrt{ن}}{٤ن}$ و عندما : $ن = ١$

∴ $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٣}{٨}$

(٥) ∵ $س ص^٢ = ٣$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$ص^٢ + ٢ س ص \frac{ع ص}{ع س} = ٠$ و منها : $\frac{ع ص}{ع س} = -\frac{ص}{٢س}$

∴ ميل المماس $= \left[\frac{ع ص}{ع س}\right]_{(٣ ، ١)} = -\frac{١}{٦}$

ثانياً : أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ لكل مما يلى :

(٦) $س^٢ - ٤ص^٢ + ٧ = ٠$

(٧) $س^٤ + ٣ص^٤ - ٢ = ٠$

(٨) $س^٢ - ٢ س ص = ٥ - ص^٢$

(٩) $س^٣ + ٦ س ص = ٤ص + ٣$

(١٠) $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ١$

(١١) $\text{س ص} + \text{حا ص} = ٥$

(١٢) $\text{س حا ص} + \text{ص حتا س} = ٠$

(١٣) $\text{س قتا ص} = \text{ص طتا س}$

(١٤) $\text{س}^٢ \text{ حا ص} - \text{ص}^٢ \text{ حا س} = ٩$

(١٥) $\text{حا ٢س حتا ٢ص} = \frac{٣}{٤}$

**الحل**

(٦) ∵ $\text{س}^٢ - ٤\text{ص}^٢ + ٧ = ٠$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{س} - ٨\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$ و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}}{٤\text{ص}}$

(٧) ∵ $\text{س}^٤ + ٣\text{ص}^٤ - ٢ = ٠$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٤\text{س}^٣ + ١٢\text{ص}^٣ \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$ و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{\text{س}^٣}{٣\text{ص}^٣}$

(٨) ∵ $\text{س}^٢ - ٢\text{س ص} = ٥ - \text{ص}^٢$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{س} - ٢\text{ص} - ٢\text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} (\text{س} - \text{ص}) = (\text{س} - \text{ص})$ و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١$

(٩) ∵ $\text{س}^٣ + ٦\text{س ص} = ٤\text{ص} + ٣$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٣\text{س}^٢ + ٦\text{ص} + ٦\text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤ \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} (٤ - ٦\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ٦\text{ص}$

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣\text{س}^٢ + ٦\text{ص}}{٤ - ٦\text{س}} = -\frac{٣(\text{س}^٢ + ٢\text{ص})}{٢(٣\text{س} - ٢)}$

(١٠) ∵ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ١$ بالضرب × س ص ينتج :

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{س ص}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص} + \text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} (\text{س} - ٢\text{ص}) = ٢\text{س} - \text{ص}$ و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س} - \text{ص}}{\text{س} - ٢\text{ص}}$

(١١) ∵ $\text{س ص} + \text{حا ص} = ٥$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ص} + \text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{حتا ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} (\text{س} + \text{حتا ص}) = -\text{ص}$ و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{ص}}{\text{س} + \text{حتا ص}}$

(١٢) ∵ $\text{س حا ص} + \text{ص حتا س} = ٠$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{حا ص} + \text{س حتا ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{حتا س} - \text{ص حا س} = ٠$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} (\text{س حتا ص} + \text{حتا س}) = \text{ص حا س} - \text{حا ص}$

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص حا س} - \text{حا ص}}{\text{س حتا ص} + \text{حتا س}}$

(١٣) ∵ $\text{س قتا ص} = \text{ص طتا س}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{قتا ص} + \text{س} \times (-\text{قتا ص طتا ص}) \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{طتا س} - \text{ص قتا}^٢ \text{س}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} (\text{طتا س} + \text{س قتا ص طتا ص}) = \text{ص قتا}^٢ \text{س} + \text{قتا ص}$

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص قتا}^٢ \text{س} + \text{قتا ص}}{\text{طتا س} + \text{س قتا ص طتا ص}}$

(١٤) ∵ $\text{س}^٢ \text{ حا ص} - \text{ص}^٢ \text{ حا س} = ٩$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{س حا ص} + \text{س}^٢ \text{ حتا ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{ص}^٢ \text{ حتا س} - ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \text{حا س} = ٠$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} (\text{س}^٢ \text{ حتا ص} - ٢\text{ص حا س}) = \text{ص}^٢ \text{ حتا س} - ٢\text{س حا ص}$

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}^٢ \text{ حتا س} - ٢\text{س حا ص}}{\text{س}^٢ \text{ حتا ص} - ٢\text{ص حا س}}$

(١٥) ∵ $\text{حا ٢س حتا ٢ص} = \frac{٣}{٤}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{حا ٢س} \times (-٢ \text{ حا ٢ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}) + ٢ \text{ حتا ٢س حتا ٢ص} = ٠$ .

و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢ حتا ٢ س حتا ٢ ص}}{\text{٢ حا ٢ س حا ٢ ص}} = \text{طتا ٢ س طتا ٢ ص}$

ثالثاً : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنيات الآتية عند النقط المعطاة :

**(١٦)** $\text{س} = ١٣ - ٢\text{ن}$ ، $\text{ص} = ٤\text{ن}^{٢} - \sqrt{\text{ن}}$ ، $\text{ن} = ٤$

**(١٧)** $\text{س} = \text{حا } ٢\pi\theta$ ، $\text{ص} = \text{حتا } ٢\pi\theta$ ، $\theta = \frac{١}{٦}$

**(١٨)** $\text{س} = ٥ + \text{قا}^{٢}\, ٣\theta$ ، $\text{ص} = ١ - \text{طا } ٣\theta$ ، $\theta = \frac{١}{٤}\pi$

الحل

**(١٦)** ∵ $\text{س} = ١٣ - ٢\text{ن}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٢$

، ∵ $\text{ص} = ٤\text{ن}^{٢} - \sqrt{\text{ن}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٨\text{ن} - \frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{٨\text{ن} - \frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}}}}{-٢}$

و عندما : $\text{ن} = ٤$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣٢ - \frac{١}{٤}}{-٢} = -\frac{١٢٧}{٨}$

**(١٧)** ∵ $\text{س} = \text{حا } ٢\pi\theta$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = ٢\pi \text{ حتا } ٢\pi\theta$

، ∵ $\text{ص} = \text{حتا } ٢\pi\theta$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = -٢\pi \text{ حا } ٢\pi\theta$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \frac{-٢\pi \text{ حا } ٢\pi\theta}{٢\pi \text{ حتا } ٢\pi\theta} = -\text{طا } ٢\pi\theta$

و عندما : $\theta = \frac{١}{٦}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{طا } ٢\pi \times \frac{١}{٦} = -\text{طا } \frac{١}{٣}\pi = -\sqrt{٣}$

**(١٨)** $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = ٢ \text{ قا}^{٢}\, ٣\theta \text{ طا } ٣\theta \times ٣ = ٦ \text{ قا}^{٢}\, ٣\theta \text{ طا } ٣\theta$

، $\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = -\text{قا}^{٢}\, ٣\theta \times ٣ = -٣ \text{ قا}^{٢}\, ٣\theta$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \frac{-٣ \text{ قا}^{٢}\, ٣\theta}{٦ \text{ قا}^{٢}\, ٣\theta \text{ طا } ٣\theta} = \frac{-١}{٢ \text{ طا } ٣\theta}$

و عندما : $\theta = \frac{١}{٤}\pi$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{٢ \text{ طا } \frac{٣}{٤}\pi} = \frac{١}{٢}$

**(١٩)** أوجد ميل المماس للمنحنى : $\text{حتا} \sqrt{\pi \text{ ص}} = ٣ \text{ س} + ١$ عند النقطة $(-\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\pi)$

الحل

∵ $\text{حتا} \sqrt{\pi \text{ ص}} = ٣ \text{ س} + ١$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$$-\text{حا} \sqrt{\pi \text{ ص}} \times \frac{\pi}{٢\sqrt{\pi \text{ ص}}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣$$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٦\sqrt{\pi \text{ ص}}}{-\pi \text{ حا} \sqrt{\pi \text{ ص}}}$

∴ ميل المماس $= \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(-\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\pi)} = \frac{٦\sqrt{\pi \times \frac{١}{٤}\pi}}{-\pi \text{ حا} \sqrt{\pi \times \frac{١}{٤}\pi}}$

$= \frac{٦ \times \frac{١}{٢}\pi}{-\pi \text{ حا } \frac{١}{٢}\pi} = -٣$

**(٢٠)** أوجد مشتقة $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{٢ \text{ س} + ١}$ عند $\text{س} = ٤$

الحل

نضع : $\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - ١) \times ١ - (\text{س} + ١) \times ١}{(\text{س} - ١)^{٢}} = \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

، $\text{ع} = \sqrt{٢ \text{ س} + ١} = (٢ \text{ س} + ١)^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}(٢ \text{ س} + ١)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢ \text{ س} + ١}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{-٢}{(س - ١)^{٢}} \times \frac{\sqrt{٢س + ١}}{١}$

، عندما : س = ٤ $\therefore \frac{ءص}{ءع} = -\frac{٢}{٩} \times \frac{٣}{١} = -\frac{٢}{٣}$

**(٢١)** أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى :

$$س = ٢ن^{٣} - ٥ن^{٢} + ٤ن - ٩ \quad ، \quad ص = ٢ن^{٢} + ن - ٥$$

(أ) مماس رأسى (ب) مماس أفقى

**الحل**

$\because س = ٢ن^{٣} - ٥ن^{٢} + ٤ن - ٩ \qquad \therefore \frac{ءس}{ءن} = ٦ن^{٢} - ١٠ن - ٤$

، $\because ص = ٢ن^{٢} + ن - ٥ \qquad \therefore \frac{ءص}{ءن} = ٤ن + ١$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٤ن + ١}{٦ن^{٢} - ١٠ن - ٤}$

(أ) $\because$ المماس رأسى $\therefore$ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ غير معرف

$\therefore ٦ن^{٢} - ١٠ن - ٤ = ٠ \qquad \therefore ٣ن^{٢} - ٥ن - ٢ = ٠$

$\therefore (٣ن - ٢)(ن - ١) = ٠$ و منها : ن = $\frac{٢}{٣}$ أ، ن = ١

(ب) $\because$ المماس أفقى $\therefore$ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore ٤ن + ١ = ٠$ و منها : ن = $-\frac{١}{٤}$

## ١ – ٣ المشتقات العليا للدالة

**(١)** إذا كانت : ص = د ( س ) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن : مشتقتها الأولى هى $ص^{\prime} = \frac{ءص}{ءس} = د^{\prime}(س)$ و تمثل دالة جديدة

**(٢)** إذا كانت : المشتقة الأولى للدالة ص = د ( س ) قابلة للاشتقاق بالنسبة فإن : مشتقتها $\frac{ء}{ءس} \left( \frac{ءص}{ءس} \right)$ تسمى المشتقة الثانية للدالة د و تمثل دالة أخرى و يرمز لها بالرمز :

$$ص^{\prime\prime} = \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = د^{\prime\prime}(س)$$

**(٣)** بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة للدالة د و يرمز لها بالرمز : $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ ، ..... و هكذا

**(٤)** تسمى المشتقات لدالة بدءاً من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا و تكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلى :

$ص^{(ن)} = \frac{ء^{ن}ص}{ءس^{ن}} = د^{(ن)}(س)$ حيث : ن عدد صحيح موجب

**ملاحظات :**

**(١)** الرمز $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ يقرأ دال اثنين ص دال س اثنين

**(٢)** الرمز $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ يدل على المشتقة الثانية للدالة

بينما $\left( \frac{ءص}{ءس} \right)^{٢}$ يدل على مربع المشتقة الأولى

(٣) $\frac{d}{dس}\left(ص \frac{dص}{dس}\right) = ص \frac{d}{dس}\left(\frac{dص}{dس}\right) + \frac{dص}{dس} \times \frac{dص}{dس}$

$= ص \frac{d^{٢}ص}{dس^{٢}} + \left(\frac{dص}{dس}\right)^{٢}$

(٤) إذا كانت : ص = د ( ع ) ، ع = ر (س) فإن :

$\frac{dص}{dس} = \frac{dص}{dع} \times \frac{dع}{dس}$ ،

$\frac{d^{٢}ص}{dس^{٢}} = \frac{d}{dس}\left(\frac{dص}{dس}\right)$

(٥) إذا كانت : ص = د ( س ) ، ع = ر ( س ) دالتان قابلتان للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

$\frac{dص}{dع} = \frac{dص}{dس} \div \frac{dع}{dس} = \frac{dص}{dس} \times \frac{dس}{dع}$ ،

$\frac{d^{٢}ص}{dع^{٢}} = \frac{d}{dع}\left(\frac{dص}{dع}\right) = \frac{d}{dس}\left(\frac{dص}{dع}\right) \times \frac{dس}{dع}$ ،

$\frac{d^{٣}ص}{dع^{٣}} = \frac{d}{dع}\left(\frac{d^{٢}ص}{dع^{٢}}\right) = \frac{d}{dس}\left(\frac{d^{٢}ص}{dع^{٢}}\right) \times \frac{dس}{dع}$ ، ... هكذا

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٥

أوجد المشتقة الثالثة لكل من :

(أ) $ص = س^{٤} - ٢ س^{٢} + ٥$ (ب) $ع = (٢ن - ١)^{٤}$

(ج) $د(س) = حتا (٢س + \pi)$ (د) $د(س) = \frac{س}{س - ١}$

الحل

(أ) $\because ص = س^{٤} - ٢ س^{٢} + ٥ \quad \therefore \frac{dص}{dس} = ٤ س^{٣} - ٤ س$

$\therefore \frac{d^{٢}ص}{dس^{٢}} = ١٢ س^{٢} - ٤ \quad \therefore \frac{d^{٣}ص}{dس^{٣}} = ٢٤ س$

(ب) $\because ع = (٢ن - ١)^{٤} \quad \therefore \frac{dع}{dن} = ٨(٢ن - ١)^{٣}$

$\therefore \frac{d^{٢}ع}{dن^{٢}} = ٤٨(٢ن - ١)^{٢} \quad \therefore \frac{d^{٣}ع}{dن^{٣}} = ١٩٢(٢ن - ١)$

(ج) $\because د(س) = حتا (٢س + \pi) = -\, حتا\, ٢س$

$\therefore د'(س) = ٢\, حا\, ٢س$ ، $د''(س) = ٤\, حتا\, ٢س$

، $د'''(س) = -٨\, حا\, ٢س$

(د) $\because د(س) = \frac{س}{س - ١}$

$\therefore د'(س) = \frac{(س - ١) \times ١ - س \times ١}{(س - ١)^{٢}} = \frac{-١}{(س - ١)^{٢}} = -(س - ١)^{-٢}$

، $د''(س) = ٢(س - ١)^{-٣}$ ، $د'''(س) = -٦(س - ١)^{-٤}$

## إجابة تفكير ناقد صفحة ١٥

إذا كانت : ص = حا أس أكتشف النمط المتتالى ، أوجد $ص^{(٢٥)}$

الحل

$\because ص = حا\, أس \quad \therefore ص' = أ\, حتا\, أس = أ\, حا (أس + \frac{١}{٢}\pi)$

، $ص'' = -أ^{٢}\, حا\, أس = أ^{٢}\, حا (أس + \pi)$

، $ص''' = -أ^{٣}\, حتا\, أس = أ^{٣}\, حا (أس + \frac{٣}{٢}\pi)$

، $ص'''' = أ^{٤}\, حا\, أس = أ^{٤}\, حا (أس + ٢\pi)$

$\therefore ص^{(ن)} = أ^{ن}\, حا (أس + \frac{١}{٢} ن \pi)$

$\therefore ص^{(٢٥)} = أ^{٢٥}\, حا (أس + \frac{٢٥}{٢} \pi)$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٥

(أ) إذا كانت : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٩$ أثبت أن :

$$\text{ص}\,\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}} + \left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^{٢} + ١ = ٠$$

(ب) إذا كانت : $\text{ص} = \text{طا س}$ أثبت أن :

$$\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}} = ٢\,\text{ص}\,(١ + \text{ص}^{٢})$$

### الحل

(أ) $\because \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٩$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\text{ص}' = ٠$ بالقسمة على ٢ ينتج : $\text{س} + \text{ص}\,\text{ص}' = ٠$

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$١ + (\text{ص}')^{٢} + \text{ص}\,\text{ص}'' = ٠$ أى أن :

$$\text{ص}\,\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}} + \left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right)^{٢} + ١ = ٠$$

(ب) $\because \text{ص} = \text{طا س}$ $\therefore$ بالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ص}' = \text{قا}^{٢}\text{س}$ ، $\text{ص}'' = ٢\,\text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{طا س}$

$\therefore \text{ص}'' = ٢\,(١ + \text{طا}^{٢}\text{س})\ \text{طا س} = ٢\,(١ + \text{ص}^{٢})\,\text{ص}$

أى أن : $\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}} = ٢\,\text{ص}\,(١ + \text{ص}^{٢})$

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٦

إذا كانت : $\text{س} = \text{ع}^{٢} - ٢\text{ع}$ ، $\text{ص} = \text{ع}^{٢}$ أوجد

$\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}}$ ، $\frac{d^{٣}\text{ص}}{d\text{س}^{٣}}$ عند : $\text{ع} = ٢$

### الحل

$\because \text{س} = \text{ع}^{٢} - ٢\text{ع}$ $\therefore \frac{d\text{س}}{d\text{ع}} = ٢\text{ع} - ٢ = ٢\,(\text{ع} - ١)$

، $\text{ص} = \text{ع}^{٢}$ $\therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = ٢\text{ع}$

، $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} \div \frac{d\text{س}}{d\text{ع}} = \frac{\text{ع}}{\text{ع} - ١} = \text{ع}\,(\text{ع} - ١)^{-١}$

$\therefore \frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}} = \frac{d}{d\text{س}}\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right) = \frac{d}{d\text{ع}}\left(\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\right) \times \frac{d\text{ع}}{d\text{س}}$

$= \frac{d}{d\text{ع}}\left[\text{ع}\,(\text{ع} - ١)^{-١}\right] \times \frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-١}$

$= \left[(\text{ع} - ١)^{-١} - \text{ع}\,(\text{ع} - ١)^{-٢}\right] \times \frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-١}$

$= \left[(\text{ع} - ١)^{-٢}\,(\text{ع} - ١ - \text{ع})\right] \times \frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-١}$

$= -(\text{ع} - ١)^{-٢} \times \frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-١} = -\frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-٣}$

، عندما : $\text{ع} = ٢$ فإن : $\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}} = -\frac{١}{٢}$

، $\frac{d^{٣}\text{ص}}{d\text{س}^{٣}} = \frac{d}{d\text{س}}\left(\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}}\right) = \frac{d}{d\text{ع}}\left(\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{س}^{٢}}\right) \times \frac{d\text{ع}}{d\text{س}}$

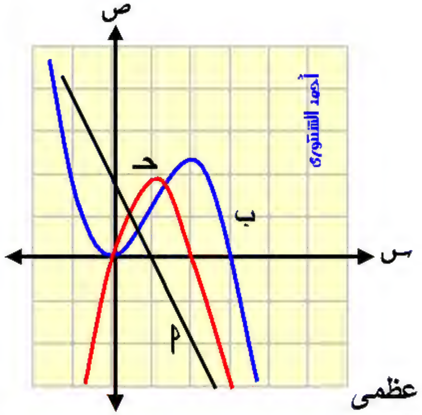
$= \frac{d}{d\text{ع}}\left[-\frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-٣}\right] \times \frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-١}$

$= \frac{٣}{٢}(\text{ع} - ١)^{-٤} \times \frac{١}{٢}(\text{ع} - ١)^{-١} = \frac{٣}{٤}(\text{ع} - ١)^{-٥}$

، عندما : $\text{ع} = ٢$ فإن : $\frac{d^{٣}\text{ص}}{d\text{س}^{٣}} = \frac{٣}{٤}$

## إجابة تفكير ناقد صفحة ١٦

يبين الشكل المقابل : تمثيلاً بيانياً لمنحنيات الدوال :
د ( س ) ، د$^{/}$ ( س ) ، د$^{//}$ ( س )
حيث : د ( س ) كثيرة حدود
حدد منحنى كل دالة




**الحل**

∵ للمنحنى ب نقطة قيمة عظمى ،
و نقطة قيمة صغرى ، للمنحنى حـ نقطة قيمة عظمى
و لا يوجد للمنحنى ﻡ أى نقط لقيم عظمى أو صغرى
∴ درجة دالة المنحنى ب = درجة دالة المنحنى حـ + ١ ،
درجة دالة المنحنى حـ = درجة دالة المنحنى ﻡ + ١
∴ المنحنى ب يمثل منحنى د ( س ) المنحنى حـ يمثل منحنى د$^{/}$ ( س ) ،
المنحنى ﻡ يمثل منحنى د$^{//}$ ( س )

## حل تمارين ( ١ – ٣ ) صفحة ١٣ بالكتاب المدرسى

**(١)** إذا كانت : ص = ﻡ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ء
و كانت ارتباطات س ، ص ، ص$^{/}$ ، ص$^{//}$
موضحة بالجدول التالى :
أوجد قيم : ﻡ ، ب ، حـ ، ء الحقيقية
ثم أكمل الجدول

| س | ص | ص$^{/}$ | ص$^{//}$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٨ | | ٢٨ |
| ٢ | | ٧٥ | ٣٤ |

**الحل**

∵ ص = ﻡ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ء
∴ ص$^{/}$ = ٣ ﻡ س$^{٢}$ + ٢ ب س + حـ    ، ص$^{//}$ = ٦ ﻡ س + ٢ ب
، ∵ ص$^{//}$ = ٢٨ عندما : س = ١    ∴ ٢٨ = ٦ ﻡ + ٢ ب
∴ ١٤ = ٣ ﻡ + ب    (١)
، ∵ ص$^{//}$ = ٣٤ عندما : س = ٢    ∴ ٢٨ = ١٢ ﻡ + ٢ ب
∴ ١٧ = ٦ ﻡ + ب    (٢)    بطرح (١) من (٢) ينتج :
٣ = ٣ ﻡ    ∴ ﻡ = ١    ،    بالتعويض فى (١) ينتج : ب = ١١
، ∵ ص$^{/}$ = ٧٥ عندما : س = ٢    ∴ ٧٥ = ١٢ ﻡ + ٤ ب + حـ
، ∵ ﻡ = ١ ، ب = ١١    ∴ حـ = ١٩
، ∵ ص = ٨ عندما : س = ١    ∴ ٨ = ﻡ + ب + حـ + ء
، ∵ ﻡ = ١ ، ب = ١١ ، حـ = ١٩    ∴ ء = – ٢٣
∴ ص = ١ × ٨ + ١١ × ٤ + ١٩ × ٢ – ٢٣ = ٦٧
∴ ص$^{/}$ = ٣ × ١ × ١ + ٢ × ١١ × ١١ + ١٩ = ٤٤

أوجد المشتقة الثالثة لكلاً مما يلى :

**(٢)** ص = س$^{٥}$ – ٤ س$^{٣}$ + ٣    **(٣)** ص = $\frac{\text{٢ س}}{\text{س + ١}}$
**(٤)** ص = حا ( ٢ س – ٧ )    **(٥)** ص = حتا ( π – ٣ س )
**(٦)** ص = حا س حتا س    **(٧)** ص = $\sqrt{\text{٢ س – ٥}}$

**الحل**

**(٢)** ∵ ص = س$^{٥}$ – ٤ س$^{٣}$ + ٣    ∴ ص$^{/}$ = ٥ س$^{٤}$ – ١٢ س$^{٢}$
، ص$^{//}$ = ٢٠ س$^{٣}$ – ٢٤ س    ، ص$^{///}$ = ٦٠ س$^{٢}$ – ٢٤

**(٣)** ∵ ص = ٢ س ( س + ١ )$^{-١}$
∴ ص$^{/}$ = ٢ ( س + ١ )$^{-١}$ – ( س + ١ )$^{-٢}$ × ٢ س
= ٢ ( س + ١ )$^{-٢}$ [ س + ١ – س ]
= ٢ ( س + ١ )$^{-٢}$ × ١ = ٢ ( س + ١ )$^{-٢}$ = $\frac{٢}{(\text{س + ١})^{٢}}$

∴ ص″ = − ٤ ( س + ١ )^−٣ = − ٤ / ( س − ١ )^٣

∴ ص‴ = ١٢ ( س + ١ )^−٤ = ١٢ / ( س + ١ )^٤

**(٤)** ∵ ص = حا ( ٢ س − ٧ )  ∴ ص′ = ٢ حتا ( ٢ س − ٧ )

∴ ص″ = − ٤ حا ( ٢ س − ٧ )  ∴ ص‴ = − ٨ حتا ( ٢ س − ٧ )

**(٥)** ∵ ص = حتا ( π − ٣ س )

∴ ص′ = − حا ( π − ٣ س ) × − ٣ = ٣ حا ( π − ٣ س )

∴ ص″ = ٣ حتا ( π − ٣ س ) × − ٣ = − ٩ حتا ( π − ٣ س )

∴ ص‴ = − ٩ × − حا ( π − ٣ س ) × − ٣ = − ٢٧ حا ( π − ٣ س )

**(٦)** ∵ ص = حا س حتا س

∴ ص′ = حا س × − حا س + حتا س × حتا س

= − حا^٢ س + حتا^٢ س = حتا ٢ س  ∴ ص″ = − ٢ حا ٢ س

∴ ص″ = − ٢ × ٢ حتا ٢ س = − ٤ حتا ٢ س

**(٧)** ∵ ص = √( ٢ س − ٥ ) = ( ٢ س − ٥ )^½

∴ ص′ = ½ ( ٢ س − ٥ )^−½ × ٢ = ١ / √( ٢ س − ٥ )

∴ ص″ = − ½ ( ٢ س − ٥ )^−³⁄₂ × ٢ = − ١ / ( √( ٢ س − ٥ ) )^٣

∴ ص‴ = − × − ³⁄₂ ( ٢ س − ٥ )^−⁵⁄₂ × ٢ = ٣ / ( √( ٢ س − ٥ ) )^٥

أجب عما يلى :

**(٨)** إذا كان : ٣ س^٢ + ٥ = ٢ س ص  أثبت أن :

س (ء^٢ص / ءس^٢) + ٢ (ءص / ءس) = ٣

الحل

∵ ٣ س^٢ + ٥ = ٢ س ص  ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٦ س = ٢ ص + ٢ س ص′  ∴ ٣ س = ص + س ص′

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

٣ = ص′ + ص′ + س ص″  ∴ ٣ = ٢ ص′ + س ص″

أى أن : س (ء^٢ص / ءس^٢) + ٢ (ءص / ءس) = ٣

**(٩)** إذا كان : س^٢ + ص^٢ = ٤  أثبت أن :

ص^٣ (ء^٢ص / ءس^٢) + ٤ = ٠ .

الحل

∵ س^٢ + ص^٢ = ٤  ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س + ٢ ص ص′ = ٠  ∴ س + ص ص′ = ٠ و منها : ص′ = − س / ص

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

١ + ( ص′ )^٢ + ص ص″ = ٠ ، بالتعويض عن ص′ ينتج :

١ + س^٢ / ص^٢ + ص ص″ = ٠ ، بالضرب × ص^٢ ينتج :

ص^٢ + س^٢ + ص^٣ ص″ = ٠ ، ∵ س^٢ + ص^٢ = ٤

∴ ٤ + ص^٣ ص″ = ٠  أى أن : ص^٣ (ء^٢ص / ءس^٢) + ٤ = ٠

**(١٠)** إذا كان : ص = ٣ حتا ( ٢ س + ١ )  أثبت أن :

(ء^٢ص / ءس^٢) + ٤ ص = ٠ .

الحل

∵ ص = ٣ حتا ( ٢ س + ١ )  ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص′ = ٣ × ( − حا ( ٢ س + ١ ) ) × ٢ = − ٦ حا ( ٢ س + ١ )

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

ص$''$ − ٦ حتا ( ٢ س + ١ ) × ٢ = − ١٢ حا ( ٢ س + ١ )

∴ الطرف الأيمن = − ١٢ حا ( ٢ س + ١ ) + ٤ × ٣ حتا ( ٢ س + ١ )

= − ١٢ حا ( ٢ س + ١ ) + ١٢ حا ( ٢ س + ١ ) = ٠ .

أى أن : $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + ٤ ص = ٠ .

**(١١)** إذا كان : س ص = حا س حتا س أثبت أن :

س $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ س ص = ٠ .

**الحل**

∵ س ص = حا س حتا س = $\frac{1}{2}$ × ( ٢ حا س حتا س ) = $\frac{1}{2}$ حا ٢ س

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص + س ص$'$ = $\frac{1}{2}$ × ٢ حتا ٢ س = حتا ٢ س

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

ص$'$ + ص$'$ + س ص$''$ = − ٢ حا ٢ س  (١)

، ∵ س ص = $\frac{1}{2}$ حا ٢ س  ∴ حا ٢ س = ٢ س ص

∴ من (١) : ٢ ص$'$ + س ص$''$ + ٤ س ص = ٠ .

أى أن : س $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ س ص = ٠ .

**(١٢)** إذا كان : ص = س حا س أثبت أن :

س $\frac{ء^{3}ص}{ءس^{3}}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص = ٠ .

**الحل**

∵ ص = س حا س  ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص$'$ = حا س + س حتا س ، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

ص$''$ = حتا س + حتا س − س حا س = ٢ حتا س − س حا س

، بالاشتقاق مرة ثالثة بالنسبة إلى س ينتج :

ص$'''$ = − ٢ حا س − حا س − س حتا س = − ٣ حا س − س حتا س

∴ الطرف الأيمن = س ( − ٣ حا س − س حتا س ) + س ( حا س +
س حتا س ) + ٢ س حا س

= − ٣ س حا س − س$^{2}$ حتا س + س حا س

+ س$^{2}$ حتا س + ٢ س حا س = ٠ = الطرف الأيسر

**(١٣)** إذا كان : ص = قا س أثبت أن :

ص $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{2}$ = ص$^{2}$ ( ٣ ص$^{2}$ − ٢ )

**الحل**

∵ ص = قا س  ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص$'$ = قا س طا س ، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

ص$''$ = قا س × قا$^{2}$ س + طا س × قا س طا س = قا$^{3}$ س + قا س طا$^{2}$ س

∴ الطرف الأيمن = قا س ( قا$^{3}$ س + قا س طا$^{2}$ س ) + ( قا س طا س )$^{2}$

= قا$^{4}$ س + قا$^{2}$ س طا$^{2}$ س + قا$^{2}$ س طا$^{2}$ س

= قا$^{4}$ س + ٢ قا$^{2}$ س طا$^{2}$ س

= قا$^{2}$ س ( قا$^{2}$ س + ٢ طا$^{2}$ س )

= قا$^{2}$ س ( قا$^{2}$ س + ٢ ( قا$^{2}$ س − ١ ))

= قا$^{2}$ س ( قا$^{2}$ س + ٢ قا$^{2}$ س − ٢ )

= قا$^{2}$ س ( ٣ قا$^{2}$ س − ٢ ) = ص$^{2}$ ( ٣ ص$^{2}$ − ٢ ) = الطرف الأيسر

أى أن : ص $\frac{ء^{2}ص}{ءس^{2}}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{2}$ = ص$^{2}$ ( ٣ ص$^{2}$ − ٢ )

**(١٤)** إذا كان: $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣$ ، $\frac{ءع}{ءس} = س^{٢} - ١$

أوجد: $\frac{ء^{٢}ص}{ءع^{٢}}$ عند: $س = ٢$

**الحل**

$\because \frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{٢س - ٣}{س^{٢} - ١}$

$\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ءع^{٢}} = \frac{ء}{ءع}\left(\frac{ءص}{ءع}\right) = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءع}\right) \times \frac{ءس}{ءع}$

$= \frac{ء}{ءس}\left(\frac{٢س - ٣}{س^{٢} - ١}\right) \times \frac{١}{س^{٢} - ١}$

$= \frac{(س^{٢} - ١) \times ٢ - (٢س - ٣) \times ٢س}{(س^{٢} - ١)^{٢}} \times \frac{١}{س^{٢} - ١}$

$= \frac{٢س^{٢} - ٢ - ٤س^{٢} + ٦س}{(س^{٢} - ١)^{٣}} = \frac{٦س - ٢ - ٢س^{٢}}{(س^{٢} - ١)^{٣}}$

، عند: $س = ٢$ $\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ءع^{٢}} = \frac{٦ \times ٢ - ٢ - ٢ \times ٤}{(٤ - ١)^{٣}} = \frac{٢}{٢٧}$

**(١٥)** إذا كان: $س = ٣ن^{٢} - ٢$ ، $ص = ن^{٣} + ٢$

أوجد: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عند: $ن = ٤$

**الحل**

$\because س = ٣ن^{٢} - ٢$ $\therefore \frac{ءس}{ءن} = ٦ن$

، $\because ص = ن^{٣} + ٢$ $\therefore \frac{ءص}{ءن} = ٣ن^{٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣ن^{٢}}{٦ن} = \frac{١}{٢}ن$ ،

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{ء}{ءن}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) \times \frac{ءن}{ءس}$

$= \frac{ء}{ءن}\left(\frac{١}{٢}ن\right) \times \frac{١}{٦ن} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦ن} = \frac{١}{١٢ن}$

و عندما: $ن = ٤$ فإن: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{١}{٤٨}$

**(١٦)** إذا كان: $س = \frac{ع + ١}{ع - ١}$ ، $ص = \frac{ع - ١}{ع + ١}$

أوجد: $\frac{ءص}{ءس}$ عند: $ع = ٢$

**الحل**

$\because س = \frac{ع + ١}{ع - ١}$ ، $ص = \frac{ع - ١}{ع + ١}$

$\therefore$ عند: $ع = ٢$ فإن: $س = ٣$ ، $ص = \frac{١}{٣}$

، $س\,ص = ١$ ، بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج:

$ص + س\frac{ءص}{ءس} = ٠$ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = -\frac{ص}{س} = -\frac{١}{٩}$

**(١٧)** إذا كان: $س = \text{قا } ع$ ، $\sqrt{ص} = \text{طا } ع$ أثبت أن: $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢$

**الحل**

$\because س = \text{قا } ع$ $\therefore \frac{ءس}{ءع} = \text{قا } ع \text{ طا } ع$

، $\because \sqrt{ص} = \text{طا } ع$ $\therefore$ بالتربيع ينتج: $ص = \text{طا}^{٢} ع$

، $\frac{ءص}{ءع} = ٢ \text{ طا } ع \text{ قا}^{٢} ع$

، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \div \frac{ءس}{ءع} = \frac{٢ \text{ طا } ع \text{ قا}^{٢} ع}{\text{قا } ع \text{ طا } ع} = ٢ \text{ قا } ع$

$\therefore \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{ء}{ءع}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) \times \frac{ءع}{ءس}$

$= \frac{ء}{ءع}\left(٢ \text{ قا } ع\right) \times \frac{١}{\text{قا } ع \text{ طا } ع}$

$= ٢ \text{ طا } ع \text{ قا}^{٢} ع \times \frac{١}{\text{قا } ع \text{ طا } ع} = ٢$

حل آخر

$\because$ س = قا ع $\quad \therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ = قا ع ظا ع

، $\because \sqrt{\text{ص}}$ = ظا ع $\quad \therefore \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = قا$^2$ ع

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = 2\sqrt{\text{ص}}$ قا$^2$ ع = ٢ ظا ع قا$^2$ ع

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ = ٢ قا ع = ٢ س

، $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \left( \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ( ٢ س ) = ٢

## ١ – ٤ معادلتا المماس و العمودى لمنحنى

تذكر ما يلى :

**[أ] طرق ايجاد ميل الخط المستقيم :**

١) ميل المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + حـ = ٠ .

هو : م = $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

٢) ميل المستقيم المار بالنقطتين ( $\text{س}_1$ ، $\text{ص}_1$ ) ، ( $\text{س}_2$ ، $\text{ص}_2$ )

هو : م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

٣) ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ( $\theta$ ) هو : م = ظا $\theta$

و يكون ميل المستقيم موجباً إذا كانت : ( $\theta$ ) حادة

بينما يكون سالباً إذا كانت : ( $\theta$ ) منفرجة

٤) ميل المستقيم الذى متجه اتجاهه $\overrightarrow{\text{ى}}$ = ( أ ، ب )

هو : م = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

**ملاحظات :**

(١) ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى ( موازى لمحور السينات ) = صفر

(٢) ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى ( موازى لمحور الصادات ) = $\frac{1}{0}$ ( غير معرف )

(٣) إذا كان : $\text{م}_1$ هو ميل المستقيم $\text{ل}_1$ ، $\text{م}_2$ هو ميل المستقيم $\text{ل}_2$

و كان : أ) $\text{ل}_1$ // $\text{ل}_2$ فإن : $\text{م}_1$ // $\text{م}_2$ و العكس صحيح

أحمد الشتوى

٢) $ل_١ \perp ل_٢$ فإن : $م_١ \times م_٢ = -١$ و العكس صحيح

## [٢] الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

١) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة و $( س_١ ، ص_١ )$ ،
و المتجه $\overrightarrow{ى} = ( أ ، ب )$ متجه اتجاه له هى :
$\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك \overrightarrow{ى}$

٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة و $( س_١ ، ص_١ )$ ،
و ميله ( م ) هى : $ص - ص_١ = م ( س - س_١ )$

**ملاحظات :**

(١) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بنقطة الأصل و ميله ( م )
هى : ص = م س

(٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى ميله ( م ) ، و يقطع من
محور الصادات جزءاً طوله = | حـ | هى : ص = م س + حـ

(٣) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من محور السينات جزءاً
طوله = | أ | ، و من محور الصادات جزءاً طوله = | ب |
هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

(٤) معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات و المار بالنقطة
( ل ، ك ) هى : ص = ك

(٥) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات و المار بالنقطة
( ل ، ك ) هى : س = ل

(٦) معادلة محور السينات هى : ص = ٠

(٧) معادلة محور الصادات هى : س = ٠

## استخدام المشتقة الأولى لايجاد ميل المماس لمنحنى و العمودى عليه :

١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د ( س ) عند النقطة
$أ ( س_١ ، ص_١ )$ هو : $م = \left( \frac{ءص}{ءس} \right)_{( س_١ ، ص_١ )}$

٢) ميل العمودى على الدالة ص = د ( س ) عند النقطة
$أ ( س_١ ، ص_١ )$ هو : $م = \frac{-١}{\left( \frac{ءص}{ءس} \right)_{( س_١ ، ص_١ )}}$

**ملاحظات :**

(١) إذا كانت : $د'( س ) = ٠$ عند نقطة ما على المنحنى
فإن : ميل المماس للمنحنى = ٠ عند هذه النقطة
و يكون المماس للمنحنى موازياً لمحور السينات و العكس صحيح

(٢) إذا كانت : $د'( س ) \leftarrow \infty$ عند نقطة ما على المنحنى
فإن : ميل المماس للمنحنى غير معرف عند هذه النقطة
و يكون المماس للمنحنى موازياً لمحور الصادات و العكس صحيح
" المماس يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قائمة عند هذه النقطة "

(٣) إذا كانت : $د'( س ) > ٠$ عند نقطة ما على المنحنى
فإن : المماس يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية حادة عند هذه النقطة و العكس صحيح

(٤) إذا كانت : $د'( س ) < ٠$ عند نقطة ما على المنحنى
فإن : المماس يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية منفرجة عند هذه النقطة و العكس صحيح

**معادلتا المماس و العمودى لمنحنى :**

إذا كانت النقطة ١ ( س١ ، ص١ ) تقع على منحنى الدالة د حيث :

ص = د ( س ) ، م ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة فإن :

(١) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ١ ( س١ ، ص١ ) هى :

ص – ص١ = م ( س – س١ )

(٢) معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة ١ ( س١ ، ص١ ) هى :

ص – ص١ = $\frac{-1}{م}$ ( س – س١ )

**ملاحظات :**

(١) يتقاطع المنحنيان على التعامد إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدين

(٢) لإثبات أن : المنحنيين يتقاطعان على التعامد عند نقطة نتبع ما يلى :

١) نوجد النقطة إذا كانت غير معلومة

٢) نوجد ميل المماس لكلا المنحنيين عند هذه النقطة

٣) نتأكد من أن حاصل ضرب ميلى المماسيين = – ١

(٣) لإثبات أن : المنحنيين متماسان نتبع ما يلى :

١) نوجد نقطة التماس إذا كانت غير معلومة

٢) نوجد ميل المماس لكلا المنحنيين عند هذه النقطة

٣) نتأكد من أن ميلى المماسيين متساويان

(٤) لايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات هى : ص = ٠ و نوجد قيم س

(٥) لايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات هى : س = ٠ و نوجد قيم ص

(٦) لايجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما معاً آنياً

(٧) زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين هذا المستقيم و المماس للمنحنى عند نقطة التقاطع

(٨) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسيين عند نقط تقاطع المنحنيين

**إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٩**

أوجد معادلتى المماس و العمودى للمنحنى : ص = ٣ + قا س

عند النقطة التى تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{٢}{٣}\pi$

**الحل**

∵ س = $\frac{٢}{٣}\pi$ ∴ ص = ٣ + قا $\frac{٢}{٣}\pi$ = ٣ – ٢ = ١

∴ النقطة الواقعة على المنحنى هى : ( $\frac{٢}{٣}\pi$ ، ١ )

، ∵ ص = ٣ + قا س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{ءص}{ءس}$ = قا س طا س ، عند النقطة ( $\frac{٢}{٣}\pi$ ، ١ ) فإن :

ميل المماس = قا $\frac{٢}{٣}\pi$ طا $\frac{٢}{٣}\pi$ = ٢ × $\sqrt{٣}$ = ٢$\sqrt{٣}$

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

∴ معادلة المماس هى : ص – ١ = ٢$\sqrt{٣}$ ( س – $\frac{٢}{٣}\pi$ )

أى : ٢$\sqrt{٣}$ س – ص – $\frac{٤}{٣}\sqrt{٣}\,\pi$ + ١ = ٠

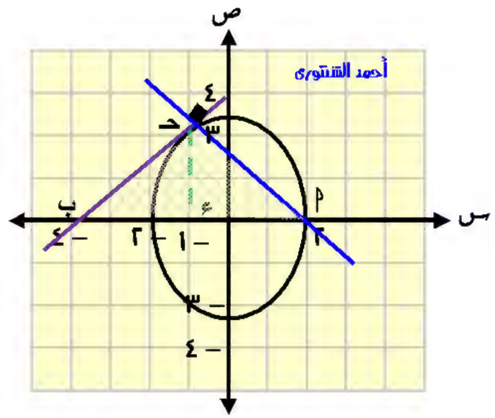
، معادلة العمودى هى : ص – ١ = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$ ( س – $\frac{٢}{٣}\pi$ )

أى : س + ٢$\sqrt{٣}$ ص – ٢$\sqrt{٣}$ – $\frac{٢}{٣}\pi$ = ٠

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٩

أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات و المماس و العمودى عليه للمنحنى : ٣ $س^٢$ + $ص^٢$ = ١٢ عند النقطة ( –١ ، ٣ )

**الحل**




∵ ٣ $س^٢$ + $ص^٢$ = ١٢

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٦ س + ٢ ص ص/ = ٠

و منها : ص/ = $\frac{-٦ س}{٢ ص}$

∴ عند النقطة ( –١ ، ٣ )

فإن : ميل المماس = ١

، ميل العمودى = –١ ،

معادلة المماس هى : ص – ٣ = ١ × ( س + ١ )

أى : س – ص + ٤ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص – ٣ = ( –١ ) × ( س + ١ )

أى : س + ص – ٢ = ٠

بفرض أن : المماس يقطع محور السينات فى النقطة ب ( ل ، ٠ )

∴ بالتعويض فى معادلة المماس ينتج : ل + ٤ = ٠ و منها : ل = –٤

أى أن : المماس يقطع محور السينات فى النقطة ب ( –٤ ، ٠ )

، بفرض أن : العمودى على المماس يقطع محور السينات فى النقطة أ ( ل ، ٠ )

∴ بالتعويض فى معادلة العمودى ينتج : ل – ٢ = ٠ و منها : ل = ٢

أى أن : العمودى يقطع محور السينات فى النقطة أ ( ٢ ، ٠ )

∴ أ ب = | –٤ – ٢ | = ٦ وحدة طول

، و من الشكل : ارتفاع المثلث المطلوب ( حـ ء ) = ٣ وحدة طول

∴ مساحة المثلث المطلوب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدات مربعة

ملاحظة : " معلومة إثرائية " :

المنحنى : ٣ $س^٢$ + $ص^٢$ = ١٢ يمثل قطع ناقص معادلته هى :

$\frac{س^٢}{٤}$ + $\frac{ص^٢}{١٢}$ = ١ " بقسمة طرفى المعادلة ÷ ١٢ "

و الشكل السابق يمثل ذلك المنحنى

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٠

أوجد معادلتى المماس و العمودى للمنحنى : س = حتا $\theta$ ، ص = $\sqrt{٢}$ + حا $\theta$ عند : $\theta$ = $\frac{١}{٤}\pi$

**الحل**

∵ س = حا $\theta$ ∴ $\frac{ءس}{ء\theta}$ = – حا $\theta$

، ∵ ص = $\sqrt{٢}$ + حا $\theta$ ∴ $\frac{ءص}{ء\theta}$ = حتا $\theta$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ء\theta}$ ÷ $\frac{ءس}{ء\theta}$ = $\frac{حتا \theta}{- حا \theta}$ = – ظتا $\theta$

= $\frac{١}{حا \theta}$ = قتا $\theta$ و عندما : $\theta$ = $\frac{١}{٤}\pi$ فإن :

ميل المماس = – ظتا $\frac{١}{٤}\pi$ = –١ ∴ ميل العمودى = ١

، س = حتا $\frac{١}{٤}\pi$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ص = $\sqrt{٢}$ + حا $\frac{١}{٤}\pi$ = $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$

∴ عند النقطة ( $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ) فإن :

معادلة المماس هى : ص – $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ = ( –١ ) × ( س – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ )

أى : س + ص – ٢ $\sqrt{٢}$ = ٠

، معادلة العمودى هى : $\text{ص} - \frac{٣}{\sqrt{٢}} = ١ \times \left( \text{س} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \right)$

أى : $\text{س} - \text{ص} + \sqrt{٢} = ٠$ .

## إجابة تفكير ناقد صفحة ٢٠

إذا كانت النقطة ( ١ ، ٢ ) إحدى نقط تقاطع المنحنيين :

$\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} = ٣$ ، $\text{س ص} = ٣$

هل يتعامد مماسا المنحنيين عند هذه النقطة ؟ فسر إجابتك

**الحل**

∵ $\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} = ٣$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢ \text{ص ص}' - ٢\text{س} = ٠$ . ∴ $\text{ص ص}' - \text{س} = ٠$ . و منها : $\text{ص}' = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

∴ عند النقطة ( ١ ، ٢ ) فإن : ميل المماس = $\frac{١}{٢}$

أى أن : ميل المماس للمنحنى الأول عند النقطة ( ١ ، ٢ ) = $\frac{١}{٢}$

، $\text{س ص} = ٣$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ص} + \text{س ص}' = ٠$ . و منها : $\text{ص}' = -\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

∴ عند النقطة ( ١ ، ٢ ) فإن : ميل المماس = − ٢

أى أن : ميل المماس للمنحنى الثانى عند النقطة ( ١ ، ٢ ) = − ٢

∴ مماسا المنحنيين عند النقطة ( ١ ، ٢ ) يتعامدان

لأن : ميل المماس للمنحنى الأول عند النقطة ( ١ ، ٢ ) × ميل المماس للمنحنى الثانى عند النقطة ( ١ ، ٢ ) = $\frac{١}{٢} \times -٢ = -١$

## حل تمارين ( ١ – ٤ ) صفحة ٢١ بالكتاب المدرسى

(١) إذا كانت : د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

أوجد معادلتى المماس و العمودى لمنحنى الدالة فى كل مما يأتى بالقيم المعطاة فى الجدول التالى :

| س | د ( س ) | ر ( س ) | د' ( س ) | ر' ( س ) |
|---|---|---|---|---|
| ٣ | ١ | ٧ | − ١ | ٦ |
| ٧ | − ٢ | ١ | ٢ | ٥ |

(أ) ق ( س ) = د ( س ) × ر ( س ) عند : س = ٣

(ب) ق ( س ) = د ( س ) ÷ ر ( س ) عند : س = ٧

(حـ) ق ( س ) = د [ ر ( س ) ] عند : س = ٣

**الحل**

(أ) ∵ ق ( س ) = د ( س ) × ر ( س )

∴ ق' ( س ) = د ( س ) × ر' ( س ) + ر ( س ) × د' ( س )

، عند : س = ٣ فإن :

ميل المماس = ق' ( ٣ ) = د ( ٣ ) × ر' ( ٣ ) + ر ( ٣ ) × د' ( ٣ )

= ١ × ٦ + ٧ × ( − ١ ) = ٦ − ٧ = − ١

∴ ميل العمودى = ١ ، ص = ق ( ٣ ) = د ( ٣ ) × ر ( ٣ ) = ١ × ٧ = ٧

∴ عند النقطة ( ٣ ، ٧ ) فإن :

معادلة المماس هى : ص − ٧ = ( − ١ ) × ( س − ٣ )

∴ ص − ٧ = − س + ٣ أى : س + ص − ١٠ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص − ٧ = ١ × ( س − ٣ )

∴ ص − ٧ = س − ٣ أى : س − ص + ٤ = ٠ .

(ب) ∵ ق ( س ) = د ( س ) ÷ ر ( س ) = $\frac{\text{د ( س )}}{\text{ر ( س )}}$

∴ ع/(س) = [ر(س) × د/(س) − د(س) × ر/(س)] ÷ [ر(س)]^٢

، عند : س = ٧ فإن :

ميل المماس = ع/(٧) = [ر(٧) × د/(٧) − د(٧) × ر/(٧)] ÷ [ر(٧)]^٢

= (١ × ٢ − (−٢) × ٥) ÷ [١]^٢ = ١٢

∴ ميل العمودى = − ١/١٢ ، ص = ع(٧) = د(٧)/ر(٧) = −٢/١ = −٢

∴ عند النقطة (٧ ، −٢) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ٢ = ١٢ × (س − ٧)

∴ ص + ٢ = ١٢ س − ٨٤ أى : ١٢ س − ص − ٨٦ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ٢ = (− ١/١٢) × (س − ٧)

∴ ١٢ ص + ٢٤ = − س + ٧ أى : س + ١٢ ص + ١٧ = ٠

(حـ) ∵ ع(س) = د[ر(س)]

∴ ع/(س) = د/[ر(س)] × ر/(س) ، عند : س = ٣ فإن :

ميل المماس = ع/(٣) = د/[ر(٣)] × ر/(٣) = د/(٣) × ر/(٣)

= ٢ × ٦ = ١٢ ∴ ميل العمودى = − ١/١٢

، ص = ع(٣) = د[ر(٣)] = د(٧) = −٢ ∴ عند النقطة (٣ ، −٢) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ٢ = ١٢ × (س − ٣)

∴ ص + ٢ = ١٢ س − ٣٦ أى : ١٢ س − ص − ٣٨ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ٢ = (− ١/١٢) × (س − ٣)

∴ ١٢ ص + ٢٤ = − س + ٣ أى : س + ١٢ ص + ٢١ = ٠

**(٢) أوجد معادلتى المماس و العمودى لمنحنى الدالة د حيث :**
**ص = د(س) عند قيم س المعطاة :**

(أ) ص = ٣ − طتا^٢ س ، س = ١/٤ π

(ب) ص = ٢ حتا س − قا س ، س = ١/٣ π

الحل

(أ) ∵ ص = ٣ − طتا^٢ س ∴ ص/ = −٢ طتاس × (− قتا^٢ س) = ٢ طتا س قتا^٢ س

، عند : س = ١/٤ π فإن : ص = ٣ − طتا^٢ ١/٤ π = ٣ − ١ = ٢

، ميل المماس = ٢ طتا ١/٤ π قتا^٢ ١/٤ π = ٢ × ١ × (√٢)^٢ = ٤

∴ ميل العمودى = − ١/٤ ∴ عند النقطة (١/٤ π ، ٢) فإن :

معادلة المماس هى : ص − ٢ = ٤ × (س − ١/٤ π)

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = (− ١/٤) × (س − ١/٤ π)

(ب) ∵ ص = ٢ حتا س − قا س ∴ ص/ = − ٢ حا س − قا س طا س

، عند : س = ١/٣ π فإن :

ص = ٢ حتا ١/٣ π − قا ١/٣ π = ٢ × ١/٢ − ٢ = ١ − ٢ = −١

، ميل المماس = − ٢ حا ١/٣ π − قا ١/٣ π طا ١/٣ π

= − ٢ × √٣/٢ − ٢ × √٣ = − ٣ √٣

∴ ميل العمودى = ١/(٣ √٣) ∴ عند النقطة (١/٣ π ، −١) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ١ = (− ٣ √٣) × (س − ١/٣ π)

، معادلة العمودى هى : ص + ١ = ١/(٣ √٣) × (س − ١/٣ π)

**(٣)** أوجد معادلتى المماس و العمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط المعطاة :

(أ) س$^2$ + ص$^2$ = ٥٢ عند النقطة ( ٤ ، − ٦ )

(ب) س$^2$ + ٥ س ص + ص$^2$ = ٧ عند النقطة ( − ١ ، − ١ )

(حـ) ص$^2$ ( ١ + س$^2$ ) = ٨ عند النقطة ( − ١ ، ٢ )

(ء) ( حا س + حتا س ) ص = حتا$^2$ س عند س = $\frac{١}{٢}$ π

**الحل**

(أ) ∵ س$^2$ + ص$^2$ = ٥٢ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س + ٢ ص ص$'$ = ٠ ∴ س + ص ص$'$ = ٠ و منها : ص$'$ = − $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

∴ عند النقطة ( ٤ ، − ٦ ) فإن : ميل المماس = − $\frac{٤}{-٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

، ميل العمودى = − $\frac{٣}{٢}$ ،

معادلة المماس هى : ص + ٦ = $\frac{٢}{٣}$ × ( س − ٤ )

∴ ٣ ص + ١٨ = ٢ س − ٨ أى : ٢ س − ٣ ص − ٢٦ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ٦ = ( − $\frac{٣}{٢}$ ) × ( س − ٤ )

∴ ٢ ص + ١٢ = − ٣ س + ١٢ أى : ٣ س + ٢ ص = ٠

(ب) ∵ س$^2$ + ٥ س ص + ص$^2$ = ٧ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س + ٥ ص + ٥ س ص$'$ + ٢ ص ص$'$ = ٠

∴ ص$'$ ( ٥ س + ٢ ص ) = − ( ٢ س + ٥ ص )

و منها : ص$'$ = − $\frac{\text{٢ س + ٥ ص}}{\text{٥ س + ٢ ص}}$ ∴ عند النقطة ( − ١ ، − ١ ) فإن :

ميل المماس = − $\frac{٢ \times (-١) + ٥ \times (-١)}{٥ \times (-١) + ٢ \times (-١)}$ = − $\frac{-٧}{-٧}$ = − ١

، ميل العمودى = ١ ، معادلة المماس هى : ص + ١ = ( − ١ ) × ( س + ١ )

∴ ص + ١ = − س − ١ أى : س + ص + ٢ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ١ = ١ × ( س + ١ )

∴ ص + ١ = س + ١ أى : س − ص = ٠

(حـ) ∵ ص$^2$ ( ١ + س$^2$ ) = ٨ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص$^2$ × ٢ س + ( ١ + س$^2$ ) × ٢ ص ص$'$ = ٠

و منها : ص$'$ = $\frac{-\text{س ص}^2}{\text{ص ( ١ + س}^2\text{ )}}$ ∴ عند النقطة ( − ١ ، ٢ ) فإن :

ميل المماس = $\frac{-(-١) \times ٤}{٢ (١ + ١)}$ = ١ ، ميل العمودى = − ١ ،

معادلة المماس هى : ص − ٢ = ١ × ( س + ١ )

∴ ص − ٢ = س + ١ أى : س − ص + ٣ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ( − ١ ) × ( س + ١ )

∴ ص − ٢ = − س − ١ أى : س + ص − ١ = ٠

(ء) ∵ ( حا س + حتا س ) ص = حتا$^2$ س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

( حا س + حتا س ) ص$'$ + ( حتا س − حا س ) ص

= ٢ حتا س × ( − حا س ) = − حا ٢ س

∴ ( حا س + حتا س ) ص$'$ = − حا ٢ س − ( حتا س − حا س ) ص

و منها : ص$'$ = $\frac{\text{− حا ٢ س − ( حتا س − حا س ) ص}}{\text{حا س + حتا س}}$

∴ عند س = $\frac{١}{٢}$ π فإن : ( حا $\frac{١}{٢}$ π + حتا $\frac{١}{٢}$ π ) ص = حتا$^2$ $\frac{١}{٢}$ π

∴ ( ١ + ٠ ) ص = ٠ ∴ ص = ٠ ،

ميل المماس = $\frac{\text{− حا } π \text{ − ( حتا } \frac{١}{٢} π \text{ − حا } \frac{١}{٢} π \text{ ) × ٠}}{\text{حا } \frac{١}{٢} π \text{ + حتا } \frac{١}{٢} π}$ = ٠

، ميل العمودى = غير معرف ، ∴ عند النقطة ( $\frac{١}{٢}$ π ، ٠ ) فإن :

معادلة المماس هى : ص = ٠ ، معادلة العمودى هى : س = $\frac{١}{٢}\pi$

**(٤)** أوجد معادلتى المماس و العمودى لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة :

(أ) س = ن$^{٢}$ + ٤ ن ، ص = ٢ ن$^{٢}$ عند : ن = ١

(ب) س = قا $\theta$ ، ص = طا $\theta$ عند : $\theta$ = $\frac{١}{٦}\pi$

الحل

(أ) ∵ س = ن$^{٢}$ + ٤ ن ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٢ ن + ٤

، ∵ ص = ٢ ن$^{٢}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٤ ن

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{\text{٢ ن + ٤}}{\text{٤ ن}}$ ، عند : ن = ١ فإن :

ميل المماس = $\frac{\text{٢ × ١ + ٤}}{\text{٤ × ١}}$ = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$ ، ميل العمودى = − $\frac{٣}{٢}$ ،

س = ١ + ٤ = ٥ ، ص = ١ × ٢ = ٢

∴ عند النقطة ( ٥ ، ٢ ) فإن :

معادلة المماس هى : ص − ٢ = $\frac{٢}{٣}$ × ( س − ٥ )

∴ ٣ ص − ٦ = ٢ س − ١٠ أى : ٢ س − ٣ ص − ٤ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ( − $\frac{٣}{٢}$ ) × ( س − ٥ )

∴ ٢ ص − ٤ = − ٣ س + ١٥ أى : ٣ س + ٢ ص − ١٩ = ٠

(ب) ∵ س = قا $\theta$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta}$ = قا $\theta$ طا $\theta$

، ∵ ص = طا $\theta$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta}$ = قا$^{٢}$ $\theta$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta}$ ÷ $\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta}$ = $\frac{\text{قا}^{٢}\theta}{\text{قا}\theta\ \text{طا}\theta}$ = $\frac{\text{قا}\theta}{\text{طا}\theta}$ = $\frac{١}{\text{حتا}\theta}$ × $\frac{\text{حتا}\theta}{\text{حا}\theta}$

= $\frac{١}{\text{حا}\theta}$ = قتا $\theta$ و عندما : $\theta$ = $\frac{١}{٦}\pi$ فإن :

س = قا $\theta$ = قا $\frac{١}{٦}\pi$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ص = طا $\theta$ = طا $\frac{١}{٦}\pi$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

، ميل المماس = قتا $\frac{١}{٦}\pi$ = ٢ ، و ميل العمودى = − $\frac{١}{٢}$

∴ عند النقطة ( $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ) فإن :

معادلة المماس هى : ص − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٢ × ( س − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ )

∴ $\sqrt{٣}$ ص − ١ = ٢ $\sqrt{٣}$ س − ٤ أى : ٢ $\sqrt{٣}$ س − $\sqrt{٣}$ ص − ٣ = ٠

أى بالقسمة ÷ $\sqrt{٣}$ ينتج : ٢ س − ص − $\sqrt{٣}$ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ( − $\frac{١}{٢}$ ) × ( س − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ )

∴ ٢ $\sqrt{٣}$ ص − ٢ = − $\sqrt{٣}$ س + ٢

أى : $\sqrt{٣}$ س + ٢ $\sqrt{٣}$ ص − ٤ = ٠

**(٥)** إذا كانت النقطة ( ٤ ، − ٢ ) تنتمى للمنحنى :

س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٢ ل س + ١٢ = ٠ . أوجد قيمة ل

ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة

الحل

∵ النقطة ( ٤ ، − ٢ ) تنتمى للمنحنى : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٢ ل س + ١٢ = ٠

∴ فهى تحقق معادلته أى أن : ١٦ + ٤ − ٨ ل + ١٢ = ٠

∴ ٣٢ − ٨ ل = ٠ و منها : ل = ٤ ،

معادلة المنحنى هى : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٨ س + ١٢ = ٠

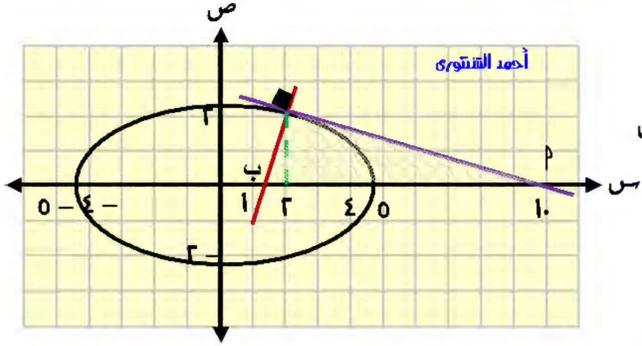
∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج : ٢ س + ٢ ص ص$'$ − ٨ = ٠

و منها : ص$'$ = $\frac{\text{٤ − س}}{\text{ص}}$ ∴ عند النقطة ( ٤ ، − ٢ ) فإن :

ميل المماس = $\frac{\text{٤ − ٤}}{\text{− ٢}}$ = ٠ ، معادلة المماس هى : ص + ٢ = ٠ .

(٦) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات و المماس و العمودى عليه للمنحنى : س² + ٤ ص² = ٢٠ عند النقطة ( ٢ ، ٢ )

**الحل**




∵ س² + ٤ ص² = ٢٠

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س + ٨ ص ص′ = ٠

و منها : ص′ = $\frac{-س}{٤ص}$

∴ عند النقطة ( ٢ ، ٢ )

فإن : ميل المماس = $\frac{-٢}{٤ \times ٢}$ = − $\frac{١}{٤}$ ، ميل العمودى = ٤ ،

معادلة المماس هى : ص − ٢ = ( − $\frac{١}{٤}$ ) × ( س − ٢ )

∴ ٤ ص − ٨ = − س + ٢ أى : س + ٤ ص − ١٠ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ٤ × ( س − ٢ )

∴ ص − ٢ = ٤ س − ٨ أى : ٤ س − ص − ٦ = ٠

بفرض أن : المماس يقطع محور السينات فى النقطة أ ( ل ، ٠ )

∴ بالتعويض فى معادلة المماس ينتج : ل − ١٠ = ٠ و منها : ل = ١٠

أى أن : المماس يقطع محور السينات فى النقطة أ ( ١٠ ، ٠ )

، بفرض أن : العمودى على المماس يقطع محور السينات فى النقطة ب ( ل ، ٠ )

∴ بالتعويض فى معادلة العمودى ينتج : ٤ ل − ٦ = ٠ و منها : ل = $\frac{٣}{٢}$

أى أن : العمودى يقطع محور السينات فى النقطة ب ( $\frac{٣}{٢}$ ، ٠ )

∴ أ ب = | ١٠ − $\frac{٣}{٢}$ | = $\frac{١٧}{٢}$ وحدة طول

، و من الشكل : ارتفاع المثلث المطلوب = ٢ وحدة طول

∴ مساحة المثلث المطلوب = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١٧}{٢}$ × ٢ = $\frac{١٧}{٢}$ ( ٨,٥ ) وحدة مربعة

(٧) أثبت أن المنحنيين : ( س − ١ )² + ص² = ٢ ، ( س + ١ )² + ص² = ٢ يتقاطعان على التعامد ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع

**الحل**

∵ معادلة المنحنى الأول هى : ص² = ٢ − ( س − ١ )²

، معادلة المنحنى الثانى هى : ص² = ٢ − ( س + ١ )²

∴ لايجاد نقط التقاطع نضع : ٢ − ( س − ١ )² = ٢ − ( س + ١ )²

∴ − س² + ٢ س − ١ = − س² − ٢ س − ١

∴ ٤ س = ٠ ∴ س = ٠ ، بالتعويض فى معادلة المنحنى الأول ينتج :

ص² = ٢ − ( ٠ − ١ )² = ٢ − ١ = ١ و منها : ص = ١ أ، ص = −١

∴ نقط التقاطع هى : ( ٠ ، ١ ) ، ( ٠ ، −١ )

، باشتقاق معادلة المنحنى الأول بالنسبة إلى س ينتج :

٢ ص ص′ = −٢ × ( س − ١ ) و منها : ص′ = $\frac{-س + ١}{ص}$

، باشتقاق معادلة المنحنى الأول بالنسبة إلى س ينتج :

٢ ص ص′ = −٢ × ( س + ١ ) و منها : ص′ = $\frac{-س - ١}{ص}$

، ∵ عند النقطة ( ٠ ، ١ ) : ميل المماس للمنحنى الأول ( $م_١$ ) = ١

، ميل المماس للمنحنى الثانى ( $م_٢$ ) = −١

، ∵ $م_١ \times م_٢$ = ١ × −١ = −١ ∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد ،

معادلة المماس للمنحنى الأول هى : ص − ١ = ١ × ( س − ٠ )

∴ ص − ١ = س أى : س − ص + ١ = ٠

معادلة المماس للمنحنى الثانى هى : ص − ١ = ( − ١ ) × ( س − ٠ )

∴ ص − ١ = − س أى : س + ص − ١ = ٠

، عند النقطة ( ٠ ، − ١ ) : ميل المماس للمنحنى الأول ( $م_1$ ) = − ١

، ميل المماس للمنحنى الثانى ( $م_2$ ) = ١

، ∵ $م_1 \times م_2$ = − ١ × ١ = − ١ ∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد ،

معادلة المماس للمنحنى الأول هى : ص + ١ = ( − ١ ) × ( س − ٠ )

∴ ص + ١ = − س أى : س + ص + ١ = ٠

معادلة المماس للمنحنى الثانى هى : ص + ١ = ١ × ( س − ٠ )

∴ ص + ١ = س أى : س − ص − ١ = ٠

## ١ − ٥ المعدلات الزمنية المرتبطة

إذا كانت : ص = د ( س ) ، س تتغير تبعاً لتغير الزمن ن

فإن : ص تتغير أيضاً تبعاً لتغير الزمن ن

أى أن : ص دالة الدالة فى الزمن ن و يكون :

$$\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن}$$

و تربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س ( $\frac{ءس}{ءن}$ )

بالمعدل الزمنى لتغير ص ( $\frac{ءص}{ءن}$ )

**ملاحظات :**

(١) إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن فإن المعدل يكون موجباً

(٢) إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن فإن المعدل يكون سالباً

(٣) بعض الأفعال التى تدل على أن المعدل موجباً :

يتزايد ، يبتعد ، يتمدد ، يصب ، يتراكم ، ....

(٤) بعض الأفعال التى تدل على أن المعدل سالباً :

يتناقص ، يقترب ، ينكمش ، يتسرب ، ينصهر ، ....

(٥) إذا كانت : $س_0$ القيمة الابتدائية للمتغير س عند ( ن = ٠ )

، $\frac{ءس}{ءن}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ن ، س قيمة المتغير

بعد س زمن ن فإن : س = $س_0$ + $\frac{ءس}{ءن}$ × ن

أحمد الشتوى

**خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :**

**(١)** تحديد المعطى و المطلوب مع الرسم إن أمكن

**(٢)** إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات

**(٣)** اشتقاق طرفى العلاقة بالنسبة للزمن

**(٤)** التعويض بالمعطى لإيجاد المطلوب

**ملاحظات :**

**(١)** العلاقة الرياضية التى تربط بين المتغيرات قد تكون :
محيط أو مساحة شكل هندسى ، المساحة الجانبية أو الكلية أو حجم مجسم ، تناسب أضلاع مثلثين متشابهين ، .....

**(٢)** العلاقة الرياضية قد تربط بين أكثر من متغيرين

**إجابة تعبير شفهى صفحة ٢٢**

أى المعدلات التالية يكون موجباً ؟
( تمدد – انكماش – اقتراب – تباعد – صب – تسرب – انصهار – تراكم – تناقص – تزايد )

**الحل**

المعدلات الموجبة هى : ( تمدد – تباعد – صب – تراكم – تزايد )
أما المعدلات ( انكماش – اقتراب – تسرب – انصهار – تناقص )
فهى : تناقصية أى : سالبة

**إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٢٣**

مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠,٠٢ سم / د ، و تزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠,٧٢ سم$^{٢}$ / د ، أوجد :
طول حرف المكعب فى هذه اللحظة و معدل الزيادة فى حجمه حينئذ

**الحل**

نفرض أن : طول حرف المكعب = ل ∴ مساحة سطحه ( م ) = ٦ ل$^{٢}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٢ \text{ ل } \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

∴ ٠,٧٢ = ١٢ ل × ٠,٠٢ و منها : ل = ٣ سم

، حجم المكعب ( ح ) = ل$^{٣}$ ∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٣ \text{ ل}^{٢} \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

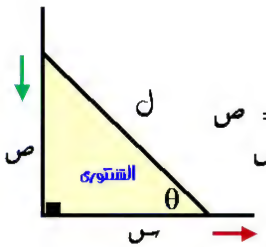
∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ٣ × ٩ × ٠,٠٢ = ٠,٥٤ سم$^{٣}$ / د

∴ حجم المكعب يتزايد بمعدل ٠,٥٤ سم$^{٣}$ / د

**إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٢٤**

يرتكز على أرض أفقية بطرفه العلوى و طرفه العلوى على حائط رأسى إذا أنزلق الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / ث
أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم و الأرض تساوى $\frac{١}{٣}\pi$

**الحل**




نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الآرض = ص
، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س
، طول السلم = ل سم حيث : ل ثابت
، قياس الزاوية بين السلم و الأرض = θ

∴ عندما : θ = $\frac{١}{٣}\pi$ فإن : ص = $\sqrt{٣}$ س " المثلث ثلاثينى ستينى "

∴ من هندسة الشكل : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ل$^{٢}$ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$٢ \text{ س } \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢ \text{ ص } \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$ ، عندما : θ = $\frac{١}{٣}\pi$

∴ ٢ س × ٣٠ + ٢ × $\sqrt{٣}$ س $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٠

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = − ١٠ $\sqrt{٣}$ سم / ث

أى أن : الطرف العلوى ينزلق لأسفل بمعدل ١٠ $\sqrt{٣}$ سم / ث

## إجابة تفكير ناقد صفحة ٢٤

انطلق صاروخ كتلته ١٥٠ طناً و كان ينفث الوقود بمعدل ٢٠٠ كجم / ث
أوجد كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من لحظة إطلاقه

**الحل**

كتلة الصاروخ النهائية ( ك ) = $ك_. + \frac{ءك}{ءن} \times ن$ ∴ بعد ٣٠ ثانية فإن :

ك = ١٥٠ × ١٠٠٠ + ( −٢٠٠ ) × ٣٠ = ١٥٠٠٠٠ − ٦٠٠٠ = ٩٠٠٠ كجم = ٩ طن

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٥

جسم معدنى على شكل متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها يتزايد بمعدل ١ سم / د ، و ارتفاعه يتناقص بمعدل ٢ سم / د
أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥ سم ، و ارتفاعه ٢٠ سم ،
بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات عن الزيادة

**الحل**

بفرض أن : طول ضلع قاعدة متوازى المستطيلات = س ، ارتفاعه = ص ، حجمه = ع بعد زمن قدره ن ثنية حيث : س ، ص ، ع دوال فى الزمن

∴ س = ٥ + ن ، ص = ٢٠ − ٢ ن

∴ ع = $س^2$ × ص = $(٥ + ن)^2$ ( ٢٠ − ٢ ن )

= ٥٠٠ + ١٥٠ ن − ٢ $ن^3$ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{ءع}{ءن}$ = ١٥٠ − ٦ $ن^2$ و عندما : س = ٥ ، ص = ٢٠ فإن : ن = ٠

∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = ١٥٠ − ٦ × ٠ = ١٥٠ $سم^3$ / ث

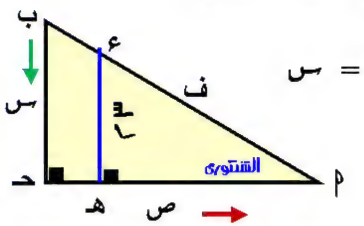
، عندما : $\frac{ءع}{ءن}$ = ٠ فإن : ١٥٠ − ٦ $ن^2$ = ٠ و منها : ن = ٥

أى أن : يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات بعد ٥ ث

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٥

ماسورة مياه طرفاها أ ، ب ، و طولها ٥ أمتار ، تستند بطرفها أ على أرض أفقية و بإحدى نقطها ء على سور رأسى ارتفاعه ٣ أمتار ، فإذا انزلق الطرف أ مبتعداً عن السور بمعدل $\frac{٥}{٤}$ متر / د
أوجد معدل هبوط الطرف ب عندما تصل إلى حافة السور

**الحل**




نفرض أن : أ ء = ف ، أ هـ = ص ، ب حـ = س

من هندسة الشكل : $ف^2$ = $ص^2$ + ٩ (١)

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$

عندما تصل الماسورة إلى حافة السور ( تكون ب عند ء ) فإن : ف = ٥ م

∴ من (١) : ص = ٤ م ∴ ٢ × ٥ $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ × ٤ × $\frac{٥}{٤}$ = ١ م / د

، من هندسة الشكل : △ أ ب حـ ~ △ أ ء هـ

∴ $\frac{ف}{٥}$ = $\frac{٣}{س}$ و منها : ف س = ١٥

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : ف $\frac{ءس}{ءن}$ + س $\frac{ءف}{ءن}$ = ٠

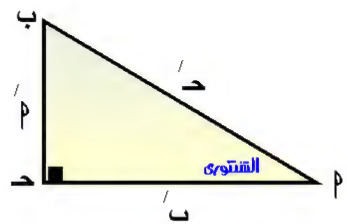
∴ ٥ $\frac{ءس}{ءن}$ + ٣ × ١ = ٠ و منها : $\frac{ءس}{ءن}$ = − $\frac{٣}{٥}$ م / د

أى أن : الطرف ب يهبط بمعدل $\frac{٣}{٥}$ م / د عندما تصل الماسورة إلى حافة السور

## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٢٦

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ ، مساحته ثابتة و تساوى ٢٤ $سم^2$
إذا كان معدل تغير ب/ يساوى ١ سم / ث فأوجد معدل تغير كل من أ/ ، ق ( ∠ أ ) عند اللحظة التى يكون فيها ب/ يساوى ٨ سم

**الحل**




∵ مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ أَ بَ

∴ ٢٤ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ ∴ ٤٨ = أَ بَ (١)

و عندما : بَ = ٨ سم فإن :

أَ = ٦ سم ، حَ = ١٠ سم ، باشتقاق (١) بالنسبة للزمن ن ينتج :

أَ $\frac{دبَ}{دن}$ + بَ $\frac{دأَ}{دن}$ = ٠ ∴ ٦ × ١ + ٨ × $\frac{دأَ}{دن}$ = ٠

و منها : $\frac{دأَ}{دن}$ = − ٠,٧٥ سم / ث

، ∵ طا أ = $\frac{أَ}{بَ}$ ∴ بالاشتقاق (١) بالنسبة للزمن ن ينتج :

قا² أ $\frac{دأ}{دن}$ = $\frac{بَ \frac{دأَ}{دن} - أَ \frac{دبَ}{دن}}{بَ^2}$

∴ $\frac{١٠٠}{٦٤}$ × $\frac{دأ}{دن}$ = $\frac{٨ × (− ٠,٧٥) − ٦ × ١}{٦٤}$ و منها : $\frac{دأ}{دن}$ = − ٠,١٢ ءْ / ث

**إجابة تفكير ناقد صفحة ٢٦**

إذا كان س ( قياس زاوية بالتقدير الدائرى ) يتزايد بمعدل زمنى ثابت فسر لماذا ؟ :

(أ) يتزايد الجيب و الظل بنفس المعدل عندما س = ٠ .

(ب) يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب عندما س = $\frac{1}{3}\pi$

(حـ) يتناقص جيب التمام بمعدل $\frac{3}{8}$ مرة قدر تزايد الظل عندما س = $\frac{1}{6}\pi$

**الحل**

$\frac{د}{دن}$ حا س = حتا س $\frac{دس}{دن}$ ، $\frac{د}{دن}$ طا س = قا² س $\frac{دس}{دن}$ ،

$\frac{د}{دن}$ حتا س = − حا س $\frac{دس}{دن}$

(أ) عندما : س = ٠ .

فإن : $\frac{د}{دن}$ حا س = حتا ٠ × $\frac{دس}{دن}$ = ١ × $\frac{دس}{دن}$

، $\frac{د}{دن}$ طا س = قا² ٠ × $\frac{دس}{دن}$ = ١ × $\frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{د}{دن}$ حا س = $\frac{د}{دن}$ طا س أى أن :

يتزايد الجيب و الظل بنفس المعدل عندما س = ٠ .

(ب) عندما : س = $\frac{1}{3}\pi$

فإن : $\frac{د}{دن}$ حا س = حتا $\frac{1}{3}\pi$ × $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{دس}{دن}$ = ٢ $\frac{د}{دن}$ حا س

، $\frac{د}{دن}$ طا س = قا² $\frac{1}{3}\pi$ × $\frac{دس}{دن}$ = ٤ × $\frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{د}{دن}$ طا س = ٨ $\frac{د}{دن}$ حا س أى أن :

يتزايد الظل بمعدل ٨ مرات قدر تزايد الجيب عندما س = $\frac{1}{3}\pi$

(حـ) عندما : س = $\frac{1}{6}\pi$

فإن : $\frac{د}{دن}$ حتا س = − حا $\frac{1}{6}\pi$ × $\frac{دس}{دن}$ = − $\frac{1}{2}$ × $\frac{دس}{دن}$

، $\frac{د}{دن}$ طا س = قا² $\frac{1}{6}\pi$ × $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{4}{3}$ × $\frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{3}{4}$ $\frac{د}{دن}$ طا س

∴ $\frac{د}{دن}$ حتا س = − $\frac{3}{8}$ $\frac{د}{دن}$ طا س أى أن :

∴ يتناقص جيب التمام بمعدل $\frac{3}{8}$ مرة قدر تزايد الظل عندما س = $\frac{1}{6}\pi$

## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٢٧

فى المثال السابق " فى دائرة كهربية مغلقة إذا كان جـ فرق الجهد ( فولت ) ، ت شدة التيار ( أمبير ) ، م المقاومة ( أوم ) ، و تزايد فرق الجهد بمعدل ١ فولت / ث ، و تناقصت شدة التيار أمبير $\frac{١}{٢}$ أمبير / ث ، أوجد معدل المقاومة فى اللحظة التى يكون فيها :

جـ = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير "

أحسب معدل المقاومة إذا كانت شدة التيار تتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ أمبير / ث

الحل

جـ = ت × م ، باشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$$\frac{ء جـ}{ء ن} = ت \times \frac{ء م}{ء ن} + م \times \frac{ء ت}{ء ن}$$

$$١ = ٢ \times \frac{ء م}{ء ن} + ٦ \times \frac{١}{٣} \qquad \therefore ١ = ٢ \times \frac{ء م}{ء ن} + ٢$$

$$\therefore ٢ \times \frac{ء م}{ء ن} = -١ \qquad \therefore \frac{ء م}{ء ن} = -\frac{١}{٢}$$

## حل تمارين ( ١ – ٥ ) صفحة ٢٧ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

**(١)** إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم / ث

فإن : محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل .... سم / ث

(أ) $\frac{١}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) ٨

**(٢)** ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم$^{٣}$ / ث فإن :

معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم$^{٣}$ هو : .... سم / ث

(أ) $-\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) $-\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٦}$

**(٣)** جسم يتحرك على المنحنى : ص$^{٢}$ = س$^{٣}$ ، إذا كان :

$\frac{ء س}{ء ن} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند ص = – ١ فإن :

$\frac{ء ص}{ء س}$ عند هذه اللحظة يساوى .... وحدة / ث

(أ) $-\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

**(٤)** إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د ( س ) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$

و كان الاحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث

فإن : معدل تغير احداثيها الصادى يساوى .... وحدة / ث

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

الحل

**(١)** نفرض أن : طول نصف قطر الدائرة = نق ، محيطها = م

∴ $\text{م} = ٢\pi\,\text{نق}$ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

، $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = ٢\pi \times \frac{٤}{\pi} = ٨$ سم / ث

∴ محيط الدائرة يزيد بمعدل ٨ سم / ث

(٢) نفرض أن : طول حرف المكعب = ل ∴ حجمه ( ع ) = $\text{ل}^٣$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٣\,\text{ل}^٢ \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ (1)

، ∵ ع = ٨ $\text{سم}^٣$ فإن : ل = ٢ سم ، ∵ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -١$ $\text{سم}^٣$ / ث

∴ $-١ = ٣ \times ٤ \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ و منها : $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -\frac{١}{١٢}$ سم / ث

∴ طول حرف المكعب يتناقص بمعدل $\frac{١}{١٢}$ سم / ث

(٣) ∵ $\text{ص}^٢ = \text{س}^٣$ ∴ ص = −١ فإن : $\text{س}^٣ = ١$ أى أن : س = ١

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $٢\,\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣\,\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

∴ $٢ \times (-١) \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣ \times ١ \times \frac{١}{٢}$ و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -\frac{٣}{٤}$ وحدة / ث

(٤) ∵ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times -\frac{١}{٣}$

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -\frac{٣}{٢}$ وحدة / ث

∴ الاحداثى الصادى يتناقص بمعدل $\frac{٣}{٢}$ وحدة / ث

(٥) تتحرك نقطة على منحنى معادلته :

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٤\,\text{س} + ٢\,\text{ص} - ٦ = ٠$ . فإذا كان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة ( ٣ ، ١ ) يساوى ٤ وحدات / ث ، أوجد معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن

الحل

∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ - ٤\,\text{س} + ٢\,\text{ص} - ٦ = ٠$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$٢\,\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\,\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - ٤ \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$

، ∵ عند النقطة ( ٣ ، ١ ) $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٤$ وحدات / ث

∴ $٢ \times ٣ \times ٤ + ٢ \times ١ \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - ٤ \times ٤ + ٢ \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٠,٨$ ∴ الاحداثى الصادى يتناقص بمعدل ٠,٨ وحدة / ث

(٦) سقط حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤ سم / ث ، أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة فى نهاية ٥ ثوان

الحل

بفرض أن : طول نصف قطر الموجة = نق ، مساحة سطحها = م

∴ $\text{م} = \pi\,\text{نق}^٢$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi\,\text{نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ ، بعد : ٥ ثوان فإن :

$\text{نق} = \text{نق}_. + \frac{\text{دنق}}{\text{دن}} \times \text{ن} = ٠ + ٤ \times ٥ = ٢٠$ سم

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\pi \times ٢٠ \times ٤ = ١٦٠\pi$ $\text{سم}^٢$ / ث

أى أن : مساحة سطح الموجة تتزايد بمعدل $١٦٠\pi$ $\text{سم}^٢$ / ث

(٧) صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش بالبرودة ، وجد أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم / ث ، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم

الحل

بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ل ، مساحة سطحها = م

، ∵ الصفيحة على شكل سداسى منتظم ∴ $\text{م} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣}\,\text{ل}^٢$

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} \times ٢\,\text{ل} \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

، عندما : ل = ١٠ سم ، $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = -٠,١$ سم / ث

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{٣} \times ٢ \times ١٠ \times (-٠{,}١) = -٣\sqrt{٣}$

أى أن : مساحة الصفيحة تتناقص بمعدل $٣\sqrt{٣}$ سم$^{٢}$ / ث

**(٨)** كتلة معلومة من غاز درجو حرارتها ثابتة ، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢ سم$^{٣}$ / ث ، فإذا كان الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم و أن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم / سم$^{٣}$ عندما يكون الحجم ٢٥٠ سم$^{٣}$ ، أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠ سم$^{٣}$

الحل

بفرض أن : الضغط = ض ، الحجم = ع ، $\because$ ض $\propto \frac{١}{\text{ع}}$

$\therefore$ ض $= \frac{\text{ك}}{\text{ع}}$ حيث : ك ثابت $\neq ٠$

، $\because$ ض = ١٠٠٠ ث جم / سم$^{٣}$ ، ، $\because$ ع = ٢٥٠ سم$^{٣}$

$\therefore ١٠٠٠ = \frac{\text{ك}}{٢٥٠}$ و منها : ك = ٢٥٠٠٠٠ $\therefore$ ض $= \frac{٢٥٠٠٠٠}{\text{ع}}$

$\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءض}}{\text{ءن}} = -\frac{٢٥٠٠٠٠}{\text{ع}^{٢}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

، عندما ع = ١٠٠ سم$^{٣}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -٢$ سم$^{٣}$ / ث

$\therefore \frac{\text{ءض}}{\text{ءن}} = -\frac{٢٥٠٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times (-٢) = ٥٠$ ث جم / سم$^{٣}$ / ث

أى أن : الضغط يتزايد بمعدل ٥٠ ث جم / سم$^{٣}$ / ث

**(٩)** يتسرب الغاز من بالون كرى بمعدل ٢٠ سم$^{٣}$ / ث ، أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠ سم ، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجى للبالون فى هذه اللحظة

الحل

بفرض أن : طول نصف قطر البالون = نق ، حجمه = ع
، مساحة السطح الخارجى = م

، $\because$ البالون كرى الشكل $\therefore$ ع $= \frac{٤}{٣}\pi$ نق$^{٣}$

$\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣$ نق$^{٢}$ $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

، $\because$ نق = ١٠ سم ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -٢٠$ سم$^{٣}$ / ث

$\therefore -٢٠ = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ \times ١٠٠ \times \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ و منها : $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٢٠\pi}$ سم / ث

أى أن : طول نصف قطر البالون يتناقص بمعدل $\frac{-١}{٢٠\pi}$ سم / ث

، م $= ٤\pi$ نق$^{٢}$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٨\pi$ نق $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ ، $\because$ نق = ١٠ سم ، $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٢٠\pi}$ سم / ث

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٨\pi \times ١٠ \times \frac{-١}{٢٠\pi} = -٤$ سم$^{٢}$ / ث

أى أن : مساحة السطح الخارجى للبالون تتناقص بمعدل ٤ سم$^{٢}$ / ث

**(١٠)** سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى و بطرفه السفلى على أرض أفقية ، إذا تحرك الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ سم / د عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار ، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم ، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم و الأرض عند هذه اللحظة

الحل




نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الآرض = ص
، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س

$\therefore$ من هندسة الشكل : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٥٠٠٠٠ (١)

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$ ، عندما : ص = ٤٠٠ سم

∴ من (أ) : س = ٣٠٠ سم ، ∵ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٤ سم / د

∴ ٢ × ٣٠٠ × ٤ + ٢ × ٤٠٠ × $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠ و منها : $\frac{ءص}{ءن}$ = − ٣ سم / د

أى أن : الطرف العلوى ينزلق لأسفل بمعدل ٣ سم / د

و بفرض أن : θ قياس الزاوية بين السلم و الأرض

∴ من هندسة الشكل : حا θ = $\frac{ص}{٥٠٠}$ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

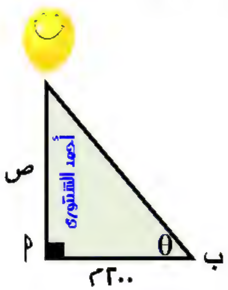
حتا θ $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٥٠٠}$ × $\frac{ءص}{ءن}$

، عندما : ص = ٤٠٠ سم فإن : حتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ = − ٣ سم / د

∴ $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٥٠٠}$ × − ٣ و منها : $\frac{ءθ}{ءن}$ = − ٠,٠١ ^ء / د أى أن :

قياس الزاوية بين السلم و الأرض يتناقص بمعدل ٠,٠١ زاوية نصف قطرية / د

**(١١)** يرتفع بالون رأسياً لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض ، وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنطقة أ و على بعد ٢٠٠ متر منها ، عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{١}{٤}$ π و تتزايد بمعدل ٠,١٢ ^ء / د أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة



الحل

نفرض أن : ارتفاع البالون عن الآرض = ص

∴ من هندسة الشكل : طا θ = $\frac{ص}{٢٠٠}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

قا^٢ θ $\frac{ءθ}{ءن}$ = $\frac{١}{٢٠٠}$ × $\frac{ءص}{ءن}$ ،

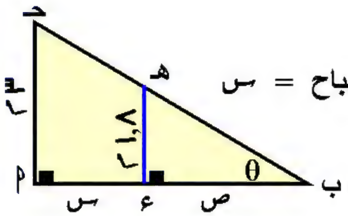
عندما θ = $\frac{١}{٤}$ π ، $\frac{ءθ}{ءن}$ = ٠,١٢ ^ء / د فإن :

قا^٢ $\frac{١}{٤}$ π × $\frac{١٢}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٢٠٠}$ × $\frac{ءص}{ءن}$ ∴ ( $\sqrt{٢}$ )^٢ × $\frac{١٢}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٢٠٠}$ × $\frac{ءص}{ءن}$

و منها : $\frac{ءص}{ءن}$ = ٤٨ م / د أى أن : البالون يرتفع بمعدل ٤٨ م / د

**(١٢)** يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م / ث ، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل ، و إذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل و قمة المصباح يميل على الأرض بزاوية θ ^ء عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س متراً فأثبت أن : س = $\frac{٦}{٥}$ طتا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح

الحل



نفرض أن : طول ظل الرجل = ص ،

المسافة التى يتحركها الرجل مبتعداً عن قاعدة المصباح = س

، من هندسة الشكل : Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب هـ

∴ $\frac{س + ص}{ص}$ = $\frac{٣}{١,٨}$ = $\frac{٥}{٣}$ و منها :

٣ س + ٣ ص = ٥ ص

∴ ٣ س = ٢ ص ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٣ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ $\frac{ءص}{ءن}$ و عندما : $\frac{ءس}{ءن}$ = ١,٢ فإن :

٣ × ١,٢ = ٢ $\frac{ءص}{ءن}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ١,٨ م / ث

أى أن : طول ظل الرجل يتزايد بمعدل ١,٨ م / ث

، من هندسة الشكل : طا θ = $\frac{٣}{س + ص}$

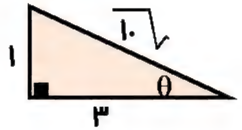
∴ ( س + ص ) طا θ = ٣ ، ∵ ٣ س = ٢ ص أى : ص = $\frac{٣}{٢}$ س

∴ ( س + $\frac{٣}{٢}$ س ) طا θ = ٣ ∴ $\frac{٥}{٢}$ س طا θ = ٣

∴ س طا θ = $\frac{٦}{٥}$ ∴ س = $\frac{٦}{٥}$ طتا θ

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{٦}{٥}$ × − قتا^٢ θ $\frac{ءθ}{ءن}$

و عندما : $\frac{ءس}{ءن}$ = ١,٢ ، س = ٣,٦



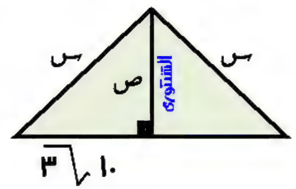

فإن : $٣,٦ \text{ طا } \theta = \frac{٦}{٥}$ ومنها : $\text{طا } \theta = \frac{١}{٣}$

$\therefore \; ١,٢ = \frac{٦}{٥} \times -\left(\frac{\sqrt{١٠}}{١}\right)^{٢} \frac{\text{ء}\theta}{\text{ء}\text{ن}}$

و منها : $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ء}\text{ن}} = -٠,١$ ء / ث

أى أن : θ تتناقص بمعدل ٠,١ زاوية نصف قطرية / د

**(١٣)** مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٣}$ سم ، إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم / ساعة ، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة




الحل

نفرض أن : طول كل من ساقى المثلث = س

ارتفاع المثلث = ص ، مساحة المثلث = م

، من هندسة الشكل : $\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} - ٣٠٠$

أى أن : $\text{ص} = (\text{س}^{٢} - ٣٠٠)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \; \text{م} = \frac{١}{٢} \times ٢٠\sqrt{٣} \times (\text{س}^{٢} - ٣٠٠)^{\frac{١}{٢}} = ١٠\sqrt{٣}\,(\text{س}^{٢} - ٣٠٠)^{\frac{١}{٢}}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = ١٠\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}(\text{س}^{٢} - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢\text{س} \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

$= ١٠\sqrt{٣}\;\text{س}\,(\text{س}^{٢} - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}} \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$

و عندما : $\text{س} = ٢٠\sqrt{٣}$ ، $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} = -٣$

$\therefore \; \frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = ١٠\sqrt{٣} \times ٢٠\sqrt{٣}\,(١٢٠٠ - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}} \times (-٣)$

$= ٦٠٠ \times \frac{١}{٣٠} \times (-٣) = -٦٠$

أى أن مساحة المثلث تتناقص بمعدل ٦٠ سم$^{٢}$ / ساعة

## حل تمارين عامة صفحة ٣٠ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

**(١)** إذا كان : $\text{ص} = ٤ \text{ قا}^{٢}\text{س}$ فإن : $\text{ص}'\left(\frac{١}{٤}\pi\right)$ يساوى ....

(أ) −٨ (ب) صفر (حـ) $٤\sqrt{٢}$ (ء) ١٦

**(٢)** إذا كان : ص = حا ٢س حتا ٢س فإن : $\text{ص}''\left(\frac{١}{٢}\pi\right)$ يساوى ....

(أ) −٤ (ب) صفر (حـ) $٤\sqrt{٢}$ (ء) ٨

**(٣)** تتحرك نقطة على المنحنى : $\text{س ص}^{٢} = ١٢$ ، عند النقطة ( ٣ ، ٢ ) يكون : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ يساوى ....

(أ) −٤ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (حـ) $-\frac{١}{٣}$ (ء) ٣

**(٤)** إذا كان : $\text{ص} = ٢\text{ن}^{٣} + ٧$ ، $\text{ع} = \text{ن}^{٢} - ٤$ فإن :
معدل تغير ص بالنسبة إلى ع يساوى ....

(أ) ٢ن (ب) ٣ن (حـ) ٦ (ء) ١٢

**(٥)** يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢ سم / د و مساحتها بمعدل ٢٠ π سم$^{٢}$ / د فإن : طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوى .... سم

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (حـ) ١٠ (ء) ٢٠

الحل

**(١)** $\because \; \text{ص} = ٤ \text{ قا}^{٢}\text{س}$ $\therefore \; \text{ص}' = ٨ \text{ قا}^{٢}\text{س طا س}$

، $\text{ص}'\left(\frac{١}{٤}\pi\right) = ٨ \text{ قا}^{٢}\frac{١}{٤}\pi \text{ طا } \frac{١}{٤}\pi = ٨ \times (\sqrt{٢})^{٢} \times ١ = ١٦$

(٢) ∵ ص = حا ٢ س حتا ٢ س = ½ × ( ٢ حا ٢ س حتا ٢ س )

= ½ حا ٤ س ∴ ص′ = ½ × ٤ حتا ٤ س = ٢ حتا ٤ س

، ص″ = ٢ × ( − ٤ حا ٤ س ) = − ٨ حا ٤ س

∴ ص″ ( ⅓ π ) = − ٨ حا ٤/٣ π = − ٨ × − √٣ / ٢ = ٤ √٣

(٣) ∵ س ص² = ١٢ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص² + ٢ س ص دص/دس = ٠ ∴ دص/دس = − ٢س/ص

، عند النقطة ( ٣ ، ٢ ) : دص/دس = − ٦/٢ = − ٣

(٤) ∵ ص = ٢ ن³ + ٧ ∴ دص/دن = ٦ ن²

، ∵ ع = ن² − ٤ ∴ دع/دن = ٢ ن

، دص/دع = دص/دن ÷ دع/دن = ٦ ن² / ٢ ن = ٣ ن

(٥) بفرض أن : طول نصف قطر الجائرى = نق ، مساحة سطحها = م

∴ م = π نق² ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

دم/دن = ٢ π نق دنق/دن ∴ ٢٠ π = ٢ π نق × ٥ و منها : نق = ٥ سم

أجب عما يأتى :

(٦) أوجد دص/دس إذا كانت ص تساوى :

(أ) س + ظتا ٢ س    (ب) ∛س + قا ٥ س

(حـ) ٢ س − ٥ حتا ( π س )²    (ء) ٢ حتا² ( π س + ١ )

(هـ) طا س ظتا س    (و) قا ٢ س طا ٢ س

الحل

(أ) ∵ ص = س + ظتا ٢ س ∴ دص/دس = ١ − ٢ قتا² ٢ س

(ب) ∵ ص = ∛س + قا ٥ س = س^⅓ + قا ٥ س

∴ دص/دس = ⅓ س^(−⅔) + قا ٥ س طا ٥ س × ٥

= ١ / ( ٣ ∛س² ) + ٥ قا ٥ س طا ٥ س

(حـ) ∵ ص = ٢ س − ٥ حتا ( π س )² = ٢ س − ٥ حتا π² س²

∴ دص/دس = ٢ − ٥ × ( − حا ( π س )² ) × ٢ π² س

= ٢ + ١٠ π² س حا ( π س )²

(ء) ∵ ص = ٢ حتا² ( π س + ١ )

∴ دص/دس = ٢ × ٢ حتا ( π س + ١ ) × ( − حا ( π س + ١ ) ) × π

= − ٢ π × ٢ حا ( π س + ١ ) حتا ( π س + ١ )

= − ٢ π حا ٢ ( π س + ١ )

(هـ) ∵ ص = طا س ظتا س = ١ ∴ دص/دس = صفر

(و) ∵ ص = قا ٢ س طا ٢ س

∴ دص/دس = قا ٢ س × طا² ٢ س × ٢ + طا ٢ س × قا ٢ س طا ٢ س × ٢

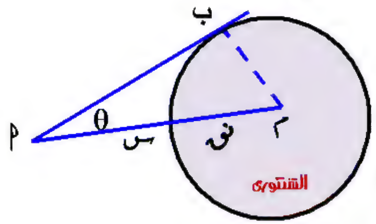
= ٢ قا ٢ س طا² ٢ س + ٢ قا² ٢ س طا ٢ س

= ٢ قا ٢ س ( طا² ٢ س + قا² ٢ س )

= ٢ قا ٢ س ( قا² ٢ س − ١ + قا² ٢ س )

= ٢ قا ٢ س ( ٢ قا² ٢ س − ١ )

(٧) فى الشكل المقابل : أ نقطة تتحرك فى المستوى ، أب مماس للدائرة م عند ب ، أم = س + نق حيث : نق طول نصف قطر الدائرة




(أ) أثبت أن : س = نق ( قتا θ − ١ )

(ب) أوجد معدل تغير س بالنسبة إلى θ عندما : θ = ١/٦ π

الحل

(أ) ∵ أب مماس للدائرة ، م ب نصف قطر فى الدائرة ∴ أب ⊥ م ب

∴ قتا θ = أم / م ب = (نق + س) / نق　　∴ نق قتا θ = نق + س

∴ نق قتا θ − نق = س　　و منها : س = نق ( قتا θ − ١ )

و بالاشتقاق بالنسبة إلى θ ينتج : ءس/ءθ = نق ( − قتا θ طتا θ )

(ب) عندما : θ = ١/٦ π فإن : ءس/ءθ = − نق قتا ١/٦ π طتا ١/٦ π

= − نق × ٢ × √٣ = − ٢ √٣ نق

(٨) أوجد ءص/ءس فى أبسط صورة لكل من :

(أ) س² − ٣ ص² + ٩ = ٠

(ب) ٥ س² + ١٢ ص³ − ٧ = ٠

(حـ) س² − ٢ س ص + ٢ ص² = ١٤

(ء) ( س − ٣ )² + ( ص + ٢ )² = ٢٥

(هـ) س ص + حا س = ٥

(و) حا س حتا ص = ١/٢

الحل

(أ) ∵ س² − ٣ ص² + ٩ = ٠　　∴ ٢ س − ٦ ص ص′ = ٠

و منها : ءص/ءس = س / (٣ ص)

(ب) ∵ ٥ س² + ١٢ ص³ − ٧ = ٠　　∴ ١٠ س + ٣٦ ص² ص′ = ٠

و منها : ءص/ءس = − ٥ س / (١٨ ص²)

(حـ) ∵ س² − ٢ س ص + ٢ ص² = ١٤

∴ ٢ س − ٢ ص − ٢ س ص′ + ٤ ص ص′ = ٠

∴ ص′ ( س − ٢ ص ) = س − ص　　و منها : ءص/ءس = (س − ص) / (س − ٢ ص)

(ء) ∵ ( س − ٣ )² + ( ص + ٢ )² = ٢٥

∴ ٢ ( س − ٣ ) + ٢ ( ص + ٢ ) ص′ = ٠

و منها : ءص/ءس = (٣ − س) / (ص + ٢)

(هـ) ∵ س ص + حا س = ٥　　∴ ص + س ص′ + حتا س = ٠

و منها : ءص/ءس = (ص + حتا س) / س

(و) ∵ حا س حتا ص = ١/٢

∴ حتا س حتا ص + حا س × ( − حا ص ) ص′ = ٠

و منها : ءص/ءس = (حتا س حتا ص) / (حا س حا ص) = طتا س طتا ص

(٩) (أ) أوجد معدل تغير ( س + ٣ ) ( س − ٢ ) بالنسبة إلى (س − ٣) / (س + ٢)

(ب) إذا كانت : د ( س ) = ٢ / (س + ١) ، ر ( س ) = ٣ س

أوجد ء/ءس [ ( د ∘ ر ) ( س ) ] عند : س = − ٢

الحل

(أ) نضع : $ص = (س + ٣)(س - ٢) = س^٢ - ٥س + ٦$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٥$ ، $ع = \frac{س - ٣}{س + ٢}$

$\therefore \frac{ءع}{ءس} = \frac{(س+٢) × ١ - (س-٣) × ١}{(س+٢)^٢} = \frac{٥}{(س+٢)^٢}$

$\therefore \frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} ÷ \frac{ءع}{ءس} = (٢س - ٥) × \frac{(س+٢)^٢}{٥}$

$= \frac{١}{٥}(٢س - ٥)(س + ٢)^٢$

(ب) نفرض أن : $ص = [(د \circ ر)(س)] = د[ر(س)]$

$= د(٣س) = \frac{٢}{٣س+١} = ٢(٣س + ١)^{-١}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢ × (-١)(٣س + ١)^{-٢} × ٣$

، عند : $س = -٢$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = -٦ × (-٥)^{-٢} = -\frac{٦}{٢٥}$

(١٠) (أ) إذا كانت : $ص = \sqrt{٢س + ٥}$ أثبت أن :

$(٢س + ٥)\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} + ٣\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٠$

(ب) إذا كانت : $س ص = حا أ س$ أثبت أن :

$س\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢\frac{ءص}{ءس} + أ^٢ س ص = ٠$

(جـ) إذا كانت : $ص = أ حتا س^٢ + ب حا س^٢$ أثبت أن :

$س\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} - \frac{ءص}{ءس} + ٤س^٣ ص = ٠$

الحل

(أ) ∵ $ص = \sqrt{٢س + ٥} = (٢س + ٥)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore ص' = \frac{١}{٢}(٢س + ٥)^{-\frac{١}{٢}} × ٢ = (٢س + ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore ص'' = -\frac{١}{٢}(٢س - ٥)^{-\frac{٣}{٢}} × ٢ = -(٢س - ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$\therefore ص''' = - × -\frac{٣}{٢}(٢س - ٥)^{-\frac{٥}{٢}} × ٢ = ٣(٢س - ٥)^{-\frac{٥}{٢}}$

∴ الطرف الأيمن $= (٢س + ٥) × ٣(٢س - ٥)^{-\frac{٥}{٢}} +$

$٣ × -(٢س - ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٣(٢س - ٥)^{-\frac{٣}{٢}} - ٣(٢س - ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$= ٠ =$ الطرف الأيسر

(ب) ∵ $س ص = حا أ س$ ∴ بالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى س ينتج :

$ص + س ص' = أ حتا أ س$ ،

$ص' + ص' + س ص'' = أ × -أ حا أ س$

$\therefore ٢ص' + س ص'' = -أ^٢ حا أ س$ ، ∵ $س ص = حا أ س$

$\therefore ٢ص' + س ص'' = -أ^٢ س ص$ و منها :

$س\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ٢\frac{ءص}{ءس} + أ^٢ س ص = ٠$

(جـ) ∵ $ص = أ حتا س^٢ + ب حا س^٢$

$\therefore ص' = -أ حا س^٢ × ٢س + ب حتا س^٢ × ٢س$

$= -٢أ س حا س^٢ + ٢ب س حتا س^٢$

$\therefore ص'' = -٢أ حا س^٢ - ٢أ س حتا س^٢ × ٢س + ٢ب حتا س^٢$

$+ ٢ب س × (-حا س^٢) × ٢س$

$= -٢أ حا س^٢ - ٤أ س^٢ حتا س^٢ + ٢ب حتا س^٢$

$- ٤ب س^٢ حا س^٢$ بالضرب × س ينتج ترتيب الحدود :

∴ س ص″ = ( − ٢ ﺃ س حا س$^{٢}$ + ٢ ب س حتا س$^{٢}$ )

− ٤ س$^{٣}$ ( ﺃ حتا س$^{٢}$ + ب حا س$^{٢}$ )

= ص′ − ٤ س$^{٣}$ ص ∴ س ص″ − ص′ + ٤ س$^{٣}$ ص = ٠ .

أى أن : س $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ − $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ س$^{٣}$ ص = ٠ .

**(١١) أوجد معادلتى المماس و العمودى للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة :**

(ﺃ) س$^{٢}$ − س ص $\sqrt{٣}$ + ٢ ص$^{٢}$ = ١٢ عند ( $\sqrt{٣}$ ، ٣ )

(ب) س حا ٢ ص = ص حتا ٢ س عند ( $\frac{١}{٤}\pi$ ، $\frac{١}{٢}\pi$ )

الحل

(ﺃ) ∵ س$^{٢}$ − س ص $\sqrt{٣}$ + ٢ ص$^{٢}$ = ١٢ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س − ص $\sqrt{٣}$ − س ص′ $\sqrt{٣}$ + ٤ ص ص′ = ٠ .

∴ ص′ ( ٤ ص − س $\sqrt{٣}$ ) = ص $\sqrt{٣}$ − ٢ س

و عند ( $\sqrt{٣}$ ، ٣ ) فإن :

ص′ ( ٤ × ٣ − $\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٣}$ ) = ٣ × $\sqrt{٣}$ − ٢ × $\sqrt{٣}$

∴ ص′ ( ١٢ − ٣ ) = ٣$\sqrt{٣}$ − ٢$\sqrt{٣}$

∴ ٩ ص′ = $\sqrt{٣}$ و منها : ميل المماس = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$

، ميل العمودى = − ٣ $\sqrt{٣}$

∴ معادلة المماس هى : ص − ٣ = $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ × ( س − $\sqrt{٣}$ )

∴ ٩ ص − ٢٧ = $\sqrt{٣}$ س − ٣ أى : $\sqrt{٣}$ س − ٩ ص + ٢٤ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص − ٣ = − ٣ $\sqrt{٣}$ × ( س − $\sqrt{٣}$ )

∴ ص − ٣ = − ٣ $\sqrt{٣}$ س + ٩ أى : ٣ $\sqrt{٣}$ س + ص − ١٢ = ٠ .

(ب) ∵ س حا ٢ ص = ص حتا ٢ س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

حا ٢ ص + ٢ س حتا ٢ ص ص′ = ص′ حتا ٢ س − ٢ ص حا ٢ س

∴ ص′ ( حتا ٢ س − ٢ س حتا ٢ ص ) = حا ٢ ص + ٢ ص حا ٢ س

و عند ( $\frac{١}{٤}\pi$ ، $\frac{١}{٢}\pi$ ) فإن :

ص′ ( حتا $\frac{١}{٢}\pi$ − $\frac{١}{٢}\pi$ حتا $\pi$ ) = حا $\pi$ + $\pi$ حا $\frac{١}{٢}\pi$

∴ $\frac{١}{٢}\pi$ ص′ = $\pi$ و منها : ميل المماس = ٢

، ميل العمودى = − $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس هى : ص − $\frac{١}{٢}\pi$ = ٢ × ( س − $\frac{١}{٤}\pi$ )

∴ ص − $\frac{١}{٢}\pi$ = ٢ س − $\frac{١}{٢}\pi$ أى : ٢ س − ص = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص − $\frac{١}{٢}\pi$ = − $\frac{١}{٢}$ × ( س − $\frac{١}{٤}\pi$ )

∴ ٢ ص − $\pi$ = − س + $\frac{١}{٤}\pi$ أى : ٤ س + ٨ ص − ٨ $\pi$ = ٠ .

**(١٢) أوجد معادلتى المماس و العمودى للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة**

(ﺃ) س = ن$^{٢}$ + ٢ ن + ٣ ، ص = ٢ ن$^{٣}$ − ٦ ن + ١

عند ن = ٠ .

(ب) س = قا$^{٢}$ $\theta$ − ١ ، ص = ظا $\theta$ عند $\theta$ = − $\frac{١}{٤}\pi$

الحل

(ﺃ) ∵ س = ن$^{٢}$ + ٢ ن + ٣ ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢ ن + ٢

، ∵ ص = ٢ ن$^{٣}$ − ٦ ن + ١ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٦ ن$^{٢}$ − ٦

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءن}$ ÷ $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{٦ ن^{٢} - ٦}{٢ ن + ٢}$ ، عند : ن = ٠ فإن :

ميل المماس = − ٣ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٣}$ ، س = ٣ ، ص = ١

∴ عند النقطة ( ٣ ، ١ ) فإن :

معادلة المماس هى : ص − ١ = − ٣ × ( س − ٣ )

∴ ص − ١ = − ٣ س + ٩ أى : ٣ س + ص − ١٠ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ١ = ١/٣ × ( س − ٣ )

∴ ٣ ص − ٣ = س − ٣ أى : س − ٣ ص = ٠

**(ب)** ∵ س = قا^٢ θ − ١ = ظا^٢ θ ∴ ءس/ءθ = ٢ ظا θ قا^٢ θ

، ∵ ص = ظا θ ∴ ءص/ءθ = قا^٢ θ

∴ ءص/ءس = ءص/ءθ ÷ ءس/ءθ = قا^٢ θ / ( ٢ ظا θ قا^٢ θ ) = ١ / ( ٢ ظا θ )

و عندما : θ = − ١/٤ π فإن : س = ظا^٢ ( − ١/٤ π ) = ( − ١ )^٢ = ١

، ص = ظا ( − ١/٤ π ) = − ١

، ميل المماس = ٢ ظا ( − ١/٤ π ) = ١ / ( ٢ ظا ( − ١/٤ π ) ) = − ١/٢

، و ميل العمودى = ٢ ∴ عند النقطة ( ١ ، − ١ ) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ١ = − ١/٢ × ( س − ١ )

∴ ٢ ص + ٢ = − س + ١ أى : س + ٢ ص + ١ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ١ = ٢ × ( س − ١ )

∴ ص + ١ = ٢ س − ٢ أى : ٢ س − ص − ٣ = ٠

**(١٣)** أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات و المماس و العمودى عليه للمنحنى : ٤ س^٢ + ص^٢ = ٢٠ عند النقطة ( ١ ، − ٤ )

الحل

∵ ٤ س^٢ + ص^٢ = ٢٠

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٨ س + ٢ ص ص/ = ٠

و منها : ص/ = − ٤ س / ص

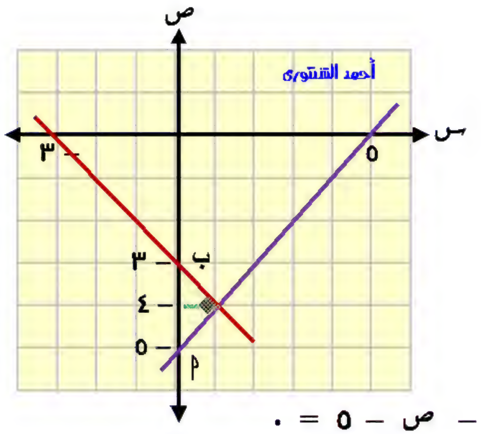
∴ عند النقطة ( ١ ، − ٤ )

فإن : ميل المماس = ( − ٤ × ١ ) / ( − ٤ ) = ١

، ميل العمودى = − ١ ،

معادلة المماس هى :

ص + ٤ = ١ × ( س − ١ )




∴ ص + ٤ = س − ١ أى : س − ص − ٥ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ٤ = − ١ × ( س − ١ )

∴ ص + ٤ = − س + ١ أى : س + ص + ٣ = ٠

بفرض أن : المماس يقطع محور الصادات فى النقطة أ ( ٠ ، ل )

∴ بالتعويض فى معادلة المماس ينتج : − ل − ٥ = ٠ و منها : ل = − ٥

أى أن : المماس يقطع محور الصادات فى النقطة أ ( ٠ ، − ٥ ) ،

بفرض أن : العمودى على المماس يقطع محور الصادات فى النقطة ب ( ٠ ، ل )

∴ بالتعويض فى معادلة العمودى ينتج : ل + ٣ = ٠ و منها : ل = − ٣

أى أن : العمودى يقطع محور السينات فى النقطة ب ( ٠ ، − ٣ )

∴ أ ب = | − ٥ − ( − ٣ ) | = | − ٥ + ٣ | = ٢ وحدة طول

، و من الشكل : ارتفاع المثلث المطلوب = ١ وحدة طول

∴ مساحة المثلث المطلوب = ١/٢ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

**(١٤)** أثبت أن المنحنيين : ص^٤ + ٩ ص = ٦ س ، س^٢ − ٢ ص = ٣ س متقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل

الحل

∵ $\text{ص}^{٤} + ٩\ \text{ص} = ٦\ \text{س}$   ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٤\ \text{ص}^{٣}\ \text{ص}' + ٩\ \text{ص}' = ٦$   ∴ $\text{ص}' ( ٤\ \text{ص}^{٣} + ٩ ) = ٦$

، و عند نقطة الأصل ( ٠ ، ٠ )   فإن : $٩\ \text{ص}' = ٦$

و منها : ميل المماس للمنحنى الأول ( $\text{م}_{١}$ ) = $\frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\text{س}^{٢} - ٢\ \text{ص} = ٣\ \text{س}$   ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\ \text{س} - ٢\ \text{ص}' = ٣$   ∴ $٢\ \text{ص}' = ٢\ \text{س} - ٣$

، و عند نقطة الأصل ( ٠ ، ٠ )   فإن : $٢\ \text{ص}' = -٣$

، ميل المماس للمنحنى الثانى ( $\text{م}_{٢}$ ) = $-\frac{٣}{٢}$

، ∵ $\text{م}_{١} \times \text{م}_{٢} = \frac{٢}{٣} \times -\frac{٣}{٢} = -١$

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل ( ٠ ، ٠ )

**(١٥)** أثبت أن المنحنيين : $(\frac{\text{س}}{\text{أ}})^{\text{ن}} + (\frac{\text{ص}}{\text{ب}})^{\text{ن}} = ٢$ يمس المستقيم $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ٢$ عند النقطة ( أ ، ب ) مهما تكن قيمة ن

الحل

∵ $(\frac{\text{س}}{\text{أ}})^{\text{ن}} + (\frac{\text{ص}}{\text{ب}})^{\text{ن}} = ٢$   ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ن} (\frac{\text{س}}{\text{أ}})^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{أ}} + \text{ن} (\frac{\text{ص}}{\text{ب}})^{\text{ن}-١} \times \frac{١}{\text{ب}}\ \text{ص}' = ٠$

، عند النقطة ( أ ، ب ) فإن : $\text{ن} \times ١ \times \frac{١}{\text{أ}} + \text{ن} \times ١ \times \frac{١}{\text{ب}}\ \text{ص}' = ٠$

و منها : ص' = ميل المماس = $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

، و بضرب معادلة المستقيم المعطى × أ ب ينتج :

ب س + أ ص = ٠   ∴ ميل المستقيم المعطى = $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ المستقيم يمس المنحنى عند النقطة ( أ ، ب ) التى تقع على كليهما مهما تكن قيمة ن

**(١٦)** إذا تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم و كانت العلاقة بين المسافة و الزمن هى : $\text{ف} = ٣\ \text{ن}^{٣} + ٣\ \text{ن}^{٢} - ٤$ حيث ف بالسنتيمترات ، ن بالثوانى أوجد معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن فى نهاية ٣ ثوان

الحل

∵ $\text{ف} = ٣\ \text{ن}^{٣} + ٣\ \text{ن}^{٢} - ٤$   ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن ينتج :

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = ٩\ \text{ن}^{٢} + ٦\ \text{ن}$   ، عند ن = ٣ ينتج :

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = ٨١ + ١٨ = ٩٩$

أى أن : معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن فى نهاية ٣ ثوان = ٩٩ سم / ث

**(١٧)** بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم$^{٣}$ / ث أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوى $\frac{٢\ \text{س}}{\text{نق}}$ سم$^{٢}$ / ث

الحل

بفرض أن : حجم البالون = ع   ، مساحة سطحه = م

، ∵ البالون كروى الشكل   ∴ $\text{ع} = \frac{٤}{٣} \pi\ \text{نق}^{٣}$

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣\ \text{نق}^{٢} \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

، ∵ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -\text{س}$ سم$^{٣}$ / ث   ∴ $-\text{س} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣\ \text{نق}^{٢} \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

و منها : $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{س}}{٤ \pi\ \text{نق}^{٢}}$ سم / ث

، $\text{م} = ٤ \pi\ \text{نق}^{٢}$   ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ٨ \pi\ \text{نق} \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = ٨ \pi\ \text{نق} \times \frac{-\text{س}}{٤ \pi\ \text{نق}^{٢}} = \frac{-٢\ \text{س}}{\text{نق}}$ سم$^{٢}$ / ث

أى أن : مساحة البالون تتناقص بمعدل $\frac{٢ س}{ط}$ سم$^{٢}$ / ث

**(١٨)** نقطة تتحرك على المنحنى : ص$^{٢}$ = ٤ س ، إذا كان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة ( ٤ ، –٤ ) يساوى ٢ وحدة / ث فأوجد معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن

الحل

∵ ص$^{٢}$ = ٤ س ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٤ $\frac{ءس}{ءن}$ ، ∵ عند النقطة ( ٤ ، –٤ ) كان : $\frac{ءس}{ءن}$ = ٢

∴ ٢ × –٤ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٤ × ٢ ، و منها : $\frac{ءص}{ءن}$ = –١ وحدة / ث

أى أن : الاحداثى الصادى للنقطة يتناقص بمعدل ١ وحدة / ث

**(١٩)** مستطيل طوله ٢٤ سم و عرضه ١٠ سم يتناقص طوله بمعدل ٢ سم / ث بينما يتزايد عرضه بمعدل ١,٥ سم / ث أوجد معدل تغير مساحته بعد مضى ٤ ثوان ، ثم أوجد الزمن الذى يتوقف عنده معدل تغير المساحة ، و كم تكون مساحة المستطيل حينئذ ؟

الحل

بفرض أن : طول المستطيل = س ، عرضه = ص ، مساحة سطحه = م
بعد قدره ن ثنية حيث : س ، ص ، م دوال فى الزمن

∴ س = ٢٤ – ٢ ن ، ص = ١٠ + ١,٥ ن

∴ م = س × ص = ( ٢٤ – ٢ ن ) ( ١٠ + ١,٥ ن )

= ٢٤٠ + ١٦ ن – ٣ ن$^{٢}$ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{ءم}{ءن}$ = ١٦ – ٦ ن و عندما : ن = ٤

∴ $\frac{ءم}{ءن}$ = ١٦ – ٦ × ٤ = – ٨ سم$^{٢}$ / ث

أى أن : مساحة المستطيل تتناقص بمعدل ٨ سم$^{٢}$ / ث

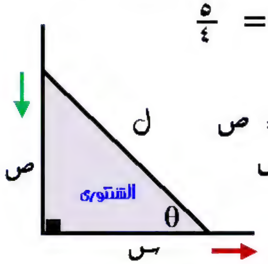
، عندما : $\frac{ءم}{ءن}$ = ٠ فإن : ١٦ – ٦ ن = ٠ و منها : ن = $\frac{٨}{٣}$ ث

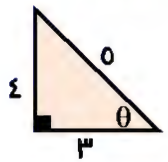
أى أن : المساحة تتوقف عن التناقص بعد $\frac{٨}{٣}$ ث

و حينئذ : م = ( ٢٤ – ٢ × $\frac{٨}{٣}$ ) ( ١٠ + ١,٥ × $\frac{٨}{٣}$ )

= $\frac{٥٦}{٣}$ × ١٤ = $\frac{٧٨٤}{٣}$ سم$^{٢}$

**(٢٠)** سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوى على حائط رأسى بمعدل ل وحدة / ث ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلى عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية θ حيث قتا θ = $\frac{٥}{٤}$




الحل

نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الأرض = ص
، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س
، طول السلم = ل حيث : ل ثابت

∴ من هندسة الشكل : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ل$^{٢}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠ (١)

، عندما : قتا θ = $\frac{٥}{٤}$ فإن : س = ل حا θ = $\frac{٤}{٥}$ ل

، ص = ل حتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ل ، ∵ $\frac{ءص}{ءن}$ = – ل وحدة / ث ،

التعويض فى (١) ينتج : ٢ × $\frac{٤}{٥}$ ل × $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ × $\frac{٣}{٥}$ ل × – ل = ٠

و منها : $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{٣}{٤}$ ل وحدة / ث

أى أن : الطرف السفلى للسلم يبتعد عن الحائط الرأسى بمعدل $\frac{٣}{٤}$ ل وحدة / ث

**(٢١)** يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١ سم$^{٣}$ / ث ، إذا كان معدل تزايد

كل من ارتفاع الهرم و طول قاعدته يساوى ٠,٠١ سم / ث فأوجد طول ضلع قاعدته

الحل

نفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = ارتفاع الهرم = س

، حجم الهرم = ح ، ∵ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربع

∴ ح = ⅓ س² × س = ⅓ س³

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : دح/دن = س² دس/دن

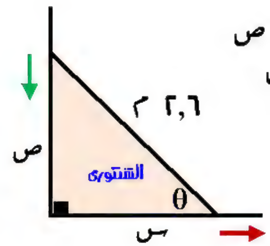
، ∵ دح/دن = ١ ، دس/دن = ٠,٠١ ∴ ١ = س² × ٠,٠١

و منها : س² = ١٠٠ ∴ س = ١٠ سم

أى أن : طول ضلع قاعدته = ١٠ سم

**(٢٢)** سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى و بطرفه السفلى على أرض أفقية ، إذا كان طرفه السفلى يتحرك مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ متر / د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط أوجد معدل تحرك طرفه العلوى و معدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ

الحل




نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الأرض = ص

، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س

∴ من هندسة الشكل : س² + ص² = ٦,٧٦

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ س دس/دن + ٢ ص دص/دن = ٠

، عندما : س = ١ م فإن : ص = ٢,٤ م ، دس/دن = ٤ م / د

∴ ٢ × ١ × ٤ + ٢ × ٢,٤ دص/دن = ٠ و منها : دص/دن = − ⁵⁄₃ م / د

أى أن : الطرف العلوى ينزلق لأسفل بمعدل ⁵⁄₃ م / د

و بفرض أن : θ قياس الزاوية بين السلم و الأرض

∴ من هندسة الشكل : حا θ = ص/٢,٦ ∴ ص = ٢,٦ حا θ

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : دص/دن = ٢,٦ حتا θ دθ/دن

، عندما : ص = ٢,٤ م فإن : حتا θ = ١/٢,٦ ، = − ⁵⁄₃ م / د

∴ − ⁵⁄₃ = ٢,٦ × ١/٢,٦ × دθ/دن و منها : دθ/دن = − ⁵⁄₃ ء / د أى أن :

قياس الزاوية بين السلم و الأرض يتناقص بمعدل ⁵⁄₃ زاوية نصف قطرية / د

**(٢٣)** متوازى مستطيلات أبعاده ٣ ، ٤ ، ١٢ من السنتيمترات ، إذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢ سم / ث و معدل تزايد بعده الثانى ١ سم / ث و معدل تناقص بعده الثالث ٣ سم / ث ، فأوجد حجم متوازى المستطيلات فى أى لحظة زمنية ن ، و معدل تغير حجمه فى نهاية ٢ ثانية

الحل

بفرض أن : أبعاد متوازى المستطيلات هى : س ، ص ، ع ، حجمه = ح

بعد زمن قدره ن ثانية حيث : س ، ص ، ع ، ح دوال فى الزمن

∴ س = ٣ + ٢ن ، ص = ٤ + ن ، ع = ١٢ − ٣ن

∴ ح = س × ص × ع = (٣ + ٢ن)(٤ + ن)(١٢ − ٣ن)

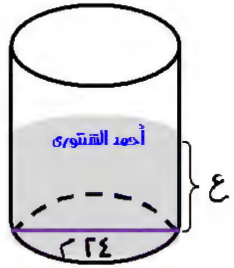
= (١٢ + ١١ن + ٣ن²)(١٢ − ٣ن)

= ١٤٤ + ٩٦ن − ٩ن² − ٦ن³ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

دح/دن = ٩٦ − ١٨ن − ١٢ن² ، ن = ٢ فإن : دح/دن = − ١٢ سم³ / ث

**(٢٤)** خزان بترول على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ متراً ، يراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م³ / د ،

فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان ؟




**الحل**

بفرض أن : طول نصف قطر الخزان = نق ،

ارتفاع البترول فى الخزان = ع ، حجم البترول = ح

∵ الخزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة ،

∴ ح = $\pi$ نق$^2$ ع ، ∵ نق = ١٢ م

∴ ح = ١٤٤ $\pi$ ع ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

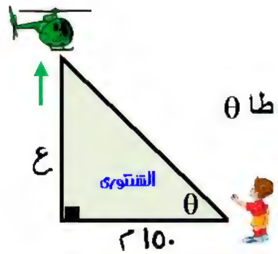
$\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = ١٤٤\,\pi\,\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ ، ∵ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = -٢$ م$^3$ / د

∴ $-٢ = ١٤٤\,\pi\,\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ و منها : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٧٢\pi}$ م / د

أى أن : ارتفاع البترول فى الخزان يتناقص بمعدل $\frac{١}{٧٢\pi}$ م / د

**(٢٥)** ترتفع طائرة عمودية رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م / د ، فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض و يبعد ١٥٠ م عن موقع إقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون الطائرة على ارتفاع ١٥٠ م عن سطح الأرض

**الحل**




بفرض أن : ارتفاع الطائرة = ع

، قياس زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة = θ

∴ من هندسة الشكل : طا θ = $\frac{\text{ع}}{١٥٠}$ ∴ ع = ١٥٠ طا θ

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ١٥٠$ قا$^2$ θ $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

، عندما : ع = ١٥٠ م فإن : θ = $\frac{١}{٤}\pi$ ، قا$^2$ θ = ٢

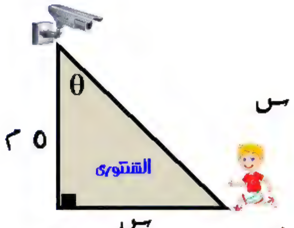
، ∵ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٤٢$ م / د ∴ $٤٢ = ١٥٠ \times ٢ \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

و منها : $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = \frac{٧}{٥٠}$ ء / د أى أن : ( ٠,١٤ ء / د ) :

قياس زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة يتزايد بمعدل ٠,١٤ زاوية نصف قطرية / د

**(٢٦)** فى سباق ١٠٠ متر ، يجرى لاعب فى مسار مستقيم باتجاه خط النهاية ، و كانت إحدى كاميرات خط النهاية على مسافة ٥ أمتار و عمودية على مسار السباق و فى نفس المستوى الأفقى للمتسابقين أوجد معدل تغير قياس الزاوية التى تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ، و معدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠ م / ث

**الحل**




بفرض أن : المسافة بين المتسابق و خط النهاية = س

، قياس زاوية دوران الكاميرا = θ

∴ من هندسة الشكل : طا θ = $\frac{\text{س}}{٥}$

∴ س = ٥ طا θ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٥$ قا$^2$ θ $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$ ، عندما : س = ٥ م فإن : θ = $\frac{١}{٤}\pi$

، قا$^2$ θ = ٢ ، ∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -١٠$ م / د ∴ $-١٠ = ٥ \times ٢ \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

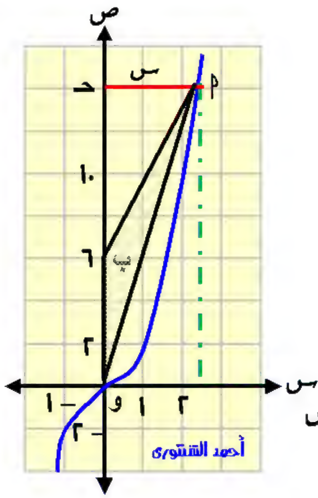
و منها : $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = -١$ ء / د أى أن :

قياس زاوية دوران الكاميرا يتناقص بمعدل ١ زاوية نصف قطرية / د

**(٢٧)** تتحرك النقطة ﺃ ( س ، ص ) على منحنى الدالة :

ص = س$^3$ + س بحيث $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٢$ وحدة / ث ، أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث ﺃ و ب حيث ( و ) نقطة الأصل ، النقطة ب ( ٠ ، ٦ ) فى اللحظة التى يكون فيها الاحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣

**الحل**



∵ ص = $س^{٣}$ + س

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{ءص}{ءن} = ( ٣ س^{٢} + ١ ) \frac{ءس}{ءن}$

و عندما : $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢ وحدة / ث ، س = ٣

فإن : ٢ = ٢٨ $\frac{ءس}{ءن}$

و منها : $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{١٤}$ وحدة / ث

و بفرض أن : مساحة △ أ و ب = م

∴ م = $\frac{١}{٢}$ و ب × أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × س = ٣ س

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{ءم}{ءن} = ٣ \frac{ءس}{ءن} = ٣ \times \frac{١}{١٤} = \frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة / ث

أى أن : مساحة △ أ و ب تتزايد بمعدل $\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة / ث



## حل اختبار تراكمى صفحة ٣٣ بالكتاب المدرسى

**أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة**

**(١)** إذا كان : د(س) = طتا س فإن : $د^{//}$ ( $\frac{١}{٤}$ π ) يساوى ....

(أ) − $\frac{٤}{٩}$  (ب) $\frac{٤}{٩}$  (حـ) ٤  (ء) $\frac{٩}{٢}$

**(٢)** تتحرك نقطة على المنحنى : $ص^{٢}$ = ٢٥ − $س^{٢}$ بحيث : $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٢ س + ٣}$ فإن : عند النقطة ( −٣ ، ٤ ) $\frac{ءص}{ءن}$ يساوى ....

(أ) − $\frac{١}{٤}$  (ب) $\frac{١}{٤}$  (حـ) $\frac{١}{٩}$  (ء) − ٤

**(٣)** إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى ص = د(س) عند النقطة ( ١ ، ١ ) هى : س + ٤ ص = ٥ فإن : $د^{/}$( ١ ) يساوى ....

(أ) − ٣  (ب) − $\frac{١}{٤}$  (حـ) ٤  (ء) − ٤

**(٤)** المماس للمنحنى : ص = ٣ $س^{٢}$ عند النقطة ( ١ ، − ٢ ) يمر بالنقطة ....

(أ) ( ٥ ، − ٢ )  (ب) ( ٣ ، ١ )

(حـ) ( ٢ ، − ٤ )  (ء) ( ٠ ، − ٨ )

الحل

**(١)** ∵ د(س) = طتا س  ∴ $د^{/}$(س) = − $قتا^{٢}$ س ،

$د^{//}$(س) = − ٢ قتا س ( − قتا س طتا س ) = ٢ $قتا^{٢}$ س طتا س

، $د^{//}$ ( $\frac{١}{٤}$ π ) = ٢ $قتا^{٢}$ $\frac{١}{٤}$ π طتا $\frac{١}{٤}$ π = ٢ $( \sqrt{٢} )^{٢}$ × ١ = ٤

**(٢)** ∵ $ص^٢ = ٢٥ - س^٢$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ن ينتج :

$٢ ص \frac{دص}{دن} = -٢ س \frac{دس}{دن}$ و عند النقطة (−٣ ، ٤) فإن :

$٢ \times ٤ \frac{دص}{دن} = -٢ \times -٣ \frac{دس}{دن}$ و منها : $\frac{دص}{دن} = \frac{٣}{٤} \frac{دس}{دن}$

، ∵ $\frac{دس}{دن} = \frac{١}{٢س + ٣}$ و عند النقطة (−٣ ، ٤) فإن :

$\frac{دس}{دن} = -\frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{دص}{دن} = \frac{٣}{٤} \times -\frac{١}{٣} = -\frac{١}{٤}$

**(٣)** ∵ معادلة العمودى هى : $س + ٤ ص = ٥$ ∴ ميل العمودى $= -\frac{١}{٤}$

∴ ميل المماس = ٤ ، عند النقطة (١ ، ١) فإن : $د^{/}(١) = ٤$

**(٤)** ∵ $ص = ٣ س^٢$ ∴ $ص^{/} = ٦ س$

، عند النقطة (١ ، −٢) فإن : $ص^{/}$ = ميل المماس = ٦

، معادلة المماس هى : $ص + ٢ = ٦ \times (س - ١)$

∴ $ص + ٢ = ٦ س - ٦$ أى : $٦ س - ص - ٨ = ٠$ .

، النقطة (٠ ، −٨) تحقق معادلة المماس

أى أن : المماس يمر بالنقطة (٠ ، −٨)

**(٥)** إذا كانت : $س = ن - ن^٢$ ، $ص = ن - ن^٣$ أوجد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$

**الحل**

∵ $س = ن - ن^٢$ ∴ $\frac{دس}{دن} = ١ - ٢ن$

، ∵ $ص = ن - ن^٣$ ∴ $\frac{دص}{دن} = ١ - ٣ن^٢$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{١ - ٣ن^٢}{١ - ٢ن} = (١ - ٣ن^٢)(١ - ٢ن)^{-١}$

، $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{د}{دس}\left(\frac{دص}{دس}\right) = \frac{د}{دن}\left(\frac{دص}{دس}\right) \times \frac{دن}{دس}$

$= \frac{د}{دن}\left[(١ - ٣ن^٢)(١ - ٢ن)^{-١}\right] \times (١ - ٢ن)^{-١}$

∴ $\frac{د^٢ص}{دس^٢} = [(١ - ٣ن^٢) \times -١ (١ - ٢ن)^{-٢} \times -٢$

$+ (١ - ٢ن)^{-١} \times -٦ن] \times (١ - ٢ن)^{-١}$

$= [٢(١ - ٣ن^٢)(١ - ٢ن)^{-٢}$

$- ٦ن(١ - ٢ن)^{-١}] \times (١ - ٢ن)^{-١}$

$= (١ - ٢ن)^{-٢}[٢(١ - ٣ن^٢) - ٦ن(١ - ٢ن)]$

$\times (١ - ٢ن)^{-١}$

$= (١ - ٢ن)^{-٣}[٢ - ٦ن^٢ - ٦ن + ١٢ن^٢]$

$= (١ - ٢ن)^{-٣}[٦ن^٢ - ٦ن + ٢] = \frac{٦ن^٢ - ٦ن + ٢}{(١ - ٢ن)^٣}$

**(٦)** المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما : $س = ن^٢ - ٦ن$ ، $ص = ٨\sqrt{ن - ٢}$ أوجد معادلة المماس عند : ن = ٦

**الحل**

∵ $س = ن^٢ - ٦ن$ ∴ $\frac{دس}{دن} = ٢ن - ٦$

، ∵ $ص = ٨\sqrt{ن - ٢} = ٨(ن - ١)^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{دص}{دن} = ٨ \times \frac{١}{٢}(ن - ١)^{-\frac{١}{٢}} = ٤(ن - ١)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}}$

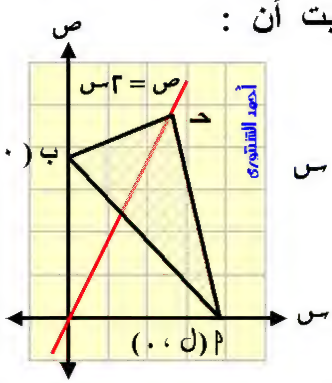
∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}} \times \frac{١}{٢ن - ٦}$

، عند : ن = ٦ : $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٣}$ ، س = ٠ ، ص = ١٦

∴ عند النقطة (٠ ، ١٦) : معادلة المماس هى : $ص + ١٦ = \frac{١}{٣} س$

أى : $س - ٣ ص - ٤٨ = ٠$ .

**(٧)** أ ب حـ مثلث مساحته م ، النقطة حـ تتحرك على المستقيم :
ص = ٢ س ، فإذا كان : أ ( ل ، ٠ ) ، ب ( ٠ ، ك )
حيث : ل ، ك ثابتان موجبان ، أثبت أن :
$\frac{ءم}{ءس} = ل + \frac{ك}{٢}$




**الحل**

∵ النقطة حـ تتحرك على المستقيم : ص = ٢ س
∴ احداثى حـ هى ( س ، ٢ س )
، ∵ أ ( ل ، ٠ ) ، ب ( ٠ ، ك )
، بفرض أن : مساحة △ أ ب حـ = م
∴ $م = \frac{١}{٢}\begin{vmatrix} ل & ٠ & ١ \\ ٠ & ك & ١ \\ س & ٢س & ١ \end{vmatrix} = \frac{١}{٢} \left| ل \times ( ك - ٢ س ) + ١ \times ( ٠ - ك س ) \right|$
، حيث : ل ، ك ثابتان موجبان
∴ $م = \frac{١}{٢} ( ل ك + ٢ ل س + ك س )$
∴ $\frac{ءم}{ءس} = \frac{١}{٢} ( ٢ ل + ك ) = ل + \frac{١}{٢} ك = ل + \frac{ك}{٢}$

**(٨)** أوجد معدل تغير $\sqrt{٩ + س^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س - ١}$ عند س = −٤

**الحل**

نضع : $ص = \sqrt{٩ + س^٢} = (٩ + س^٢)^{\frac{١}{٢}}$
∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} (٩ + س^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ س = \frac{س}{\sqrt{٩ + س^٢}}$
، $ع = \frac{س}{س - ١}$ ∴ $\frac{ءع}{ءس} = \frac{(س - ١) \times ١ - س \times ١}{(س - ١)^٢} = \frac{-١}{(س - ١)^٢}$
∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{س}{\sqrt{٩ + س^٢}} \times \frac{(س - ١)^٢}{-١}$
، عندما س = −٤ ∴ $\frac{ءص}{ءع} = -\frac{٤}{٥} \times -٢٥ = ٢٠$

**(٩) (أ)** إذا كان : ص = ٤ + طتا س − قا² س أوجد معادلة العمودى عند $س = \frac{١}{٤} \pi$

**(ب)** مثمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم و يتزايد بمعدل ٠,٢ سم / ث أوجد معدل تزايد مساحته

**الحل**

(أ) ∵ ص = ٤ + طتا س − قا² س
∴ ص′ = − قتا² س − ٢ قا س × قا س طا س
= − قتا² س − ٢ قا² س طا س ، عندما : $س = \frac{١}{٤} \pi$
∴ ص′ = ميل المماس = $- قتا^٢ \frac{١}{٤}\pi - ٢ قا^٢ \frac{١}{٤}\pi \; طا \frac{١}{٤}\pi$
$= -(\sqrt{٢})^٢ - ٢ \times (\sqrt{٢})^٢ \times ١$
$= -٢ - ٢ \times ٢ \times ١ = -٦$
∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٦}$ ، عندما : $س = \frac{١}{٤} \pi$ فإن :
$ص = ٤ + طتا س - قا^٢ س = ٤ + طتا \frac{١}{٤}\pi - قا^٢ \frac{١}{٤}\pi$
$= ٤ + ١ - (\sqrt{٢})^٢ = ٤ + ١ - ٢ = ٣$
∴ عند النقطة ( $\frac{١}{٤}\pi$ ، ٣ ) : معادلة العمودى هى :
$ص - ٣ = \frac{١}{٦} \times ( س - \frac{١}{٤}\pi )$ أى : $س - ٦ ص + ١٨ - \frac{١}{٤}\pi = ٠$

(ب) بفرض أن : مساحة المثمن المنتظم = م
، ∵ مساحة المضلع المنتظم = $\frac{١}{٤} ن س^٢ \; طتا \frac{\pi}{ن}$
حيث : س = طول ضلعه ، ن = عدد أضلاعه

∴ م = $\frac{1}{4}$ × ٨ س² طتا $\frac{\pi}{8}$ = ٢ س² طتا $\frac{\pi}{8}$

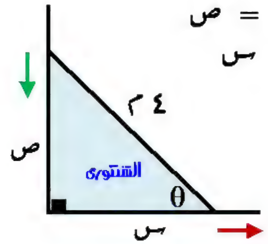
، $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٤ س طتا $\frac{\pi}{8}$ × $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

و عندما : س = ١٠ سم ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٠,٢ سم / ث

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٤ × ١٠ × طتا $\frac{\pi}{8}$ × ٠,٢ = ١٩,٣ سم² / ث

(١٠) سلم طوله ٤ أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى و بطرفه الآخر على أرض أفقية ، إذا أنزلق الطرف الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / ث ، أحسب معدل هبوط الطرف العلوى للسلم عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها $\frac{1}{3}\pi$

الحل




نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الأرض = ص

، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س

، قياس زاوية ميل السلم على الأرض = θ

∴ من هندسة الشكل : س² + ص² = ١٦

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٠ (١)

، عندما : θ = $\frac{1}{3}\pi$ فإن : س = ٤ حتا $\frac{1}{3}\pi$ = ٤ × $\frac{1}{2}$ = ٢ م = ٢٠٠ سم

، ص = ٤ حا $\frac{1}{3}\pi$ = ٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٢ $\sqrt{3}$ م = ٢٠٠ $\sqrt{3}$ سم

، ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٣٠ سم / ث ، بالتعويض في (١) ينتج :

∴ ٢ × ٢٠٠ × ٣٠ + ٢ × ٢٠٠ $\sqrt{3}$ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٠

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = − $\frac{30}{\sqrt{3}}$ سم / ث

أى أن : الطرف العلوى يهبط بمعدل $\frac{30}{\sqrt{3}}$ سم / ث

## اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

## الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٢) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{1}{\pi}$ سم / ث فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل .... سم / ث

(أ) $\frac{2}{\pi}$  (ب) ٢  (جـ) $\pi$  (د) ٢ $\pi$

الحل

∵ م = ٢ $\pi$ نق ∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢ $\pi$ $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ = ٢ $\pi$ × $\frac{1}{\pi}$ = ٢

[٣] (أ) أوجد معادلة المماس للمنحنى :

س² − ٣ س ص − ص² + ٣ = ٠ عند النقطة ( −١ ، ٤ )

الحل

∵ س² − ٣ س ص − ص² + ٣ = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

٢ س − ٣ ص − ٣ س $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ٢ ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٠

و منها : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٢ س − ٣ ص}}{\text{٣ س + ٢ ص}}$

∴ م ( ميل المماس ) = $\left[\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right]_{(-1,4)}$ = − $\frac{14}{5}$

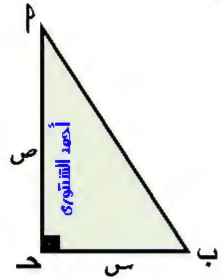
∴ معادلة المماس هى : ص − ٤ = − $\frac{14}{5}$ ( س + ١ )

أى : ١٤ س + ٥ ص − ٦ = ٠

(ب) مثلث قائم الزاوية ، فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة ٦ سم ، ٣٠ سم ، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ سم / د ، و طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم / د أوجد :

١ – معدل التزايد فى مساحة المثلث بعد ٣ دقائق

٢ – الزمن الذى بعده يتوقف تزايد مساحة المثلث




**الحل**

نفرض أن : س ، ص طولا ضلعى القائمة بعد ن دقيقة ، م مساحة المثلث حيئنذ حيث س ، ص ، م دوال فى الزمن

∴ س = ٦ + $\frac{١}{٣}$ ن ، ص = ٣٠ – ن

∴ م = $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ (٦ + $\frac{١}{٣}$ ن) (٣٠ – ن)

= ٩٠ + ٢ن – $\frac{١}{٦}$ ن$^{٢}$ ، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢ – $\frac{١}{٣}$ ن

بعد ٣ دقائق : ∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢ – $\frac{١}{٣}$ × ٣ = ١ سم / د

يتوقف تزايد المساحة عندما : $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٠

أى عندما : ٢ – $\frac{١}{٣}$ ن = ٠ و منها : ن = ٦ دقائق

## الاختبار الثانى

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٢) إذا كان ص = ٤ن$^{٣}$ + ٤ ، ع = ٣ن$^{٢}$ – ٢ فإن معدل تغير ع بالنسبة إلى ص يساوى ....

(أ) ٢ن  (ب) ٢  (جـ) $\frac{١}{٢\text{ن}}$  (د) ٤

**الحل**

∵ ص = ٤ن$^{٣}$ + ٤ ، ع = ٣ن$^{٢}$ – ٢

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ١٢ن$^{٢}$ ، $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٦ن

∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢\text{ن}}$

[٢] (ب) أوجد معدل تغير $\sqrt{١٦ + \text{س}^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ عندما س = – ٣

**الحل**

نضع : ص = $\sqrt{١٦ + \text{س}^{٢}} = (١٦ + \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢}(١٦ + \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times ٢\text{س} = \frac{\text{س}}{\sqrt{١٦ + \text{س}^{٢}}}$

، ع = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س} - ٢) \times ١ - \text{س} \times ١}{(\text{س} - ٢)^{٢}} = \frac{-٢}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \div \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{١٦ + \text{س}^{٢}}} \times \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{-٢}$

، عندما س = – ٣ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = -\frac{٣}{٥} \times -\frac{٢٥}{٢} = \frac{١٥}{٢}$

[٣] (أ) إذا كان : س حتا ص + ص حتا س = ١ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

**الحل**

∵ س حتا ص + ص حتا س = ١ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

حتا ص – س حا ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ + $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ حتا س – ص حا س = ٠

∴ ( حتا س – س حا ص ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ص حا س – حتا ص

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص حا س} - \text{حتا ص}}{\text{حتا س} - \text{س حا ص}}$

[٤] (ب) يتزايد حجم مكعب بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله بمعدل ٢٧ سم$^{٣}$/ د ، أوجد معدل الزيادة فى مساحة أوجهه عند اللحظة التى يكون فيها طول حرفه ٣ سم

**الحل**

بفرض أن : طول حرف المكعب = ل وحدة طول

∴ حجم المكعب ع = ل$^{٣}$ وحدة مكعبة ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٣\text{ل}^{٢} \times \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$

∴ $٢٧ = ٣ \times ٩ \times \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$ و منها : $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = ١$ سم / د

، ∵ مساحة أوجه المكعب م = ٦ ل$^{٢}$

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = ١٢\text{ل} \times \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = ١٢ \times ٣ \times ١ = ٣٦$ سم$^{٢}$/ د

## الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) ميل المماس لمنحنى الدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٥ عند س = ٣ يساوى ....

(أ) $-\frac{٤}{٣}$ (ب) $-\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

**الحل**

∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٥ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

، س = ٣ فإن : ص = ± ٤ ∴ ميل المماس = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = ٣} = -\frac{٣}{٤}$

(٢) إذا كان د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ فإن د$'''$(٣) = ....

(أ) – ٣٦ (ب) – ١٢ (جـ) ٦ (د) ٤

**الحل**

∵ د(س) = س ( س – ٢ )$^{-١}$

∴ د$'$(س) = ( س – ٢ )$^{-١}$ – س ( س – ٢ )$^{-٢}$

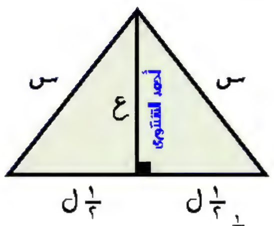
= ( س – ٢ )$^{-٢}$ ( س – ٢ – س ) = – ٢ ( س – ٢ )$^{-٢}$

∴ د$''$(س) = ٤ ( س – ٢ )$^{-٣}$ ، د$'''$(س) = – ١٢ ( س – ٢ )$^{-٤}$

∴ د$'''$(٣) = – ١٢

[٤] (ب) يتناقص الضلعان المتساويان فى مثلث متساوى الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ل سم بمعدل ٣ سم / د ، ما هو معدل تناقص المساحة عندما يصبح المثلث متساوى الأضلاع

**الحل**




بفرض أن : طول كل من الساقين = س سم

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٣$ سم / د ، من هندسة الشكل :

∴ ع$^{٢}$ = س$^{٢}$ – $\frac{١}{٤}$ ل$^{٢}$ ∴ ع = ( س$^{٢}$ – $\frac{١}{٤}$ ل$^{٢}$ )$^{\frac{١}{٢}}$

∴ مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ ل ع = $\frac{١}{٢}$ ل ( س$^{٢}$ – $\frac{١}{٤}$ ل$^{٢}$ )$^{\frac{١}{٢}}$

، $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{١}{٤}$ ل ( س$^{٢}$ – $\frac{١}{٤}$ ل$^{٢}$ )$^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

= $\frac{١}{٢}$ ل س ( س$^{٢}$ – $\frac{١}{٤}$ ل$^{٢}$ )$^{-\frac{١}{٢}}$ × ( –٣ )

$= -\frac{٣}{٢}$ ل س ( س$^٢$ $- \frac{١}{٤}$ ل$^٢$ )$^{-\frac{١}{٢}}$

ليصبح المثلث متساوى الأضلاع نضع : س = ل فيكون :

$\frac{ءم}{ءن} = -\frac{٣}{٢}$ س$^٢$ ( س$^٢$ $- \frac{١}{٤}$ س$^٢$ )$^{-\frac{١}{٢}}$ $= -\frac{٣}{٢}$ س$^٢$ ( $\frac{٣}{٤}$ س$^٢$ )$^{-\frac{١}{٢}}$

$= \frac{-\frac{٣}{٢} س^٢}{\frac{١}{٢}\sqrt{٣} س} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -\sqrt{٣}$ س

أى أن : المساحة تتناقص بمعدل $\sqrt{٣}$ س سم$^٢$ / د

## الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان ص = $\frac{٣ س - ٥}{س - ٢}$ فإن عند س = ١ ، $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ يساوى ....

(أ) $-١٢$ (ب) $-٦$ (حـ) ٦ (ء) ١٢

الحل

∵ ص = ( ٣ س − ٥ ) ( س − ٢ )$^{-١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ ( س − ٢ )$^{-١}$ − ( س − ٢ )$^{-٢}$ ( ٣ س − ٥ )

= ( س − ٢ )$^{-٢}$ [ ٣ ( س − ٢ ) − ( ٣ س − ٥ ) ]

= ( س − ٢ )$^{-٢}$ [ ٣ س − ٦ − ٣ س + ٥ ] = − ( س − ٢ )$^{-٢}$

، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ ( س − ٢ )$^{-٣}$ ،

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = −٦ ( س − ٢ )$^{-٤}$ = $\frac{-٦}{( س - ٢ )^{-٤}}$ ∴ $[\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}]_{س = ١} = -٦$

(٣) العمودى للدائرة : س$^٢$ + ص$^٢$ = ١٢ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة ....

(أ) ( ٢ ، ٣ ) (ب) ( ١ ، ١ )

(حـ) ( ٠ ، ٠ ) (ء) ( −٢ ، −٢ )

الحل

∵ س$^٢$ + ص$^٢$ = ٢٥ ∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ و منها : $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{س}{ص}$

، بفرض أن : النقطة ( حـ ، ء ) على الدائرة

∴ ميل المماس = $[\frac{ءص}{ءس}]_{(حـ ، ء)} = -\frac{حـ}{ء}$ ∴ ميل العمودى = $\frac{ء}{حـ}$

، معادلة العمودى هى : ص − ء = $\frac{ء}{حـ}$ ( س − حـ )

أى : حـ ص − حـ ء = ء س − حـ ء أى : = ء س − حـ ص = ٠ .

وهى معادلة مستقيم يمر بالنقطة ( ٠ ، ٠ ) " معادلة قطر الدائرة "

أى أن : العمودى على الدائرة بالنقطة ( ٠ ، ٠ )

[٢] (ب) إذا كان : حا ص + حتا ٢ س = ٠ . فأثبت أن :

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} - (\frac{ءص}{ءس})^٢$ طا س = ٤ حتا ٢ س قا ص

الحل

∵ حا ص + حتا ٢ س = ٠ . باشتقاق الطرفين مرتين بالنسبة لـ س

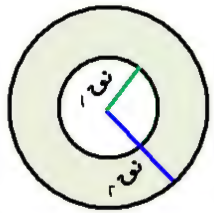
∴ حتا ص $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ حا ٢ س = ٠ .

، حتا ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ − حا ص $(\frac{ءص}{ءس})^٢$ − ٤ حتا ٢ س = ٠ .

بالقسمة ÷ حتا ص ينتج : $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} - (\frac{ءص}{ءس})^٢$ طا ص = ٤ حتا ٢ س قا ص

[٥] (ب) إذا كانت ع مساحة الجزء المحصور بين دائرتين متحدى المركز طولا نصفا قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق٢ > نق١ أوجد معدل تغير ع بالنسبة للزمن فى اللحظة التى يكون فيها نق٢ = ١٠ سم ، نق١ = ٦ سم ، إذا علم أن عند هذه اللحظة نق١ يتزايد بمعدل ٠,٣ سم / ث ، نق٢ يتناقص بمعدل ٠,٢ سم / ث

**الحل**




من الشكل : $\text{ع} = \pi\,(\text{نق}_2^{\,2} - \text{نق}_1^{\,2})$

$\therefore \dfrac{\text{دع}}{\text{دن}} = \pi\left(2\,\text{نق}_2\,\dfrac{\text{دنق}_2}{\text{دن}} - 2\,\text{نق}_1\,\dfrac{\text{دنق}_1}{\text{دن}}\right)$

$= \pi\,(\,٢ \times ١٠ \times (-٠,٢) - ٢ \times ٦ \times ٠,٣\,)$

$= -\,٧,٦\,\pi$ سم٢ / د      أى أن : ع تتناقص بمعدل $٧,٦\,\pi$ سم٢ / د

## الاختبار الخامس

[٣] (أ) إذا كان د(س) = ٤ + ظتا س − قتا٢ س أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة د عند نقطة تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{١}{٤}\pi$

**الحل**

∵ د(س) = ٤ + ظتا س − قتا٢ س

عندما : س = $\frac{١}{٤}\pi$ فإن : د(س) = ٤ + ١ − ٢ = ٣

، د/(س) = − قتا٢ س − ٢ قتا س × قتا س ظتا س

= − قتا٢ س − ٢ قتا٢ س ظتا س

، ميل المماس = $[\text{د}^{/}(\text{س})]_{\frac{١}{٤}\pi}$ = −٢ − ٢ × ٢ × ١ = −٦

∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٦}$

، معادلة العمودى هى : ص − ٣ = $\frac{١}{٦}$ ( س − $\frac{١}{٤}\pi$ )

أى : س − ٦ ص + ١٨ − $\frac{١}{٤}\pi$ = ٠

## الاختبار السادس

[١] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(٢) معدل تغير $\sqrt{\text{ن}^2+٣}$ بالنسبة إلى $\dfrac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$ هو $\dfrac{\text{ن}(\text{ن}+١)^2}{\sqrt{\text{ن}^2+٣}}$

(أ)   (ب)

**الحل**

(٢) (أ) لأن : بوضع : ص = $\sqrt{\text{ن}^2+٣} = (\text{ن}^2+٣)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}(\text{ن}^2+٣)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢\text{ن} = \dfrac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ن}^2+٣}}$ ،

$\text{ع} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$  $\therefore \dfrac{\text{دع}}{\text{دن}} = \dfrac{(\text{ن}+١)\times ١ - \text{ن}\times ١}{(\text{ن}+١)^2} = \dfrac{١}{(\text{ن}+١)^2}$

$\therefore \dfrac{\text{دص}}{\text{دع}} = \dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \dfrac{\text{دع}}{\text{دن}} = \dfrac{\text{ن}(\text{ن}+١)^2}{\sqrt{\text{ن}^2+٣}}$

**(٣)** إذا كان $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٢$ فإن : $\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \frac{-١}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$

(أ)     (ب)

**الحل**

**(٣)** (أ) لأن : $\because \sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٢$ $\quad \therefore \text{ص}^{\frac{1}{2}} = ٢ - \text{س}^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{1}{2}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}} \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = -\frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{س}^{-\frac{1}{2}}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = -\frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{3}{2}}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}} \frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{3}{2}}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}} \times \text{س}^{-\frac{1}{2}}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{3}{2}}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{س}^{-1} = -\frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{3}{2}} \times (٢ - \text{س}^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\,\text{س}^{-1}$

$= -\text{س}^{-\frac{3}{2}} - \text{س}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\text{س}^{-1} = -\text{س}^{-\frac{3}{2}} = \frac{-١}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$

## الاختبار السابع

**[١]** فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

**(١)** إذا كان : $\text{ص}^2 = ٣\,\text{س}^2 - ٧$ فإن : $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{\text{ص}}{٣\,\text{س}}$

(أ)     (ب)

**الحل**

**(١)** (ب) ، التصحيح :

$\because \text{ص}^2 = ٣\,\text{س}^2 - ٧ \quad \therefore ٢\,\text{ص}\,\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = ٦\,\text{س} \quad \therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \frac{٣\,\text{س}}{\text{ص}}$

**(٣)** $\frac{d}{d\text{س}}\left[\, \text{طتا}\,(\,\text{حتا}\ ٣\,\text{س}\,)\,\right] = ٣\ \text{حا}\ ٣\,\text{س}\ \text{قتا}^2\,(\,\text{حتا}\ ٣\,\text{س}\,)$

(أ)     (ب)

**الحل**

**(٣)** (أ) لأن : $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}\left[\, \text{طتا}\,(\,\text{حتا}\ ٣\,\text{س}\,)\,\right] =$

$- \text{قتا}^2\,(\,\text{حتا}\ ٣\,\text{س}\,) \times (\,-٣\ \text{حا}\ ٣\,\text{س}\,) =$

$٣\ \text{حا}\ ٣\,\text{س}\ \text{قتا}^2\,(\,\text{حتا}\ ٣\,\text{س}\,)$

**[٣] (ب)** متوازى مستطيلات من المعدن قاعدته على شكل مربع ، فإذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل ٠,٤ سم / ث و تناقص الارتفاع بمعدل ٠,٥ سم / ث أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة بمعدل ٦ سم و الارتفاع بمعدل ٥ سم

**الحل**

نفرض أن : طول ضلع القاعدة = س سم ، الارتفاع = ع سم

$\therefore$ الحجم $\text{ح} = \text{س}^2\,\text{ع}$     باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ ن

$\therefore \frac{d\text{ح}}{d\text{ن}} = ٢\,\text{س}\,\text{ع}\,\frac{d\text{س}}{d\text{ن}} + \text{س}^2\,\frac{d\text{ع}}{d\text{ن}}$

$= ٢ \times ٦ \times ٢ \times ٠{,}٤ + ٣٦ \times ٠{,}٥ = ٦$ سم$^3$ / ث

## الاختبار الثامن

[أ] اكمل ما يلى :

(أ) إذا كان : $س^٣ ص^٢ = ١$ فإن : $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = ١} = ....$

الحل

(أ) باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س : $٣ س^٢ ص^٢ + ٢ س^٣ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = - \frac{٣ص}{٢ س}$ ، عند : س = ١ فإن : ص = ١

∴ $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = ١} = - \frac{٣}{٢}$

[٢] (ب) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث :

د (س) = ٢ $طا^٣$ س عند النقطة التى تقع على منحنى الدالة د و إحداثيها السينى يساوى $\frac{١}{٤} \pi$

الحل

∵ د (س) = ٢ $طا^٣$ س ∴ د/(س) = ٦ طا س $قا^٢$ س

، عند : س = $\frac{١}{٤} \pi$ فإن : د (س) = ٢ × $(١)^٣$ = ٢

، ميل المماس = $[د/(س)]_{(\frac{١}{٤}\pi ، ٢)}$ = ٦ × ١ × ٢ = ١٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = ١٢ × ( س − $\frac{١}{٤} \pi$ )

أى : ٣ س − ص − ٢ − ٣ π = ٠

[٤] (ب) قضيب طوله ٥ أمتار مثبت فى الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسياً إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ متر / دقيقة أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار

الحل




نفرض أن : ارتفاع طرف القضيب عن الأرض = س م

، طول مسقط القضيب على الأرض = ص م

من هندسة الشكل : $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

∴ عندما : س = ٣ فإن : ص = ٤

، $٢ س \times \frac{ءس}{ءن} + ٢ ص \times \frac{ءص}{ءن} = ٠$

∴ $٢ \times ٣ \times ١ + ٢ \times ٤ \times \frac{ءص}{ءن} = ٠$ و منها : $\frac{ءص}{ءن} = - \frac{٣}{٤}$ م / د

## الاختبار التاسع

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(أ) إذا كان س = $٤ ن^٢ + ٧$ ، ص = $\sqrt{ن^٣}$ ، ن = ١

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ....$

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ٢ (ء) ٣

الحل

$\frac{ءس}{ءن} = ٤ ن$ ، $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٣}{٢} \sqrt{ن}$ عندما : ن = ١ فإن :

$\frac{ءس}{ءن} = ٤$ ، $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٣}{٢}$ ، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{ن=١} = \left[\frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}\right]_{ن=١} = \frac{٣}{٨}$

[٢] (ب) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها مماس المنحنى $ص^٣ = س^٢$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ٨ لأقرب دقيقة

الحل

∵ $ص^{٣} = س^{٢}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ $٣\ ص^{٢} \times \frac{ءص}{ءس} = ٢\ س$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢\ س}{٣\ ص^{٢}}$

عند : س = ٨ فإن : $ص^{٣} = ٦٤$ ∴ ص = ٤

∴ $ظا\ \theta = \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٨ ، ٤)} = \frac{١}{٣}$ ، $\theta = ١٨^{\circ}$ لأقرب دقيقة

**[٣] (أ)** إذا كان : حا س = س ص أثبت أن :

$$س^{٢} ( ص + ص^{//} ) + ٢\ حتا\ س = ٢\ ص$$

**الحل**

∵ حا س = س ص (١) باشتقاق الطرفين مرتين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ $حتا\ س = ص + س\ ص^{/}$ و منها : $ص^{/} = \frac{١}{س} ( حتا\ س - ص )$ (٢)

، $-\ حا\ س = ص^{/} + ص^{/} + س\ ص^{//}$ بالتعويض من (١) ينتج :

$-\ س\ ص = ٢\ ص^{/} + س\ ص^{//}$ بالتعويض من (٢) ينتج :

$-\ س\ ص = \frac{٢}{س} ( حتا\ س - ص ) + س\ ص^{//}$ بالضرب × س ينتج :

$-\ س^{٢} ص = ٢\ حتا\ س - ٢\ ص + س^{٢} ص^{//}$ و منها :

$س^{٢} ( ص + ص^{//} ) + ٢\ حتا\ س = ٢\ ص$

**(ب)** إذا كان للمنحنى : $ص = ٢\ س^{٣} + ٣\ س^{٢} + ٤\ س + ٥$
مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة ( −١ ، ٢ )
أوجد معادلة المماس الآخر

**الحل**

∵ $ص = ٢\ س^{٣} + ٣\ س^{٢} + ٤\ س + ٥$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٦\ س^{٢} + ٦\ س + ٤$ ، $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١ ، ٢)} = ٤$

، ∵ المماسان متوازيان ∴ ميل المماس الآخر = ٤

∴ $٦\ س^{٢} + ٦\ س + ٤ = ٤$ و منها : س = −١ ، س = ٠

، بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج :

عند : س = −١ فإن : ص = ٢ و هى النقطة المعطاة ،

عند : س = ٠ فإن : ص = ٥ و هى النقطة التى عندها المماس الآخر

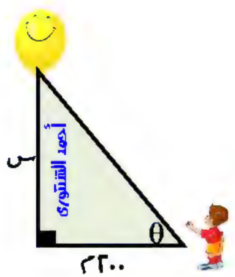
و تكون معادلة المماس الآخر هى :

ص − ٥ = ٤ × ( س − ٠ ) أى : ٤ س − ص + ٥ = ٠

**[٤] (أ)** يرتفع بالون رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨ متر / دقيقة فإذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض يبعد ٢٠٠ متراً عن موقع إطلاق البالون ، أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد له عندما يكون البالون على ارتفاع ٢٠٠ متراً

**الحل**

نفرض أن : س ارتفاع البالون عن سطح الأرض بعد ن دقيقة
، θ قياس زاوية ارتفاع نظر المشاهد حيث س ، θ دوال فى الزمن
من الشكل المقابل : $ظا\ \theta = \frac{١}{٢٠٠}\ س$




، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ $قا^{٢}\ \theta \times \frac{ء\theta}{ءن} = \frac{١}{٢٠٠} \times \frac{ءس}{ءن}$

عندما : س = ٢٠٠ م فإن : $\theta = \frac{١}{٤} \pi$

، ∵ $\frac{ءس}{ءن} = ٢٨$ م / د

∴ $قا^{٢}\ \frac{١}{٤}\pi \times \frac{ء\theta}{ءن} = \frac{٢٨}{٢٠٠}$ ∴ $٢ \times \frac{ء\theta}{ءن} = \frac{٢٨}{٢٠٠}$

و منها : $\frac{ء\theta}{ءن} = ٠,٠٧$ ء / د

## الاختبار العاشر

[١] اكمل ما يلى :

(٢) $\frac{د}{دس}(٥ - ٢ \text{ طتاس})^{٣} = ....$

الحل

(٢) $\frac{د}{دس}(٥ - ٢ \text{ طتاس})^{٣} = ٣(٥ - ٢ \text{ طتاس})^{٢} \times (-٢ \text{ قتا}^{٢}س)$

$= (-٦ \text{ قتا}^{٢}س)(٥ - ٢ \text{ طتاس})^{٢}$

[٢] (ب) إذا كانت المعادلتان البارامتريتان للدالة د حيث ص = د(س) هما : $س = ٢ن^{٣} + ٣$ ، $ص = ن^{٤}$ أوجد عند ن = ١ كل من : أولاً : معادلة مماس منحنى الدالة د ثانياً : $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$

الحل

$\because س = ٢ن^{٣} + ٣ \quad \therefore \frac{دس}{دن} = ٦ن^{٢}$

، $\because ص = ن^{٤} \quad \therefore \frac{دص}{دن} = ٤ن^{٣}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٢}{٣}ن^{٢}$

أولاً : ميل المماس $= \left[\frac{دص}{دس}\right]_{ن = ١} = \frac{٢}{٣}$

، $\because س = ٥$ ، $ص = ١$ عند $ن = ١$

$\therefore$ معادلة المماس هى : $ص - ١ = \frac{٢}{٣}(س - ٥)$

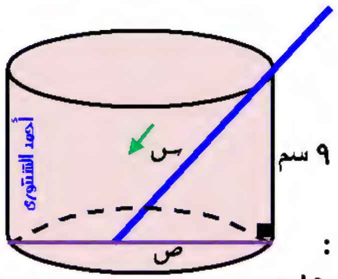
أى : $٢س - ٣ص - ٧ = ٠$

ثانياً : $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{د}{دن}\left(\frac{دص}{دس}\right) \times \frac{دن}{دس} = \frac{٤}{٣}ن \times \frac{١}{٦ن^{٢}} = \frac{١}{٩ن}$

$\therefore \left[\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}\right]_{ن = ١} = \frac{١}{٩}$

[٤] (ب) إناء على شكل اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩ سم و طول نصف القطر الداخلى لقاعدته ٦ سم ، وضع ساق معدنية طولها ١٦ سم ، فإذا كان معدل انزلاق الساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم / ث ، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها

الحل




بفرض أن : طول جزء الساق المنزلق مبتعداً عن حافة الاسطوانة = س سم

، بعد الساق على قاعدة الاسطوانة = ص سم

من هندسة الشكل :

$س^{٢} = ٨١ + ص^{٢} \qquad (١)$

عندما تصل الساق إلى نهاية قاعدة الاسطوانة فإن :

ص = ١٢ سم بالتعويض فى (١) ينتج : س = ١٥ سم

، باشتقاق طرفى (١) بالنسبة لـ ن ينتج : $٢س \frac{دس}{دن} = ٢ص \frac{دص}{دن}$

$\therefore ٢ \times ١٥ \times ٢ = ٢ \times ١٢ \frac{دص}{دن}$ و منها : $\frac{دص}{دن} = \frac{٥}{٢}$ سم / ث

# المتميز

# فى
# الرياضيات البحتة
# التفاضل و التكامل

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة الثانية

| $\int$ | $\frac{ءص}{ءس}$ | نهــــا س ← ∞ | لو$_م$ \| س \| |
|---|---|---|---|

## إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

## الوحدة الثانية .... تفاضل و تكامل الدوال الأسية و اللوغاريتمية

### ١ – ١ الدالة الأسية ذات اللوغاريتم الطبيعى و دالة اللوغاريتم الطبيعى

تذكر ما يلى :

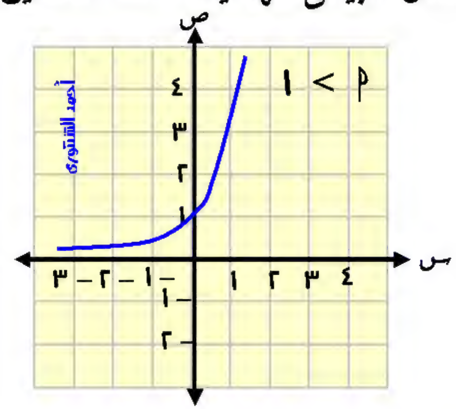
**[١] الدالة الأسية :**

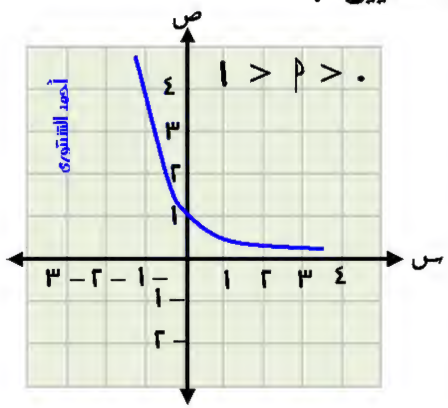
الدالة د : ح ← ح$_+$ حيث د ( س ) = أ$^{س}$ ، أ ∈ ح$_+$ − {١}

تسمى دالة أسية أساسها ( أ ) و هى دالة أحادية مجالها = ح

، و مداها = ح$_+$ ، و منحناها يمر بالنقط ( ٠ ، ١ )

الشكل البيانى لها يأخذ أحد الشكلين التاليين :



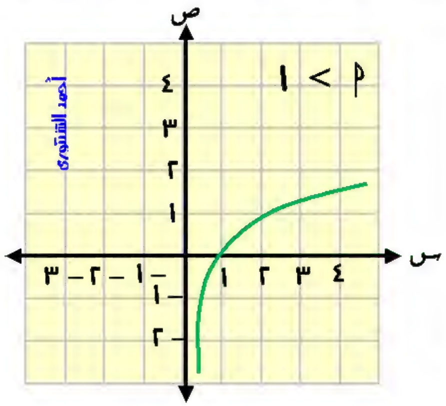

**[٢] الدالة اللوغاريتمية :**

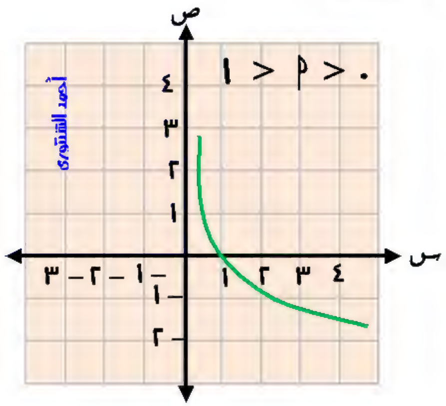
الدالة د : ح$_+$ ← ح حيث د ( س ) = لو$_{أ}$ س ، أ ∈ ح$_+$ − {١}

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها ( أ ) و هى دالة أحادية مجالها = ح$_+$

، و مداها = ح ، و منحناها يمر بالنقط ( ١ ، ٠ )

الشكل البيانى لها يأخذ أحد الشكلين التاليين :




**تعريف العدد ( هـ ) :**

يعرف العدد ( هـ ) بعدة طرق منها :

(١) $هـ = \lim_{س \to \infty} \left( ١ + \frac{١}{س} \right)^{س}$

(٢) $هـ = \lim_{س \to ٠} \left( ١ + س \right)^{\frac{١}{س}}$

**ملاحظات :**

(١) العدد ( هـ ) هو عدد غير نسبى حيث : ٢ < هـ < ٣

، هـ = ٢,٧١٨٢٨١٨

(٢) يمكن التعبير عن العدد ( هـ ) باستخدام متسلسلة تايلور بالصورة

$$هـ = ١ + \frac{١}{١!} + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + .... = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{ن!}$$

## نهايات تؤدى إلى قوى العدد هـ :

(١) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{أ س} = هـ^{أ}$ حيث : أ عدد نسبى

(٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س + أ} = هـ$ حيث : أ عدد نسبى

(٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{أ}{س}\right)^{س} = هـ^{أ}$ حيث : أ عدد نسبى

(٤) إذا كانت : أ ، ب ، حـ أعداد صحيحة فإن :

$$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + أ}{س + ب}\right)^{س + حـ} = هـ^{أ - ب}$$

### البرهان :

(١) المقدار $= \lim\limits_{س \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}\right]^{أ}$

$= \left[\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}\right]^{أ} = هـ^{أ}$

(٢) المقدار $= \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \times \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{أ}$

$= هـ \times (1 + 0)^{أ} = هـ \times 1 = هـ$

(٣) نضع : $ص = \frac{أ}{س}$ حيث : $س \neq 0$ $\therefore س = \frac{أ}{ص}$

، عندما : $س \to \infty$ فإن : $ص \to 0$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{أ}{ص}}$

$= \left[\lim\limits_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right]^{أ} = هـ^{أ}$

(٤) المقدار $= \lim\limits_{س \to \infty} \left[\frac{س + ب + أ - ب}{س + ب}\right]^{س + ب + حـ - ب}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \left[1 + \frac{أ - ب}{س + ب}\right]^{س + ب + حـ - ب}$

$= \lim\limits_{س + ب \to \infty} \left[1 + \frac{أ - ب}{س + ب}\right]^{س + ب} +$

$\lim\limits_{س + ب \to \infty} \left[1 + \frac{أ - ب}{س + ب}\right]^{حـ - ب}$

$= هـ^{أ - ب} \times 1 = هـ^{أ - ب}$

### برهان آخر :

بقسمة كل من البسط و المقام على س ينتج "

المقدار $= \lim\limits_{س \to \infty} \left[\frac{1 + \frac{أ}{س}}{1 + \frac{ب}{س}}\right]^{س + حـ} = \dfrac{\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{أ}{س}\right)^{س + حـ}}{\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{ب}{س}\right)^{س + حـ}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{أ}{س}\right)^{س} \times \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{أ}{س}\right)^{حـ}}{\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{ب}{س}\right)^{س} \times \lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{ب}{س}\right)^{حـ}}$

$= \dfrac{هـ^{أ} \times 1}{هـ^{ب} \times 1} = هـ^{أ - ب}$

### إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٣٦

أوجد :

(أ) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2} س}$　　(ب) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{2س + 5}$

الحـل

(أ) المقدار = $\lim_{س \to \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \right]^{\frac{1}{5}} = هـ^{\frac{1}{5}}$

(ب) المقدار = $\lim_{س \to \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} \right]^{2} \times \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{5}$

$= هـ^{2} \times 1 = هـ^{2}$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٣٨

أوجد :

(أ) $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{3}{س}\right)^{س}$ (ب) $\lim_{س \to \infty} \left(1 - \frac{1}{س}\right)^{2س}$

(حـ) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س + 1}\right)^{س}$ (ء) $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س + 5}{2س + 1}\right)^{س + 2}$

### الحل

(أ) بوضع : $ص = \frac{3}{س}$ ∴ $س = \frac{3}{ص}$ ، عندما : $س \to \infty$ فإن : $ص \to 0$ .

∴ المقدار = $\lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{3}{ص}} = \lim_{ص \to 0} \left[(1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right]^{3}$

$= هـ^{3}$

(ب) بوضع : $ص = -\frac{1}{س}$ ∴ $س = -\frac{1}{ص}$

، عندما : $س \to \infty$ فإن : $ص \to 0$ .

∴ المقدار = $\lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{2 \times -\frac{1}{ص}}$

$= \lim_{ص \to 0} \left[(1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right]^{-2} = هـ^{-2}$

(حـ) المقدار = $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + 1}{س}\right)^{-س}$

$= \lim_{س \to \infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{س}\right) \right]^{-1} = هـ^{-1}$

(ء) المقدار = $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س + 1 + 4}{2س + 1}\right)^{س + 2}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{4}{2س + 1}\right)^{س + 2}$

بوضع : $ص = 2س + 1$ ∴ $2س = ص - 1$

، $س = \frac{1}{2}ص - \frac{1}{2}$ ، عندما : $س \to \infty$ فإن : $ص \to \infty$

∴ المقدار = $\lim_{ص \to \infty} \left(1 + \frac{4}{ص}\right)^{\frac{1}{2}ص + \frac{3}{2}}$

$= \lim_{ص \to \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{ص}\right)^{ص}\right]^{\frac{1}{2}} \times \lim_{ص \to \infty} \left(1 + \frac{4}{ص}\right)^{\frac{3}{2}}$

$= (هـ^{4})^{\frac{1}{2}} \times 1 = هـ^{2}$

## الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي :

هى دالة أساسها هـ ، $د(س) = هـ^{س}$

### ملاحظات :

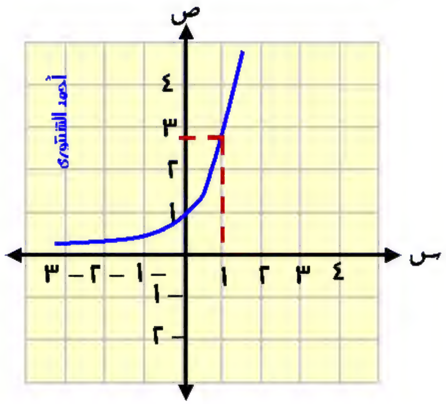
(١) مجالها = ح

(٢) مداها = ] ٠ ، ∞ [

(٣) المنحنى يمر بالنقطتين : (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)

(٤) الدالة أحادية

أى تقبل وجود دالة عكسية تعرف بدالة اللوغاريتم الطبيعي



## دالة اللوغاريتم الطبيعى :

هى لوغاريتمية أساسها هـ ، د ( س ) = لوهـ س ، س ∈ ح+

### ملاحظات :

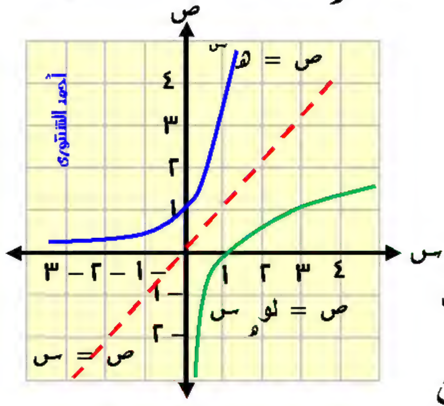
(١) مجالها = ح+

(٢) مداها = ح

(٣) المنحنى يمر بالنقطتين

( ١ ، ٠ ) ، ( هـ ، ١ )

(٤) دالة عكسية للدالة : ص = هـ^س




الشكل المقابل يبين العلاقة بين الدالتين

(٥) تطبق التحويلات الهندسية " الإزاحة الرأسية و الإزاحة الأفقية و الانعكاس فى محور السينات و التمدد أو الانكماش على منحنى كل من الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى و دالة اللوغاريتم الطبيعى

## خواص اللوغاريتم الطبيعى :

[١] إذا كان : س ∈ ح+ ، ص ∈ ح ، أ ∈ ح+ − {١} فإن :

(١) الصورة : لوهـ س = ص    تكافئ الصورة : هـ^ص = س

(٢) $\text{هـ}^{\text{لوهـ س}}$ = س

(٣) لوهـ هـ = ١

(٤) لوهـ ١ = صفر

(٥) لوأ س = $\dfrac{\text{لوهـ س}}{\text{لوهـ أ}}$

[٢] إذا كان : س ، ص ∈ ح+ ، ن ∈ ح فإن :

(١) لوهـ س ص = لوهـ س + لوهـ ص

(٢) لوهـ $\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لوهـ س − لوهـ ص

(٣) لوهـ $\text{س}^{\text{ن}}$ = ن لوهـ س

(٤) لوهـ س × لوس هـ = ١

## النهايات و اللوغاريتم الطبيعى :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{أ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}$ = لوهـ أ    حيث : أ > ٠

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{لوأ}(1 + \text{س})}{\text{س}}$ = لوأ هـ

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{لوهـ}(1 + \text{س})}{\text{س}}$ = ١

(٤) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{هـ}^{\text{س}}$ = ١

(٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}}$ = ١

### البرهان :

(١) نفرض أن : ص = أ^س − ١ ، عندما : س ← ٠ فإن : ص ← ٠

، أ^س = ١ + ص    بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج :

لوهـ أ^س = لوهـ ( ١ + ص )    ∴ س لوهـ أ = لوهـ ( ١ + ص )

∴ س = $\dfrac{\text{لوهـ}(1 + \text{ص})}{\text{لوهـ أ}}$

∴ المقدار $= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{ص} \times \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}}{\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{ص})}$

$= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}}{\frac{1}{\text{ص}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{ص})}$

$= \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}}{\lim\limits_{\text{ص} \to 0} \text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}} = \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}$

**و بصفة عامة :**

$$\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{أ}^{\text{ك س}} - 1}{\text{م س}} = \dfrac{\text{ك}}{\text{م}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}$$

**(٢)** نفرض أن : ص = $\text{لو}_{\text{أ}}(1+\text{س})$ ، عندما : س ← ٠ فإن : ص ← ٠

، $\text{أ}^{\text{ص}} = 1 + \text{س}$ ∴ $\text{س} = \text{أ}^{\text{ص}} - 1$

∴ المقدار $= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{ص}}{\text{أ}^{\text{ص}} - 1} = \dfrac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{أ}} = \text{لو}_{\text{أ}}\,\text{هـ}$

**(٣)** نفرض أن : ص = $\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{س})$ ، عندما : س ← ٠ فإن : ص ← ٠

، $\text{هـ}^{\text{ص}} = 1 + \text{س}$ ∴ $\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}} - 1$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{س})}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{ص}}{\text{هـ}^{\text{ص}} - 1} = \dfrac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}} = 1$

**و بصفة عامة :**

$$\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{أ س})}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

**(٤)** المقدار $= \text{هـ}^{\text{صفر}} = 1$

**(٥)** نفرض أن : ص = $\text{هـ}^{\text{س}} - 1$ ، عندما : س ← ٠ فإن : ص ← ٠

، $\text{هـ}^{\text{س}} = 1 + \text{ص}$ ∴ $\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{ص}) = \text{س}$

∴ المقدار $= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{\text{ص}}{\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{ص})}$

$= \lim\limits_{\text{ص} \to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{\text{ص}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{ص})}$

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{\text{ص} \to 0} \text{لو}_{\text{هـ}}(1+\text{ص})^{\frac{1}{\text{ص}}}} = \dfrac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ}} = 1$

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٤٠

أثبت أن : $\lim\limits_{\text{ن} \to 0} \text{ن}\left[\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ن}+1) - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ن}\,\right] = 1$

**الحل**

الطرف الأيمن $= \lim\limits_{\text{ن} \to 0} \left[\,\text{ن}\left(\dfrac{\text{ن}+1}{\text{ن}}\right)\right]$

$= \lim\limits_{\text{ن} \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1$

## حل تمارين ( ١ − ٢ ) صفحة ٤٠ بالكتاب المدرسى

**أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة**

**(١)** $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{\text{س}}\right)^{2\text{س}}$ يساوى ....

(أ) $1$ (ب) $2$ (جـ) $\text{هـ}$ (د) $\text{هـ}^{2}$

**(٢)** $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (1 + \text{س})^{\frac{1}{3\text{س}}}$ يساوى ....

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\text{هـ}^{3}$ (جـ) $\text{هـ}^{\frac{1}{3}}$ (د) $\frac{\text{هـ}}{3}$

(٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{2^{\text{س}}-1}{3\text{س}}$ يساوي ....

(أ) ٣ لوهـ ٢ (ب) $\frac{1}{3}$ لوهـ ٢ (جـ) لوهـ $\frac{2}{3}$ (د) ٢ لوهـ ٣

(٤) $\lim\limits_{\text{س}\to 1} \dfrac{\text{لوهـ س}}{\text{س}-1}$ يساوي ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) هـ (د) $\text{هـ}^{-1}$

**الحل**

(١) المقدار $= \lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{2} = \text{هـ}^{2}$

(٢) المقدار $= \lim\limits_{\text{س}\to 0}\left[\left(1+\text{س}\right)^{\frac{1}{\text{س}}}\right]^{\frac{1}{2}} = \text{هـ}^{\frac{1}{2}}$

(٣) المقدار $= \frac{1}{3}\lim\limits_{\text{س}\to 0}\dfrac{2^{\text{س}}-1}{\text{س}} = \frac{1}{3}$ لوهـ ٢

(٤) نضع : ص = س − ١ ∴ س = ص + ١ ، عندما : س ← ٠ فإن : ص ← ٠

∴ المقدار $= \lim\limits_{\text{ص}\to 0}\dfrac{\text{لوهـ}(1+\text{ص})}{\text{ص}} = 1$

أوجد :

(٥) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}+1}$

(٦) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}+1}\right)^{\text{س}}$

(٧) $\lim\limits_{\text{م}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م س}}$

(٨) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(\dfrac{\text{س}+7}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

(٩) $\lim\limits_{\text{س}\to 0}\dfrac{\text{لوهـ}(1+2\text{س})}{\text{س}}$

(١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to 0}\dfrac{\text{لوهـ}(1+\text{س}^2)}{\text{س}^2}$

**الحل**

(٥) المقدار $= \lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)$

$= \text{هـ} \times 1 = \text{هـ}$

(٦) بوضع : ص = س + ١ ∴ س = ص − ١ ، عندما : س ← ∞ فإن : ص ← ∞

∴ المقدار $= \lim\limits_{\text{ص}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\text{ص}}\right)^{\text{ص}-1}$

$= \lim\limits_{\text{ص}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\text{ص}}\right)^{\text{ص}} \times \left(1+\frac{1}{\text{ص}}\right)^{-1}\right] = \text{هـ} \times 1 = \text{هـ}$

(٧) المقدار $= \lim\limits_{\text{م}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right]^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

(٨) المقدار $= \lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(\dfrac{\text{س}+3+4}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}+4}$

$= \lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{\text{س}+3}\right)^{\text{س}} \times \left(1+\dfrac{4}{\text{س}+3}\right)^{4}\right]$

$= \text{هـ}^{4} \times 1 = \text{هـ}^{4}$

(٩) المقدار $= 2 \times \lim\limits_{2\text{س}\to 0}\dfrac{\text{لوهـ}(1+2\text{س})}{2\text{س}} = 2 \times 1 = 2$

(١٠) المقدار $= \lim\limits_{\text{س}^2\to 0}\dfrac{\text{لوهـ}(1+\text{س}^2)}{\text{س}^2} = 1$

أوجد النهايات الآتية :

(١١) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(1+\frac{4}{\text{س}}\right)^{\text{س}+3}$

(١٢) $\lim\limits_{\text{س}\to 0}\dfrac{\text{هـ}^{-\text{س}}-1}{\text{س}}$

(١٣) $\lim\limits_{\text{س}\to 0}\dfrac{\text{أ}^{2\text{س}}-1}{\text{س}}$

(١٤) $\lim\limits_{\text{س}\to 0}\left(1+3\,\text{ظا}^2\text{س}\right)^{\text{ظتا}^2\text{س}}$

(١٥) $\lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left(\dfrac{2\text{س}-1}{2\text{س}+1}\right)^{\text{س}}$

(١٦) $\lim\limits_{\text{س}\to 0}\dfrac{\text{لوهـ}(1+3\text{س}^2)}{2\text{س}^2}$

**الحل**

(١١) المقدار $= \lim\limits_{\text{س}\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \times \left(1+\frac{4}{\text{س}}\right)^{3}\right] = \text{هـ}^{4} \times 1 = \text{هـ}^{4}$

(١٢) بالضرب بسطاً و مقاماً × $\text{هـ}^{\text{س}}$

∴ المقدار $= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[ \dfrac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}} \times \dfrac{١ - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}} \right]$

$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[ \left(\dfrac{١}{\text{هـ}}\right)^{\text{س}} \times \dfrac{-(\text{هـ}^{\text{س}} - ١)}{\text{س}} \right]$

$= ١ \times (-١) = -١$

(١٣) المقدار $= ٢ \times \underset{٢\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ}^{٢\text{س}} - ١}{٢\text{س}} = ٢ \times \text{لوهـ أ} = ٢ \text{ لوهـ أ}$

(١٤) المقدار $= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(١ + \dfrac{٣}{\text{ظتا}^{٢}\text{س}}\right)^{\text{ظتا}^{٢}\text{س}} = \text{هـ}^{٣}$

(١٥) بوضع : ص = ٢ س + ١ ∴ ٢ س = ص − ١

، $\text{س} = \frac{١}{٢}\text{ص} - \frac{١}{٢}$ ، عندما : س ← ∞ فإن : ص ← ∞

∴ المقدار $= \underset{\text{ص} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{ص} - ٢}{\text{ص}}\right)^{\frac{١}{٢}\text{ص} - \frac{١}{٢}} = \underset{\text{ص} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \dfrac{-٢}{\text{ص}}\right)^{\frac{١}{٢}\text{ص} - \frac{١}{٢}}$

$= \underset{\text{ص} \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\left(١ + \dfrac{-٢}{\text{ص}}\right)^{\text{ص}}\right]^{\frac{١}{٢}} \times \underset{\text{ص} \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \dfrac{-٢}{\text{ص}}\right)^{-\frac{١}{٢}}$

$= \left(\text{هـ}^{-٢}\right)^{\frac{١}{٢}} \times ١ = \text{هـ}^{-١}$

(١٦) المقدار $= \dfrac{٣}{٢} \times \underset{٣\text{س}^{٢} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{لوهـ}(١ + ٣\text{س}^{٢})}{٣\text{س}^{٢}} = \dfrac{٣}{٢} \times ١ = \dfrac{٣}{٢}$



## ٢ − ١ مشتقة الدوال الأسية و اللوغاريتمية

نعلم أن :

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} = ١$$

**مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى :**

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

**البرهان :**

∵ $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{\text{س}}$ ، $\text{د}(\text{س} + \text{و}) = \text{هـ}^{\text{س} + \text{و}}$

∴ $\text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{و} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}+\text{و}} - \text{هـ}^{\text{س}}}{\text{و}} = \underset{\text{و} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}(\text{هـ}^{\text{و}} - ١)}{\text{و}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \times \underset{\text{و} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{\text{و}} - ١}{\text{و}} = \text{هـ}^{\text{س}} \times ١ = \text{هـ}^{\text{س}}$

أى أن : $\dfrac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{هـ}^{\text{س}}) = \text{هـ}^{\text{س}}$

**إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٤٢**

أوجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان :

(أ) $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{حتا } ٢\text{س}$

(ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ حا س}$

(جـ) $\text{ص} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{طا س}}$

**الحل**

(أ) ∵ $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{حتا } ٢\text{س}$

∴ $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{هـ}^{\text{س}} - ٢ \text{ حا } ٢\text{س}$

(ب) ∵ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ حا س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ حتا س} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{ حا س} = \text{هـ}^{\text{س}} ( \text{حتا س} + \text{حا س} )$

(جـ) ∵ $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{طا س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{طا س هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} \text{قا}^{2}\text{س}}{\text{طا}^{2}\text{س}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} (\text{طا س} - \text{قا}^{2}\text{س})}{\text{طا}^{2}\text{س}}$

## إجابة تفكير ناقد صفحة ٤٢

ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى : $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ عند أى نقطة عليه و الإحداثى الصادى لهذه النقطة ؟ فسر اجابتك

الحل

∵ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه = $\text{هـ}^{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص}$ أى أن :

ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه هو نفسه الإحداثى الصادى لهذه النقطة

## قاعدة السلسلة :

إذا كانت : ع دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ،

$\text{د}(\text{ع}) = \text{هـ}^{\text{ع}}$ فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} ( \text{هـ}^{\text{ع}} ) = \text{هـ}^{\text{ع}} . \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٤٢

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان :

(أ) $\text{ص} = ٢\text{س} + \text{هـ}^{٦\text{س}}$ (ب) $\text{ص} = ٣ \text{ هـ}^{\text{قا س}}$

(جـ) $\text{ص} = ( \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}} )^{٣}$

الحل

(أ) ∵ $\text{ص} = ٢\text{س} + \text{هـ}^{٦\text{س}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ + ٦ \text{ هـ}^{٦\text{س}}$

(ب) ∵ $\text{ص} = ٣ \text{ هـ}^{\text{قا س}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ \text{ قا س طا س هـ}^{\text{قا س}}$

(جـ) ∵ $\text{ص} = ( \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}} )^{٣}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ ( \text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}} )^{٢} ( ٢ \text{هـ}^{٢\text{س}} - ٢ \text{هـ}^{-٢\text{س}} )$

## مشتقة الدالة الأسية للأساس أ :

إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}}$ فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \text{أ}^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{أ}$

البرهان :

∵ $\text{أ} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$ " من خواص اللوغاريتمات "

∴ $\text{أ}^{\text{س}} = [ \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} ]^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$

∴ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} ( \text{أ}^{\text{س}} ) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}} ( \text{هـ}^{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} )$

$= \text{هـ}^{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} \times \text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ} = \text{أ}^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{أ}$

و بوجه عام فإن :

$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} ( \text{أ}^{\text{ع}} ) = \text{أ}^{\text{ع}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{أ} . \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٤٣

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كان :

(أ) $\text{ص} = ٥^{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}$ (ب) $\text{ص} = ٢^{\text{قا}^{٢}\text{س}}$

(جـ) $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س}} \text{ أ}^{\text{س}^{٢} - ٥}$

الحل

(أ) ∵ $ص = ٥^{س^٢ + ٢س}$

نضع : $ع = س^٢ + ٢س$ ∴ $\frac{دع}{دس} = ٢س + ٢$

، $ص = ٥^ع$ ∴ $\frac{دص}{دع} = ٥^ع \times لو_هـ ٥$

، $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = ٥^ع \times لو_هـ ٥ \times (٢س + ٢)$

$= (٢س + ٢) \times ٥^{س^٢ + ٢س} \times لو_هـ ٥$

**حل آخر**

∵ $ص = ٥^{س^٢ + ٢س}$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٥^{س^٢ + ٢س} \times لو_هـ ٥ \times \frac{د}{دس}(س^٢ + ٢س)$

$= ٥^{س^٢ + ٢س} \times لو_هـ ٥ \times (٢س + ٢)$

(ب) ∵ $ص = ٢^{قا^٢ س}$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٢^{قا^٢ س} \times لو_هـ ٢ \times \frac{د}{دس}(قا^٢ س)$

$= ٢^{قا^٢ س} \times لو_هـ ٢ \times (٢ قا^٢ س طا س)$

(جـ) ∵ $ص = هـ^{٢س} أ^{س^٢ - ٥}$

∴ $\frac{دص}{دس} = ٢هـ^{٢س} أ^{س^٢ - ٥} + هـ^{٢س} أ^{س^٢ - ٥} \times لو_هـ أ \times ٢س$

$= ٢هـ^{٢س} أ^{س^٢ - ٥} (١ + لو_هـ أ)$

## مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي :

إذا كانت : $د(س) = لو_هـ س$ ، $س > ٠$ .

فإن : $د'(س) = \frac{١}{س}$

**البرهان :**

∵ إذا كان : $ص = لو_هـ س$ فإن : $س = هـ^ص$

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$١ = هـ^ص \frac{دص}{دس}$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{هـ^ص} = \frac{١}{س}$

أى أن : $\frac{د}{دس}(لو_هـ س) = \frac{١}{س}$

**ملاحظات :**

(١) إذا كانت : $د(س) = لو_هـ(-س)$ ، $س < ٠$ .

فإن : $د'(س) = \frac{١}{-س} \times -١ =$

و بصفة عامة :

$\frac{د}{دس}[لو_هـ |س|] = \frac{١}{س}$ لكل $س \neq ٠$ .

(٢) $لو_هـ(-س)$ له معنى لكل $س < ٠$ .

، ليس له معنى لكل $س > ٠$ .

**إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٤٤**

أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتى :

(أ) $ص = ٥ - ٣ لو_هـ س$ (ب) $ص = س^٢ لو_هـ س$

(جـ) $ص = \frac{١ - ٢ لو_هـ س}{لو_هـ س}$

**الحل**

(أ) ∵ ص = ٥ − ٣ لوـهـ س ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٣ \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{-٣}{\text{س}}$

(ب) ∵ ص = س² لوـهـ س

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^٢ \times \frac{١}{\text{س}} + ٢\,\text{س لوـهـ س} = \text{س} + ٢\,\text{س لوـهـ س}$

(جـ) ∵ $\text{ص} = \frac{١ - ٢\,\text{لوـهـ س}}{\text{لوـهـ س}} = (\text{لوـهـ س})^{-١} - ٢$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -(\text{لوـهـ س})^{-٢} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{-١}{\text{س}\,(\text{لوـهـ س})^٢}$

**إجابة تفكير ناقد صفحة ١٢**

ما العلاقة بين ميل المماس للمنحنى : ص = لوـهـ س عند أى نقطة عليه و الإحداثى السينى لنقطة التماس ؟ فسر اجابتك

**الحل**

∵ ص = لوـهـ س ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ميل المماس = $\frac{١}{\text{س}}$

أى أن : ميل المماس للمنحنى = مقلوب الإحداثى السينىلنقطة التماس

**قاعدة السلسلة :**

إذا كانت : ع دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ،

د ( ع ) = لوـهـ ع فإن : $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{لوـهـ ع}) = \frac{١}{\text{ع}} . \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

**و بصفة عامة :**

إذا كانت : ع دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}[\text{لوـهـ}\,|\text{ع}|] = \frac{\text{ع}'}{\text{ع}}$$



**إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٤٥**

أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكل مما يأتى :

(أ) ص = لوـهـ (٧ س − ٣)²  (ب) ص = ٢ س² لوـهـ س³

(جـ) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{لوـهـ س}}$

**الحل**

(أ) ∵ ص = لوـهـ (٧ س − ٣)²

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{(٧\text{س} - ٣)^٢} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}(٧\text{س} - ٣)^٢$

$= \frac{١}{(٧\text{س} - ٣)^٢} \times ٢\,(٧\text{س} - ٣) \times ٧ = \frac{١٤}{٧\text{س} - ٣}$

(ب) ∵ ص = ٢ س² لوـهـ س³

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤\,\text{س لوـهـ س}^٣ + ٢\,\text{س}^٢ \times \frac{١}{\text{س}^٣} \times ٣\,\text{س}^٢$

$= ٤\,\text{س لوـهـ س}^٣ + ٦\,\text{س}$

(جـ) ∵ $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{لوـهـ س}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{لوـهـ س} \times ١ - \text{س} \times \frac{١}{\text{س}}}{(\text{لوـهـ س})^٢} = \frac{\text{لوـهـ س} - ١}{(\text{لوـهـ س})^٢}$

**مشتقة الدالة اللوغاريتمية للأساس أ :**

إذا كانت : د ( س ) = $\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{س}$

فإن : $\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س لوـهـ أ}} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{أ}}\,\text{هـ}$

**البرهان :**

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\left(\text{لو}_{أ}\,\text{س}\right) = \frac{ء}{ء\text{س}}\left(\frac{\text{لو}_{هـ}\,\text{س}}{\text{لو}_{هـ}\,أ}\right)$$

$$= \frac{١}{\text{لو}_{هـ}\,أ} \times \frac{ء}{ء\text{س}}\left(\text{لو}_{هـ}\,\text{س}\right)$$

$$= \frac{١}{\text{لو}_{هـ}\,أ} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}_{أ}\,\text{هـ}$$

**و بوجه عامة :**

إذا كانت : ع دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ،

د ( ع ) = $\text{لو}_{أ}$ ع    فإن :

$$\frac{ء}{ء\text{س}}\left(\text{لو}_{أ}\,ع\right) = \frac{١}{ع\,\text{لو}_{هـ}\,أ} \cdot \frac{ءع}{ء\text{س}} = \frac{١}{ع}\,\text{لو}_{أ}\,\text{هـ} \cdot \frac{ءع}{ء\text{س}}$$

**إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٤٦**

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند قيم س المعطاة :

(أ) ص = $\text{لو}_{٢}$ ٥ س ، س = ٢

(ب) ص = ٤ لو ( ٣ س + ١ ) ، س = ١

(حـ) ص = $\text{لو}_{٢}\left(٢\text{س}^{٢} - ٣\right)^{٤}$ ، س = ١

(ء) ص = ٣ $\left(\text{لو}\,\text{س}\right)^{٢}$ ، س = ٣

الحل

(أ) ∵ ص = $\text{لو}_{٢}$ ٥ س    ∴ $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = \frac{١}{٥\text{س}} \times \frac{٥}{\text{لو}_{هـ}\,٢} = \frac{١}{\text{س}\,\text{لو}_{هـ}\,٢}$

∴ ميل المماس = $\left[\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}}\right]_{\text{س}=٢} = \frac{١}{٢\,\text{لو}_{هـ}\,٢} \simeq ٠٫٧٢$

(ب) ∵ ص = ٤ لو ( ٣ س + ١ )

∴ $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = ٤ \times \frac{١}{٣\text{س}+١} \times \frac{١}{\text{لو}_{هـ}\,١٠} \times ٣ = \frac{١٢}{(٣\text{س}+١)\times\text{لو}_{هـ}\,١٠}$

∴ ميل المماس = $\left[\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}}\right]_{\text{س}=١} = \frac{١٢}{٤\,\text{لو}_{هـ}\,١٠} \simeq ١٫٣$

(حـ) ∵ ص = $\text{لو}_{٢}\left(٢\text{س}^{٢} - ٣\right)^{٤}$

∴ $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = \frac{١}{\left(٢\text{س}^{٢}-٣\right)^{٤}} \times \frac{١}{\text{لو}_{هـ}\,٢} \times ٤\left(٢\text{س}^{٢}-٣\right)^{٣} \times ٤\,\text{س}$

$$= \frac{١٦\,\text{س}}{\left(٢\text{س}^{٢}-٣\right)\times\text{لو}_{هـ}\,٢}$$

∴ ميل المماس = $\left[\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}}\right]_{\text{س}=١} = \frac{١٦}{-\text{لو}_{هـ}\,٢} \simeq -\,٢٣٫٠٨$

(ء) ∵ ص = ٣ $\left(\text{لو}\,\text{س}\right)^{٢}$

∴ $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = ٣ \times ٢\,\text{لو}\,\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{لو}_{هـ}\,١٠} = \frac{٦\,\text{لو}\,\text{س}}{\text{س}\times\text{لو}_{هـ}\,١٠}$

∴ ميل المماس = $\left[\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}}\right]_{\text{س}=٣} = \frac{٦\,\text{لو}\,٣}{٣\times\text{لو}_{هـ}\,١٠} \simeq ٠٫٤١٤$

**إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ٤٦**

إذا كان العمودى للمنحنى : ص = $\text{لو}_{هـ}$ ٢ س عند النقطة أ ( ١ ، $\text{لو}_{هـ}$ ٢ ) يقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد $\overline{\text{أ ب}}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

الحل

(أ) ∵ ص = $\text{لو}_{هـ}$ ٢ س    ∴ $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = \frac{١}{٢\text{س}} \times ٢ = \frac{١}{\text{س}}$

∴ ميل المماس = $\left[\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}}\right]_{(١\,،\,\text{لو}_{هـ}\,٢)} = ١$

∴ ميل العمودى عند النقطة أ ( ١ ، $\text{لو}_{هـ}$ ٢ ) = − ١

، معادلة العمودى عند النقطة أ ( ١ ، $\text{لو}_{هـ}$ ٢ ) هى :

ص − $\text{لو}_{هـ}$ ٢ = ( − ١ ) × ( س − ١ )

أى : س + ص − $\text{لو}_{هـ}$ ٢ − ١ = ٠

، ∵ العمودى يقطع محور السينات

∴ نضع : ص = ٠ فى معادلة العمودى فينتج : س = لوهـ ٢ + ١

∴ إحداثيات نقطة ب هى : ( لوهـ ٢ + ١ ، ٠ )

∴ $(\text{أ ب})^2 = (\text{لوهـ } ٢ + ١ - ١)^2 + (٠ - \text{لوهـ } ٢)^2$

$= (\text{لوهـ } ٢)^2 + (\text{لوهـ } ٢)^2 = ٢ \times (\text{لوهـ } ٢)^2$

∴ $\text{أ ب} = \sqrt{٢}\ \text{لوهـ } ٢ = ٠,٩٨$ أى أن : طول $\overline{\text{أ ب}} = ٠,٩٨$ وحدة طول

**الاشتقاق اللوغاريتمى :**

يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرات بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لطرفيها و استخدام خواص اللوغاريتمات فى تبسيط العلاقة قبل إجراء عملية الاشتقاق

**إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ٤٧**

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يأتى :

(أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢\text{س}}$ (ب) $\text{ص} = (\text{حا س})^{\text{س}}$

(حـ) $\text{ص}^2 = ٣^{\text{س}} \times ٢^{\text{ص}}$

**الحل**

(أ) ∵ $\text{ص} = \text{س}^{٢\text{س}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج :

لوهـ ص = ٢ س لوهـ س باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{١}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ \times \text{لوهـ س} + ٢\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} = ٢\ \text{لوهـ س} + ٢$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{ص} (\text{لوهـ س} + ١) = ٢\ \text{س}^{٢\text{س}} (\text{لوهـ س} + ١)$

(ب) ∵ $\text{ص} = (\text{حا س})^{\text{س}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج :

لوهـ ص = س لوهـ حا س باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{١}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لوهـ حا س} + \text{س} \times \frac{١}{\text{حتا س}} \times \text{حا س}$

∴ $\frac{١}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لوهـ حا س} + \text{س طتا س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ص} ( \text{لوهـ حا س} + \text{س طتا س} )$

$= (\text{حا س})^{\text{س}} ( \text{لوهـ حا س} + \text{س طتا س} )$

(حـ) ∵ $\text{ص}^2 = ٣^{\text{س}} \times ٢^{\text{ص}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج :

٢ لوهـ ص = س لوهـ ٣ + ص لوهـ ٢

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{٢}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لوهـ } ٣ + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \text{لوهـ } ٢$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \left( \frac{٢}{\text{ص}} - \text{لوهـ } ٢ \right) = \text{لوهـ } ٣$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لوهـ } ٣}{\frac{٢}{\text{ص}} - \text{لوهـ } ٢}$

**إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ٤٨**

إذا كان : $\text{ص} = \text{أ هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}$ أثبت أن :

$\text{س ص ص}'' + ٢\ \text{ص ص}' - \text{س ص}'^2 = ٠$

**الحل**

∵ $\text{ص} = \text{أ هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج :

$\text{لوهـ ص} = \text{لوهـ أ} + \frac{\text{ب}}{\text{س}}$ بالضرب × س ينتج :

س لوهـ ص = س لوهـ أ + ب باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{لوهـ ص} + \text{س} \times \frac{١}{\text{ص}} \times \text{ص}' = \text{لوهـ أ}$ (١) بالضرب × ص ينتج :

$\text{ص لوهـ ص} + \text{س ص}' = \text{ص لوهـ أ}$

باشتقاق الطرفين مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ص}'\ \text{لوهـ ص} + \text{ص} \times \frac{١}{\text{ص}} \times \text{ص}' + \text{ص}' + \text{س ص}'' = \text{ص}'\ \text{لوهـ أ}$

∴ $\text{ص}'\ \text{لوهـ ص} + ٢\ \text{ص}' + \text{س ص}'' = \text{ص}'\ \text{لوهـ أ}$

بالتعويض من (١) ينتج :

ص′ لوهـ ص + ٢ ص′ + س ص″ = ص′ × ( لوهـ ص + س × $\frac{١}{ص}$ × ص′ )

بالضرب × ص ينتج :

ص ص′ لوهـ ص + ٢ ص ص′ + س ص ص″ = ص ص′ لوهـ ص + س ص′$^{٢}$

∴ ٢ ص ص′ + س ص ص″ = س ص′$^{٢}$ أى أن :

س ص ص″ + ٢ ص ص′ − س ص′$^{٢}$ = ٠ .

**حل آخر**

∵ ص = أ هـ$^{\frac{ب}{س}}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س ينتج :

ص′ = أ هـ$^{\frac{ب}{س}}$ × $\frac{-ب}{س^{٢}}$ = ص × $\frac{-ب}{س^{٢}}$ بالضرب × س$^{٢}$ ينتج :

س$^{٢}$ ص′ = − ص ب (١)

باشتقاق الطرفين مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

س$^{٢}$ ص″ + ٢ س ص′ = − ص′ ب بالضرب × ص ينتج :

س$^{٢}$ ص ص″ + ٢ س ص ص′ = ص′ ( − ص ب )

بالتعويض من (١) ينتج :

س$^{٢}$ ص ص″ + ٢ س ص ص′ = ص′ × ( س$^{٢}$ ص′ )

س$^{٢}$ ص ص″ + ٢ س ص ص′ = س$^{٢}$ ص′$^{٢}$ بالقسمة ÷ س ينتج :

س ص ص″ + ٢ ص ص′ = س ص′$^{٢}$ أى أن :

س ص ص″ + ٢ ص ص′ − س ص′$^{٢}$ = ٠ .



## حل تمارين ( ١ − ٢ ) صفحة ١٣ بالكتاب المدرسى

**أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة**

(١) إذا كانت د ( س ) = هـ$^{٣س}$ فإن : د′ ( س ) = ....

(أ) هـ$^{٣س}$　(ب) ٣ هـ$^{٣س}$　(جـ) ٩ هـ$^{٣س}$　(د) ٣ هـ$^{٢س}$

(٢) إذا كانت د ( س ) = أ هـ$^{س}$ فإن : د′ ( − ٢ ) = ....

(أ) − د ( ٢ )　(ب) − د′ ( ٢ )　(جـ) − د ( − ٢ )　(د) د ( − ٢ )

(٣) منحنى الدالة د : د ( س ) = ١ + لوهـ ( س − ٢ ) هو نفس منحنى الدالة ر : ر ( س ) = لوهـ س بالانتقال ....

(أ) ( ١ ، ٢ )　(ب) ( ١ ، − ٢ )　(جـ) ( − ٢ ، ١ )　(د) ( ٢ ، ١ )

(٤) النسبة بين ميل مماس المنحنى : ص = لوهـ ٣ $\sqrt{س + ١}$ و ميل مماس المنحنى : ص = لوهـ ٥ $\sqrt{س + ١}$ عند س = أ كنسبة ....

(أ) ٣ : ٥　(ب) ٥ : ٣　(جـ) ١ : ١　(د) لوهـ ٣ : لوهـ ٥

**الحل**

(١) ∵ د ( س ) = هـ$^{٣س}$　∴ د′ ( س ) = ٣ هـ$^{٣س}$

(٢) ∵ د ( س ) = أ هـ$^{س}$　∴ د′ ( س ) = أ هـ$^{س}$

، د′ ( − ٢ ) = أ هـ$^{-٢}$ = د ( − ٢ )

(٣) ∵ د ( س ) = ١ + لوهـ ( س − ٢ ) ، ر ( س ) = لوهـ س

∴ منحنى الدالة د ( س ) = ١ + لوهـ ( س − ٢ ) هو نفس منحنى الدالة ر ( س ) = لوهـ س بالانتقال ( ٢ ، ١ )

(٤) $\because \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} ٣\sqrt{\text{س}+١}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{٣\sqrt{\text{س}+١}} \times \frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}+١}} = \frac{١}{٢(\text{س}+١)}$

$\therefore$ ميل المماس $(\text{م}_١) = [\text{ص}']_{\text{س}=\text{أ}} = \frac{١}{٢(\text{أ}+١)}$

، $\because \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} ٥\sqrt{\text{س}+١}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{٥\sqrt{\text{س}+١}} \times \frac{٥}{٢\sqrt{\text{س}+١}} = \frac{١}{٢(\text{س}+١)}$

$\therefore$ ميل المماس $(\text{م}_٢) = [\text{ص}']_{\text{س}=\text{أ}} = \frac{١}{٢(\text{أ}+١)}$

$\therefore \text{م}_١ : \text{م}_٢ = ١ : ١$

أوجد المشتقة الأولى لكل من :

(٥) $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}^٥}$ (٦) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢ - \text{س}}$

(٧) $\text{ص} = (٣^{\text{س}-١})^{-٢}$ (٨) $\text{ص} = \text{هـ}^{٥\text{س}^٢ - ٣}$

(٩) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س} - ٧)$ (١٠) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س})$

(١١) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}^٢}{\text{س}+٧}$ (١٢) $\text{ص} = \text{س}^٢ \,\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

(١٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{س}}(٤\text{س}+٩)^٢$ (١٤) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{لو س}}$

(١٥) $\text{ص} = \text{قا هـ}^{\text{س}}$ (١٦) $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{٣\text{س}} - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{٥}$

الحل

(٥) $\because \text{ص} = \text{هـ}^{٣\text{س}^٥} \quad \therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{٣\text{س}^٥} \times ١٥\text{س}^٤ = ١٥\text{س}^٤\,\text{هـ}^{٣\text{س}^٥}$

(٦) $\because \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢-\text{س}} \quad \therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}^٢-\text{س}} \times (٢\text{س} - ١)$

(٧) $\because \text{ص} = (٣^{\text{س}-١})^{-٢} = ٣^{-٢\text{س}+٢} \quad \therefore \text{ص}' = ٣^{-٢\text{س}+٢} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣ \times (-٢)$

(٨) $\because \text{ص} = \text{هـ}^{٥\text{س}^٢-٣} \quad \therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{٥\text{س}^٢-٣} \times ١٠\text{س} = ١٠\text{س}\,\text{هـ}^{٥\text{س}^٢-٣}$

(٩) $\because \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢\text{س} - ٧) \quad \therefore \text{ص}' = \frac{١}{٢\text{س}-٧} \times ٢ = \frac{٢}{٢\text{س}-٧}$

(١٠) $\because \text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س})$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س}} \times (\text{س}+١) = \frac{\text{س}+١}{\frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س}}$

(١١) $\because \text{ص} = \text{لو} \frac{\text{س}^٢}{\text{س}+٧}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{س}+٧}{\text{س}^٢} \times \frac{(\text{س}+٧)\times ٢\text{س} - \text{س}^٢ \times ١}{(\text{س}+٧)^٢}$

$= \frac{\text{س}+٧}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{س}^٢ + ١٤\text{س}}{(\text{س}+٧)^٢} = \frac{\text{س}+١٤}{\text{س}(\text{س}+٧)}$

(١٢) $\because \text{ص} = \text{س}^٢\,\text{لو س}$

$\therefore \text{ص}' = ٢\text{س}\,\text{لو س} + \text{س}^٢ \times \frac{١}{\text{س}} = \text{س}(٢\text{لو س} + ١)$

(١٣) $\because \text{ص} = \text{لو}_{٣}(٤\text{س}+٩)^٢$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{(٤\text{س}+٩)^٢ \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣} \times ٢(٤\text{س}+٩) \times ٤$

$= \frac{٨}{(٤\text{س}+٩) \times \text{لو}_{\text{هـ}} ٣}$

(١٤) $\because \text{ص} = \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{لو س}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{لو س} \times ٣\text{هـ}^{٣\text{س}} - \text{هـ}^{٣\text{س}} \times \frac{١}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}} ١٠}}{(\text{لو س})^٢}$

$= \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}(٣\text{س}\,\text{لو س} \times \text{لو}_{\text{هـ}} ١٠ - ١)}{(\text{لو س})^٢}$

**(١٥)** ∵ ص = قا هـ$^{س}$

∴ ص$'$ = قا هـ$^{س}$ طا هـ$^{س}$ × هـ$^{س}$ = هـ$^{س}$ قا هـ$^{س}$ طا هـ$^{س}$

**(١٦)** ∵ ص = ٢ هـ$^{٣س}$ − ٥ لو$_{٢}$ $\frac{س}{٥}$

∴ ص$'$ = ٦ هـ$^{٣س}$ − ٥ × $\frac{٥}{س}$ × $\frac{١}{لو_{هـ} ٢}$ = ٦ هـ$^{٣س}$ − $\frac{٢٥}{س لو_{هـ} ٢}$

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة :

**(١٧)** ص = $\sqrt{س}$ − ٢ هـ$^{س}$ ، س = $\frac{١}{٤}$

**(١٨)** ص = س$^{٢}$ − ٣ لو$_{هـ}$ س ، س = ٢

**(١٩)** ص = $\frac{١}{٤}$ هـ$^{٢س}$ − ٢ لو$_{هـ}$ س ، س = $\frac{١}{٢}$

الحل

**(١٧)** ∵ ص = $\sqrt{س}$ − ٢ هـ$^{س}$ ∴ ص$'$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ − ٢ هـ$^{س}$

∴ ميل المماس = [ ص$'$ ]$_{س = \frac{١}{٤}}$ = ١ − ٢ هـ$^{\frac{١}{٤}}$ ≃ − ١,٥٧

**(١٨)** ∵ ص = س$^{٢}$ − ٣ لو$_{هـ}$ س ∴ ص$'$ = ٢ س − ٣ × $\frac{١}{س}$

∴ ميل المماس = [ ص$'$ ]$_{س = ٢}$ = ٤ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

**(١٩)** ∵ ص = $\frac{١}{٤}$ هـ$^{٢س}$ − ٢ لو$_{هـ}$ س ∴ ص$'$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{٢س}$ − ٢ × $\frac{١}{س}$

∴ ميل المماس = [ ص$'$ ]$_{س = \frac{١}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ هـ − ٤ ≃ − ٢,٦٤

أوجد $\frac{دص}{دس}$ للمنحنيات الآتية عند النقط المعطاة :

**(٢٠)** ص هـ$^{س}$ = هـ$^{٣}$ **(٢١)** س لو$_{هـ}$ ص = ٥٨

**(٢٢)** ص = س$^{حا س}$ **(٢٣)** ص = هـ$^{هـ^{س}}$

**(٢٤)** ص = هـ$^{س^{هـ}}$ **(٢٥)** ص = س$^{\frac{١}{س}}$

الحل

**(٢٠)** ∵ ص هـ$^{س}$ = هـ$^{٣}$ ∴ ص هـ$^{س}$ + ص$'$ هـ$^{س}$ = ٠ ، ∵ هـ$^{س}$ ≠ ٠

∴ ص + ص$'$ = ٠ و منها : $\frac{دص}{دس}$ = − ص

**(٢١)** ∵ س لو$_{هـ}$ ص = ٥٨ ∴ لو$_{هـ}$ ص + $\frac{١}{ص}$ × ص$'$ × س = ٠

بالضرب × ص ينتج : ص لو$_{هـ}$ ص + س ص$'$ = ٠

∴ س ص$'$ = − ص لو$_{هـ}$ ص و منها : $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{− ص لو_{هـ} ص}{س}$

، ∵ لو$_{هـ}$ ص = $\frac{٥٨}{س}$ ∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{− ٥٨ ص}{س^{٢}}$

**(٢٢)** ∵ ص = س$^{حا س}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج :

لو$_{هـ}$ ص = حا س لو$_{هـ}$ س بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

∴ $\frac{١}{ص}$ × $\frac{دص}{دس}$ = حتا س لو$_{هـ}$ س + حا س × $\frac{١}{س}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ص حتا س لو$_{هـ}$ س + ص حا س × $\frac{١}{س}$

= س$^{حا س}$ حتا س لو$_{هـ}$ س + س$^{حا س}$ حا س × $\frac{١}{س}$

= س$^{حا س}$ ( حتا س لو$_{هـ}$ س + $\frac{حا س}{س}$ )

**(٢٣)** ∵ ص = هـ$^{هـ^{س}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج :

لو$_{هـ}$ ص = هـ$^{س}$ لو$_{هـ}$ هـ = هـ$^{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

∴ $\frac{١}{ص}$ × ص$'$ = هـ$^{س}$ ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ص هـ$^{س}$ = هـ$^{س}$ × هـ$^{هـ^{س}}$

**(٢٤)** ∵ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين ينتج :

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \text{س}^{\text{هـ}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = \text{س}^{\text{هـ}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\therefore \frac{1}{\text{ص}} \times \text{ص}' = \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-1}$

$\therefore \frac{\text{عص}}{\text{عس}} = \text{ص}\,\text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-1} = \text{هـ}\,\text{س}^{\text{هـ}-1} \times \text{هـ}^{\text{س}^{\text{هـ}}}$

**(٢٥)** ∵ $\text{ص} = \text{س}^{\frac{1}{\text{س}}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين ينتج :

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\therefore \frac{1}{\text{ص}} \times \text{ص}' = \frac{-1}{\text{س}^2}\,\text{لو س} + \frac{1}{\text{س}} \times \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}^2}(1 - \text{لو س})$

$\therefore \frac{\text{عص}}{\text{عس}} = \text{ص} \times \frac{1}{\text{س}^2}(1 - \text{لو س}) = \text{س}^{\frac{1}{\text{س}} - 2}(1 - \text{لو س})$

أوجد $\frac{\text{عص}}{\text{عس}}$ ، $\frac{\text{ع}^2\text{ص}}{\text{عس}^2}$ لكل مما يأتي :

**(٢٦)** $\text{س} = \text{هـ}^{2\text{ن}}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^3$

**(٢٧)** $\text{س} = 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ن}$ ، $\text{ص} = \text{ن}^2$

الحل

**(٢٦)** ∵ $\text{س} = \text{هـ}^{2\text{ن}}$ $\therefore \frac{\text{عس}}{\text{عن}} = 2\,\text{هـ}^{2\text{ن}}$

، ∵ $\text{ص} = \text{ن}^3$ $\therefore \frac{\text{عص}}{\text{عن}} = 3\,\text{ن}^2$

$\therefore \frac{\text{عص}}{\text{عس}} = \frac{\text{عص}}{\text{عن}} \div \frac{\text{عس}}{\text{عن}} = \frac{3}{2}\,\text{ن}^2\,\text{هـ}^{-2\text{ن}}$ ،

$\frac{\text{ع}^2\text{ص}}{\text{عس}^2} = \frac{\text{ع}}{\text{عس}}\left(\frac{\text{عص}}{\text{عس}}\right) = \frac{\text{ع}}{\text{عن}}\left(\frac{\text{عص}}{\text{عس}}\right) \times \frac{\text{عن}}{\text{عس}}$

$= \frac{\text{ع}}{\text{عن}}\left(\frac{3}{2}\,\text{ن}^2\,\text{هـ}^{-2\text{ن}}\right) \times \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{-2\text{ن}}$

$= \left(3\,\text{ن}\,\text{هـ}^{-2\text{ن}} - 3\,\text{ن}^2\,\text{هـ}^{-2\text{ن}}\right) \times \frac{1}{2}\,\text{هـ}^{-2\text{ن}}$

$= \frac{3}{2}\,\text{ن}\,\text{هـ}^{-4\text{ن}}\,(1 - \text{ن})$

**(٢٧)** ∵ $\text{س} = 6\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ن}$ $\therefore \frac{\text{عس}}{\text{عن}} = \frac{6}{\text{ن}}$

، ∵ $\text{ص} = \text{ن}^2$ $\therefore \frac{\text{عص}}{\text{عن}} = 2\,\text{ن}$

$\therefore \frac{\text{عص}}{\text{عس}} = \frac{\text{عص}}{\text{عن}} \div \frac{\text{عس}}{\text{عن}} = 2\,\text{ن} \times \frac{\text{ن}}{6} = \frac{1}{3}\,\text{ن}^2$ ،

$\frac{\text{ع}^2\text{ص}}{\text{عس}^2} = \frac{\text{ع}}{\text{عس}}\left(\frac{\text{عص}}{\text{عس}}\right) = \frac{\text{ع}}{\text{عن}}\left(\frac{\text{عص}}{\text{عس}}\right) \times \frac{\text{عن}}{\text{عس}}$

$= \frac{\text{ع}}{\text{عن}}\left(\frac{1}{3}\,\text{ن}^2\right) \times \frac{\text{ن}}{6} = \frac{2}{3}\,\text{ن} \times \frac{\text{ن}}{6} = \frac{1}{9}\,\text{ن}^2$

أجب عن كل ما يأتي :

**(٢٨)** إذا كانت : $\text{ص} = \text{س}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\frac{\text{س}}{\text{أ}}$ فأوجد : $\frac{\text{ع}^3\text{ص}}{\text{عس}^3}$ عند : س = ٤

الحل

∵ $\text{ص} = \text{س}^2\,\text{لو}\,\frac{\text{س}}{\text{أ}}$

$\therefore \frac{\text{عص}}{\text{عس}} = 2\,\text{س}\,\text{لو}\,\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{س}^2 \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} = 2\,\text{س}\,\text{لو}\,\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{أ}\,\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ع}^2\text{ص}}{\text{عس}^2} = 2\,\text{لو}\,\frac{\text{س}}{\text{أ}} + 2\,\text{س} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \text{أ} = 2\,\text{لو}\,\frac{\text{س}}{\text{أ}} + 3\,\text{أ}$

$\therefore \frac{\text{ع}^3\text{ص}}{\text{عس}^3} = 2 \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$ ، عند : س = ٤ فإن : $\frac{\text{ع}^3\text{ص}}{\text{عس}^3} = \frac{1}{2}\,\text{أ}$

**(٢٩)** إذا كانت : $\text{هـ}^{\text{س}} = \sum_{\text{ن}=0}^{\infty} \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$ ( مفكوك تايلور ) أثبت أن :

$\frac{\text{ع}}{\text{عس}}\left(\text{هـ}^{\text{س}}\right) = \text{هـ}^{\text{س}}$

الحل

$\therefore$ $هـ^{س} = 1 + \frac{س}{|1} + \frac{س^2}{|2} + \frac{س^3}{|3} + ....$

$\therefore$ $\frac{د}{دس}(هـ^{س}) = \frac{1}{|1} + \frac{2س}{|2} + \frac{3س^2}{|3} + ....$

$= 1 + \frac{س}{|1} + \frac{س^2}{|2} + \frac{س^3}{|3} + .... = هـ^{س}$

**(٣٠)** إذا كانت : $ص = \sqrt{\frac{س^2+1}{س^2-1}}$ أثبت أن :

$(س^4 - 1)\, ص' + 2\, س\, ص = 0$

الحل

$\because$ $ص = \left(\frac{س^2+1}{س^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين ينتج :

$\text{لو}_{هـ} ص = \frac{1}{2}\left[\text{لو}_{هـ}(س^2+1) - \text{لو}_{هـ}(س^2-1)\right]$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{1}{ص} \times ص' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{س^2+1} \times 2س - \frac{1}{س^2-1} \times 2س\right]$

بالضرب × $(س^4 - 1)$ ص ينتج :

$(س^4 - 1)\, ص' = س\, ص\, (س^2 - 1) - س\, ص\, (س^2 + 1)$

$= س^3 ص - س ص - س^3 ص - س ص$

$= - 2 س ص$

$\therefore$ $(س^4 - 1)\, ص' + 2\, س\, ص = 0$

**(٣١)** أوجد قيم س التى يكون عندها المماس للمنحنى :

$ص = 9 س^3 - 8\, \text{لو}_{هـ} س$ موازياً لمحور السينات

الحل

$\because$ $ص = 9 س^3 - 8\, \text{لو}_{هـ} س$ $\therefore$ $ص' = 27 س^2 - \frac{8}{س}$

، $\because$ المماس // محور السينات $\therefore$ $ص' = 0$

$\therefore$ $27 س^2 - \frac{8}{س} = 0$ و منها : $27 س^3 = 8$ $\therefore$ $س = \frac{2}{3}$

أى أن : المماس للمنحنى المعطى يوازى محور السينات عند $س = \frac{2}{3}$

**(٣٢)** أوجد معادلة العمودى للمنحنى : $ص = 3\, هـ^{س}$ عند نقطة واقعة عليه و إحداثيها السينى يساوى $-1$

الحل

$\because$ $ص = 3\, هـ^{س}$ $\therefore$ $ص' = 3\, هـ^{س}$ ، عند : $س = -1$ فإن :

$ص = 3\, هـ^{-1}$ ، $ص' = $ ميل المماس $= 3\, هـ^{-1}$

$\therefore$ ميل العمودى $= -\frac{1}{3} هـ$ ، معادلة العمودى هى :

$ص - 3\, هـ^{-1} = \left(-\frac{1}{3} هـ\right)(س + 1)$ أى :

$هـ\, س + 3\, ص - 9\, هـ^{-1} - هـ = 0$

**(٣٣)** إذا كان الإنتاج اليومى لأحد المصانع خلال فترة زمنية ن (يوماً) يتعين من العلاقة : $ص = 400\,(1 - هـ^{-0.3 ن})$ وحدة أوجد معدل التغير فى عدد الوحدات المنتجة بالنسبة للزمن فى اليوم العاشر

الحل

$\because$ $ص = 400\,(1 - هـ^{-0.3 ن})$

$\therefore$ $\frac{دص}{دن} = 400\,(- هـ^{-0.3 ن} \times - 0.3) = 120\, هـ^{-0.3 ن}$

$\therefore$ $\left[\frac{دص}{دن}\right]_{ن = 10} = $ معدل التغير فى اليوم العاشر $= 120\, هـ^{-3}$

**(٣٤)** إذا كان إنتاج خلية نحل من العسل يعطى بالعلاقة :

ص = ( ن + ١٠٠ ) لو$_{هـ}$ ( ن + ٥ ) جرام بدلالة عدد الأيام ن

أوجد معدل تغير إنتاج الخلية عند : ن = ٥ ، ن = ١٥ ، ن = ٢٠ ، هل يتزايد إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص ؟

الحل

∵ ص = ( ن + ١٠٠ ) لو$_{هـ}$ ( ن + ٥ )

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ( ن + ١٠٠ ) × $\frac{١}{\text{ن} + ٥}$ + لو$_{هـ}$ ( ن + ٥ ) × ١

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right]_{\text{ن} = ٥}$ = ١٠٥ × $\frac{١}{١٠}$ + لو$_{هـ}$ ١٠ = ١٢,٨

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right]_{\text{ن} = ١٥}$ = ١١٥ × $\frac{١}{٢٠}$ + لو$_{هـ}$ ٢٠ = ٨,٧

∴ $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right]_{\text{ن} = ٢٠}$ = ١٢٠ × $\frac{١}{٢٥}$ + لو$_{هـ}$ ٢٥ = ٨

∴ إنتاج الخلية من العسل أم يتناقص

## ٢ – ٣ تكامل الدوال الأسية و اللوغاريتمية

### التكامل غير المحدد للدالة الأسية :

نعلم أن :

**(١)** إذا كانت : د ( س ) = هـ$^{\text{س}}$ فإن : د$'$ ( س ) = هـ$^{\text{س}}$

**(٢)** إذا كانت : ع دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س ، د ( ع ) = هـ$^{\text{ع}}$ فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ( هـ$^{\text{ع}}$ ) = هـ$^{\text{ع}}$ . $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

و على ذلك فإن :

**(١)** ∫ هـ$^{\text{س}}$ ءس = هـ$^{\text{س}}$ + ث

**(٢)** إذا كان : ك عدداً حقيقياً ، ك ≠ ٠ فإن :

∫ هـ$^{\text{ك س}}$ ءس = $\frac{١}{\text{ك}}$ هـ$^{\text{ك س}}$ + ث

**(٣)** إذا كانت : د ( س ) دالة قابلة للإشتقاق فإن :

∫ هـ$^{\text{د ( س )}}$ . د$'$ ( س ) ءس = هـ$^{\text{د ( س )}}$ + ث

حيث : ث ثابت اختيارى

حاول أن تحل (١) صفحة ٥١

أوجد :

(أ) ∫ π هـ$^{\text{س}}$ ءس     (ب) ∫ – هـ$^{-٥\text{ع}}$ ءع

(جـ) ∫ – ٦ هـ$^{٠,٢\text{ص}}$ ءص     (ء) ∫ ٣ $\sqrt{٢}$ هـ$^{-\sqrt{٢}\text{ن}}$ ءن

الحل

(أ) المقدار = π هـ$^{\text{س}}$ + ث

(ب) المقدار = $- \frac{1}{5} \times -$ هـ$^{-5ع}$ + ث = $\frac{1}{5}$ هـ$^{-5ع}$ + ث

(جـ) المقدار = $\frac{1}{0.2} \times -6$ هـ$^{0.2س}$ + ث = $-30$ هـ$^{0.2س}$ + ث

(ء) المقدار = $- \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$ هـ$^{-\sqrt{2}ن}$ + ث = $-3$ هـ$^{-\sqrt{2}ن}$ + ث

## حاول أن تحل (٢) صفحة 51

أوجد :

(أ) $\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}$ ء س          (ب) $\int$ ( س$^2$ + هـ$^{س}$ ) ء س

(جـ) $\int$ ( س$^{2هـ}$ + هـ$^{3س}$ ) ء س

**الحل**

(أ) المقدار = $\int$ ( ١ + هـ$^{-2س}$ ) ء س = س $- \frac{1}{2}$ هـ$^{-2س}$ + ث

(ب) المقدار = ٢ س + هـ$^{س}$ + ث

(جـ) المقدار = $\frac{س^{2هـ+1}}{2هـ+1} + \frac{1}{3}$ هـ$^{3س}$ + ث

## حاول أن تحل (٣) صفحة 52

أوجد التكاملات التالية :

(أ) $\int$ ( حتا س هـ$^{حاس}$ + ٣ س$^2$ ) ء س

(ب) $\int$ ( س − ٣ ) هـ$^{س^2 - 6س + 5}$ ء س

**الحل**

(أ) نضع : د ( س ) = حا س          ∴ د$'$ ( س ) = حتا س

∴ المقدار = هـ$^{حاس}$ + ٢ س + ث

(ب) نضع : د ( س ) = س$^2$ − ٦ س + ٥     ∴ د$'$ ( س ) = ٢ س − ٦

∴ المقدار = $\frac{1}{2} \int$ هـ$^{س^2 - 6س + 5}$ ( ٢ س − ٦ ) ء س

= $\frac{1}{2}$ هـ$^{س^2 - 6س + 5}$ + ث

## التكامل غير المحدد للدوال اللوغاريتمية :

**نعلم أن :**

$\frac{ء}{ءس}$ ( لوهـ س ) = $\frac{1}{س}$          حيث : $س > 0$ .

، $\frac{ء}{ءس}$ ( − لوهـ س ) = $- \frac{1}{س}$          حيث : $س < 0$ .

و بوجه عام فإن : $\frac{ء}{ءس}$ ( لوهـ | س | ) = $\frac{1}{س}$   حيث : س $\neq 0$ .

أى أن : الدالة لوهـ | س |  حيث : س $\neq 0$ .

إحدى المشتقات العكسية للدالة $\frac{1}{س}$

**لاحظ :**

لوهـ (− س ) له معنى لكل $س < 0$ ، ليس له معنى لكل $س > 0$ .

**و على ذلك فإن :**

$\int \frac{1}{س}$ ء س = لوهـ | س | + ث          حيث : س $\neq 0$ .

**ملاحظة :**

إذا كانت : د ( س ) دالة قابلة للإشتقاق ، د ( س ) $\neq 0$ . فإن :

$\int \frac{1}{د(س)}$ . د$'$ ( س ) ء س = لوهـ | د ( س ) | + ث

## حاول أن تحل (٤) صفحة ٥٢

أوجد :

(أ) $\int \frac{\text{لو}_{ه}\ ٣}{\text{س}}\ \text{ء س}$ (ب) $\int \frac{٤}{٣\ \text{س لو}_{ه}\ ٥}\ \text{ء س}$ (حـ) $\int \frac{\text{لو}_{ه}\ \text{س}^{٢}}{\text{س لو}_{ه}\ \text{س}^{٣}}\ \text{ء س}$

**الحل**

(أ) المقدار $= \text{لو}_{ه}\ ٣ \int \frac{١}{\text{س}}\ \text{ء س} = \text{لو}_{ه}\ ٣ \times \text{لو}_{ه} |\text{س}| + \text{ث}$

(ب) المقدار $= \frac{٤}{٣\ \text{لو}_{ه}\ ٥} \int \frac{١}{\text{س}}\ \text{ء س} = \frac{٤}{٣\ \text{لو}_{ه}\ ٥} \times \text{لو}_{ه} |\text{س}| + \text{ث}$

(حـ) المقدار $= \int \frac{١}{\text{س}} \times \frac{٢\ \text{لو}_{ه}\ \text{س}}{٣\ \text{لو}_{ه}\ \text{س}}\ \text{ء س} = \frac{٢}{٣} \int \frac{١}{\text{س}}\ \text{ء س}$

$= \frac{٢}{٣}\ \text{لو}_{ه} |\text{س}| + \text{ث}$

## حاول أن تحل (٥) صفحة ٥٣

أوجد كلاً من التكاملات التالية :

(أ) $\int \frac{٦\text{س}^{٢} - ٥}{٣\ \text{س}}\ \text{ء س}$ (ب) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} - ٢\ \text{س}}\ \text{ء س}$

(حـ) $\int \left( \sqrt{\text{س}} - \frac{٣}{\sqrt{\text{س}}} \right)^{٢}\ \text{ء س}$

**الحل**

(أ) المقدار $= \int \left( ٢\ \text{س} - \frac{٥}{٣} \times \frac{١}{\text{س}} \right) \text{ء س} = \text{س}^{٢} - \frac{٥}{٣}\ \text{لو}_{ه} |\text{س}| + \text{ث}$

(ب) المقدار $= \int \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{\text{س}(\text{س} - ٢)}\ \text{ء س} = \int \left( ١ + \frac{٢}{\text{س}} \right) \text{ء س}$

$= \text{س} + ٢\ \text{لو}_{ه} |\text{س}| + \text{ث}$

(حـ) المقدار $= \int \left( \text{س} - ٦ + \frac{٩}{\text{س}} \right) \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{س}^{٢} - ٦\ \text{س} + ٩\ \text{لو}_{ه} |\text{س}| + \text{ث}$

## حاول أن تحل (٦) صفحة ٥٢

أوجد كلاً من التكاملات التالية :

(أ) $\int \text{طتا س ء س}$ (ب) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٢\ \text{س}}\ \text{ء س}$

(حـ) $\int \frac{(\text{س}^{٢} + ٢)\ \text{ء س}}{\text{س}^{٣} + ٦\ \text{س} + ١}$

**الحل**

(أ) المقدار $= \int \frac{\text{حتا س}}{\text{حا س}}\ \text{ء س} = \int \frac{(\text{حا س})'}{\text{حا س}}\ \text{ء س} = \text{لو}_{ه} |\text{حا س}| + \text{ث}$

(ب) المقدار $= \int \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{\text{س}(\text{س} - ٢)}\ \text{ء س} = \int \left( ١ - \frac{٢}{\text{س}} \right) \text{ء س}$

$= \text{س} - ٢\ \text{لو}_{ه} |\text{س}| + \text{ث}$

(حـ) المقدار $= \frac{١}{٣} \int \frac{(٣\text{س}^{٢} + ٦)\ \text{ء س}}{\text{س}^{٣} + ٦\ \text{س} + ١} = \frac{١}{٣} \int \frac{(\text{س}^{٣} + ٦\ \text{س} + ١)'}{\text{س}^{٣} + ٦\ \text{س} + ١}\ \text{ء س}$

$= \frac{١}{٣}\ \text{لو}_{ه} |\text{س}^{٣} + ٦\ \text{س} + ١| + \text{ث}$

## حاول أن تحل (٧) صفحة ٥٤

إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه ( س ، ص ) يساوى $\frac{١}{٢\ \text{س} - \text{هـ}}$ و كان د ( هـ ) = $\frac{١}{٢}$ أوجد د ( ٢ هـ )

**الحل**

∵ ميل المماس $= \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{٢\ \text{س} - \text{هـ}}$

∴ ص $= \frac{١}{٢} \int \frac{٢}{٢\ \text{س} - \text{هـ}}\ \text{ء س} = \frac{١}{٢} \int \frac{(٢\ \text{س} - \text{هـ})'}{٢\ \text{س} - \text{هـ}}\ \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{ه} |٢\ \text{س} - \text{هـ}| + \text{ث}$

، ∵ د ( هـ ) $= \frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{ه} |٢\ \text{س} - \text{هـ}| + \text{ث}$

∴ $١ = \text{لو}_{ه} |٢\ \text{هـ} - \text{هـ}| + \text{ث}$ ∴ $١ = \text{لو}_{ه} |\text{هـ}| + \text{ث}$

$\therefore$ ١ = ١ + ث $\therefore$ ث = صفر $\therefore$ ص = $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ | ٢ س − هـ |

، د(٢هـ) = $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ | ٤هـ − هـ | = $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ | ٣هـ |

= $\frac{1}{2}$ ( لو$_{هـ}$ هـ + لو$_{هـ}$ ٣ ) = $\frac{1}{2}$ ( ١ + لو$_{هـ}$ ٣ )

### حاول أن تحل (٨) صفحة ٥٤

إذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسياً مع الزمن بالأسابيع ، و كانت مبيعات المصنع بعد أسبوعين و ٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠ ، ٣٠٠ وحدة ، أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع

**الحل**

بفرض أن : مبيعات المصنع فى أسبوع ن = م ، $\because$ $\frac{ءم}{ءن} \propto \frac{1}{ن}$

$\therefore$ $\frac{ءم}{ءن}$ = ك × $\frac{1}{ن}$ حيث : ك ثابت ≠ صفر

، م = ∫ ك × $\frac{1}{ن}$ ءن = ك لو$_{هـ}$ ن + ث " لاحظ أن : ن > ٠ "

، $\because$ بعد أسبوعين : م = ٢٠٠ $\therefore$ ٢٠٠ = ك لو$_{هـ}$ ٢ + ث (١)

، بعد ٤ أسابيع : م = ٣٠٠ $\therefore$ ٣٠٠ = ك لو$_{هـ}$ ٤ + ث (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج : ١٠٠ = ك ( لو$_{هـ}$ ٤ − لو$_{هـ}$ ٢ )

$\therefore$ ١٠٠ = ك لو$_{هـ}$ $\frac{4}{2}$ $\therefore$ ١٠٠ = ك لو$_{هـ}$ ٢ و منها : ك = $\frac{١٠٠}{لو_{هـ} ٢}$

، بالتعويض فى (١) ينتج : ٢٠٠ = $\frac{١٠٠}{لو_{هـ} ٢}$ × لو$_{هـ}$ ٢ + ث

$\therefore$ ٢٠٠ = ١٠٠ + ث و منها : ث = ١٠٠ $\therefore$ م = $\frac{١٠٠}{لو_{هـ} ٢}$ لو$_{هـ}$ ن + ١٠٠

$\therefore$ م$_{(ن = ٨)}$ = $\frac{١٠٠}{لو_{هـ} ٢}$ لو$_{هـ}$ ٨ + ١٠٠ = $\frac{١٠٠}{لو_{هـ} ٢}$ × ٣ لو$_{هـ}$ ٢ + ١٠٠

$\therefore$ م$_{(ن = ٨)}$ = ٣٠٠ + ١٠٠ = ٤٠٠ وحدة

أى أن : عدد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع = ٤٠٠ وحدة

## حل تمارين ( ٢ − ٣ ) صفحة ٥٥ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان : د$''$( س ) = $\frac{1}{2}$ ( هـ$^{س}$ + هـ$^{-س}$ ) ، د( ٠ ) = ١ ، د$'$( ٠ ) = ٠ فإن : د( س ) = ....

(أ) − د$'$( س ) (ب) د$'$( س )

(جـ) − د$''$( س ) (ء) د$''$( س )

(٢) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه ( س ، ص ) يساوى ٤ هـ$^{٢س}$ ، د( ٠ ) = ٢ فإن : د( −٢ ) = ....

(أ) ٤ (ب) ٤ هـ$^{-٤}$ (جـ) ٢ هـ$^{-٤}$ (ء) ٢ هـ

(٣) ∫ طا θ ءθ = ....

(أ) − لو$_{هـ}$ | حتا θ | + ث (ب) − لو$_{هـ}$ حتا θ + ث

(جـ) لو$_{هـ}$ حتا θ + ث (ء) لو$_{هـ}$ | حتا θ | + ث

(٤) ∫ ٤ س هـ$^{س^٢}$ ءس = ....

(أ) $\frac{1}{2}$ هـ$^{س^٢}$ + ث (ب) هـ$^{س^٢}$ + ث

(جـ) ٢ هـ$^{س^٢}$ + ث (ء) ٤ هـ$^{س^٢}$ + ث

**الحل**

(١) $\because$ د$''$( س ) = $\frac{1}{2}$ ( هـ$^{س}$ + هـ$^{-س}$ )

$\therefore$ د$'$( س ) = ∫ $\frac{1}{2}$ ( هـ$^{س}$ + هـ$^{-س}$ ) ءس = $\frac{1}{2}$ ( هـ$^{س}$ − هـ$^{-س}$ ) + ث

، ∵ د$'$( ٠ ) = ٠     ∴ ٠ = $\frac{١}{٢}$ ( ١ − ١ ) + ث     و منها : ث = ٠ .

∴ د$'$( س ) = $\frac{١}{٢}$ ( هـ$^{س}$ − هـ$^{-س}$ )

، د( س ) = ∫ $\frac{١}{٢}$ ( هـ$^{س}$ − هـ$^{-س}$ ) ء س = $\frac{١}{٢}$ ( هـ$^{س}$ + هـ$^{-س}$ ) + ث$'$

، ∵ د( ٠ ) = ١     ∴ ١ = $\frac{١}{٢}$ ( ١ + ١ ) + ث     و منها : ث$'$ = ٠ .

∴ د( س ) = $\frac{١}{٢}$ ( هـ$^{س}$ + هـ$^{-س}$ ) = د$''$( س )

**(٢)** ∵ ميل المماس = د$'$( س ) = ٤ هـ$^{٢س}$

∴ د( س ) = ∫ ٤ هـ$^{٢س}$ ء س = ٢ هـ$^{٢س}$ + ث

، ∵ د( ٠ ) = ٢     ∴ ٢ = ٢ + ث     و منها : ث = ٠ .

∴ د( س ) = ٢ هـ$^{٢س}$     ،     د( −٢ ) = ٢ هـ$^{-٤}$

**(٣)** المقدار = ∫ $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ء θ = − ∫ $\frac{-\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ء θ = − ∫ $\frac{(\text{جتا س})'}{\text{جتا س}}$ ء θ

= − لو$_{هـ}$ | جتا س | + ث

**(٤)** المقدار = ٢ ∫ ٢ س هـ$^{س^٢}$ ء س = ٢ ∫ هـ$^{س^٢}$ × ( س$^٢$ )$'$ ء س

= ٢ هـ$^{س^٢}$ + ث

أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

**(٥)** ∫ هـ$^{٤س}$ ء س          **(٦)** ∫ ( ٣ س$^٢$ + ٢ هـ$^{س}$ ) ء س

**(٧)** ∫ ( $\frac{٤}{س}$ − هـ$^{-س}$ ) ء س          **(٨)** ∫ هـ$^{١-٣س}$ ء س

**(٩)** ∫ $\frac{٧}{٣}$ هـ$^{٣س-٤}$ ء س          **(١٠)** ∫ ٢ هـ$^{س}$ ( هـ$^{س}$ + ١ )$^٢$ ء س

**(١١)** ∫ $\frac{هـ^{٣س} + ٢ هـ^{٢س} + ٤}{هـ^{س}}$ ء س          **(١٢)** ∫ س$^٢$ هـ$^{س^٣+١}$ ء س

**(١٣)** ∫ $\frac{٢ هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$ ء س          **(١٤)** ∫ $\frac{ء س}{٤ س + ١}$

**(١٥)** ∫ $\frac{س}{س^٢ + ١}$ ء س          **(١٦)** ∫ $\frac{\text{قا}^٢ س}{\text{ظا س}}$ ء س

**(١٧)** ∫ $\frac{\text{جا س + جتا س}}{\text{جا س − جتا س}}$ ء س          **(١٨)** ∫ $\frac{\text{جتا س}}{\text{١ + جا س}}$ ء س

**(١٩)** ∫ $\frac{\text{قا س ظا س}}{\text{قا س − ١}}$ ء س          **(٢٠)** ∫ $\frac{١}{\text{س لو}_{هـ}\text{ س}}$ ء س

**(٢١)** ∫ $\frac{٢ س}{( س + ١ )^٢}$ ء س          **(٢٢)** ∫ $\frac{(\text{لو}_{هـ}\text{ س})^٢}{س}$ ء س

**(٢٣)** ∫ $\frac{٣ س^٢}{س^٣ - ١}$ ء س          **(٢٤)** ∫ $\frac{٣ س^٢ - ٥}{س^٣ - ٥ س + ١}$ ء س

**(٢٥)** ∫ $\frac{٤ هـ^{س} + س هـ^{٢س}}{س هـ^{س}}$ ء س          **(٢٦)** ∫ $\frac{٤}{\text{س لو}_{هـ}\text{ ٣ س}}$ ء س

**(٢٧)** ∫ $\frac{(\text{١ + لو}_{هـ}\text{ س})^٢}{س}$ ء س

الحل

**(٥)** المقدار = $\frac{١}{٤}$ هـ$^{٤س}$ + ث          **(٦)** المقدار = س$^٣$ + هـ$^{س}$ + ث

**(٧)** المقدار = ٤ لو$_{هـ}$ | س | + هـ$^{-س}$ + ث

**(٨)** المقدار = − $\frac{١}{٣}$ ∫ هـ$^{١-٣س}$ ( − ٣ ) ء س

= − $\frac{١}{٣}$ ∫ هـ$^{١-٣س}$ ( ١ − ٣ س )$'$ ء س = − $\frac{١}{٣}$ هـ$^{١-٣س}$ + ث

**(٩)** المقدار = $\frac{٧}{٩}$ ∫ هـ$^{٣س-٤}$ × ٣ ء س

= $\frac{٧}{٩}$ ∫ هـ$^{٣س-٤}$ ( ٣ س − ٤ )$'$ ء س = $\frac{٧}{٩}$ هـ$^{٣س-٤}$ + ث

**(١٠)** نضع : ع = هـ$^{س}$ + ١     ∴ ء ع = هـ$^{س}$ ء س

، المقدار $= ٢ \int ع^{٢} \; ء ع = \frac{٢}{٣} ع^{٣} + ث = \frac{٢}{٣} ( هـ^{س} + ١ )^{٣} + ث$

**(١١)** المقدار $= \int ( هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س} + ٤ هـ^{-س} ) \; ء س$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ٢ هـ^{س} - ٤ هـ^{-س} + ث$

**(١٢)** نضع : $د ( س ) = س^{٣} + ١$    $\therefore د'( س ) = ٣ س^{٢}$

$\therefore$ المقدار $= \frac{١}{٣} \int هـ^{س^{٣}+١} \times ٣ س^{٢} \; ء س = \frac{١}{٣} هـ^{س^{٣}+١} + ث$

**(١٣)** $\because ( هـ^{س} + ١ )' = هـ^{س}$

$\therefore$ المقدار $= ٢ \int \frac{( هـ^{س} + ١ )'}{هـ^{س} + ١} \; ء س = ٢$ لو$_{هـ} | هـ^{س} + ١ | + ث$

**(١٤)** $\because ( ٤ س + ١ )' = ٤$

$\therefore$ المقدار $= \frac{١}{٤} \int \frac{٤}{٤ س + ١} \; ء س = \frac{١}{٤} \int \frac{( ٤ س + ١ )'}{٤ س + ١} \; ء س$

$= \frac{١}{٤}$ لو$_{هـ} | ٤ س + ١ | + ث$

**(١٥)** $\because ( س^{٢} + ١ )' = ٢ س$

$\therefore$ المقدار $= \frac{١}{٢} \int \frac{٢ س}{س^{٢} + ١} \; ء س = \frac{١}{٢} \int \frac{( س^{٢} + ١ )'}{س^{٢} + ١} \; ء س$

$= \frac{١}{٢}$ لو$_{هـ} | س^{٢} + ١ | + ث$

**(١٦)** $\because ($ طا س $)' =$ قا$^{٢}$ س    $\therefore$ المقدار = لو$_{هـ}$ | طا س | + ث

**(١٧)** $\because ($ حا س − حتا س $)' =$ حتا س + حا س

$\therefore$ المقدار = لو$_{هـ}$ | حا س − حتا س | + ث

**(١٨)** $\because ( ١ +$ حا س $)' =$ حتا س    $\therefore$ المقدار = لو$_{هـ}$ | ١ + حا س | + ث

**(١٩)** $\because ($ قا س − ١ $)' =$ قا س طا س    $\therefore$ المقدار = لو$_{هـ}$ | قا س − ١ | + ث

**(٢٠)** $\because ($ لو$_{هـ}$ س $)' = \frac{١}{س}$    $\therefore$ المقدار $= \int \frac{\frac{١}{س}}{\text{لو}_{هـ} س} \; ء س =$ لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ س | + ث

**(٢١)** بإضافة : $\pm ٢$ للبسط ، $\because [ ( س + ١ )^{٢} ]' = ٢ ( س + ١ )$

$\therefore$ المقدار $= \int \frac{٢ ( س + ١ )}{( س + ١ )^{٢}} \; ء س - \int \frac{٢}{( س + ١ )^{٢}} \; ء س$

$=$ لو$_{هـ} | ( س + ١ )^{٢} | - ٢ \times - ١ ( س + ١ )^{-١} + ث$

$= ٢$ لو$_{هـ} | ( س + ١ ) | + ٢ ( س + ١ )^{-١} + ث$

**(٢٢)** $\because ($ لو$_{هـ}$ س $)' = \frac{١}{س}$    $\therefore$ المقدار $= \frac{١}{٣} ($ لو$_{هـ}$ س $)^{٣} + ث$

**(٢٣)** $\because ( س^{٣} - ١ )' = ٣ س^{٢}$    $\therefore$ المقدار = لو$_{هـ} | س^{٣} - ١ | + ث$

**(٢٤)** $\because ( س^{٣} - ٥ س + ١ )' = ٣ س^{٢} - ٥$

$\therefore$ المقدار = لو$_{هـ} | س^{٣} - ٥ س + ١ | + ث$

**(٢٥)** المقدار $= \int ( \frac{٤}{س} + هـ^{س} ) \; ء س = ٤$ لو$_{هـ} | س | + هـ^{س} + ث$

**(٢٦)** $\because ($ لو$_{هـ}$ ٣س $)' = \frac{١}{٣ س} \times ٣ = \frac{١}{س}$

$\therefore$ المقدار $= ٤ \int \frac{\frac{١}{س}}{\text{لو}_{هـ} ٣ س} \; ء س = ٤$ لو$_{هـ}$ | لو$_{هـ}$ ٣ س | + ث

**(٢٧)** $\because ( ١ +$ لو$_{هـ}$ س $)' = \frac{١}{س}$    $\therefore$ المقدار $= \frac{١}{٣} ( ١ +$ لو$_{هـ}$ س $)^{٣} + ث$

**(٢٨)** إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه ( س ، ص ) يساوى $٢ هـ^{-\frac{١}{٢} س}$ ، $د ( ٠ ) = ١$ أوجد د ( ٣ )

الحل

$\because$ ميل المماس $= د'( س ) = ٢ هـ^{-\frac{١}{٢} س}$

∴ د ( س ) = ∫ ٢ $ه^{-\frac{١}{٢}س}$ ءس = − ٤ $ه^{-\frac{١}{٢}س}$ + ث

، ∵ د ( ٠ ) = ١ ∴ ١ = − ٤ + ث و منها : ث = ٥

∴ د ( س ) = − ٤ $ه^{-\frac{١}{٢}س}$ + ٥

، د ( ٣ ) = − ٤ $ه^{-\frac{٣}{٢}}$ + ٥ ≃ ٤,١١

## حل تمارين عامة صفحة ٥٧ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(١)** منحنى الدالة د حيث د ( س ) = $ه^{س - ٣}$ + ٢ هو نفس منحنى الدالة ر ( س ) = $ه^{س}$ بانتقال : ....

(أ) ( ٢ ، ٣ ) (ب) ( ٢ ، − ٣ ) (حـ) ( ٣ ، − ٢ ) (ء) ( ٣ ، ٢ )

**(٢)** إذا كان : د′( س ) = س د ( س ) ، د ( ٣ ) = − ٥ فإن : د″ ( ٣ ) تساوى ....

(أ) − ٥٠ (ب) − ٤٠ (حـ) ١٥ (ء) ٢٧

**(٣)** ∫ $\frac{لو_ه س^٢}{لو_ه س}$ ءس = ....

(أ) $\frac{س}{٢}$ + ث (ب) $\frac{١}{س}$ + ث
(حـ) ٢ س + ث (ء) لو$_ه$ | س | + ث

**(٤)** ∫ $\frac{١}{س لو_ه س^٣}$ ءس = ....

(أ) ٣ لو$_ه$ | س | + ث (ب) ٣ لو$_ه$ | لو$_ه$ س | + ث
(حـ) $\frac{١}{٣}$ لو$_ه$ | س | + ث (ء) $\frac{١}{٣}$ لو$_ه$ | لو$_ه$ س | + ث



### الحل

**(١)** ∵ د ( س ) = $ه^{س - ٣}$ + ٢ ، ر ( س ) = $ه^{س}$

∴ منحنى الدالة د حيث د ( س ) = $ه^{س - ٣}$ + ٢ هو نفس منحنى الدالة ر ( س ) = $ه^{س}$ بانتقال : ( ٣ ، ٢ )

**(٢)** ∵ د′ ( س ) = س د ( س )

∴ د′ ( ٣ ) = ٣ × د ( ٣ ) = ٣ × ( − ٥ ) = − ١٥

، د″ ( س ) = د ( س ) + س د′ ( س )

∴ د″ ( ٣ ) = د ( ٣ ) + ٣ × د′ ( ٣ )

= − ٥ + ٣ × ( − ١٥ ) = − ٥٠

**(٣)** المقدار = ∫ $\frac{٢ لو_ه س}{لو_ه س}$ ءس = ∫ ٢ ءس = ٢ س + ث

**(٤)** المقدار = $\frac{١}{٣}$ ∫ $\frac{١}{س لو_ه س}$ ءس = $\frac{١}{٣}$ ∫ $\frac{\frac{١}{س}}{لو_ه س}$ ءس

= $\frac{١}{٣}$ لو$_ه$ | لو$_ه$ س | + ث

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

**(٥)** لو ( س − ٣ ) = ٢ **(٦)** لو$_٢$ ( س + ٧ ) = ٥

**(٧)** $ه^{٥س + ١}$ = ٢٠ **(٨)** لو$_ه$ $٤^{٢س - ١}$ = لو$_ه$ ٥٠

**(٩)** لو$_ه$ $ه^{س}$ = ٢ لو$_ه$ ٣ **(١٠)** $٧^{س}$ = ٢٥

### الحل

**(٥)** ∵ لو ( س − ٣ ) = ٢ ∴ س − ٣ = ١٠٠

∴ س = ١٠٣ ∴ مجموعة الحل = { ١٠٣ }

**(٦)** ∵ لو$_٢$ ( س + ٧ ) = ٥ ∴ س + ٧ = ٣٢

∴ س = ٢٥ ∴ مجموعة الحل = { ٢٥ }

(٧) ∵ $هـ^{٥س+١} = ٢٠$ ∴ $٥س + ١ = لو_{هـ} ٢٠$

" تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية "

∴ $س = \frac{١}{٥} ( لو_{هـ} ٢٠ - ١ ) = ٠,٣٩٩$ ∴ مجموعة الحل = { ٠,٣٩٩ }

(٨) ∵ $لو_{هـ} ٤^{٢س-١} = لو_{هـ} ٥٠$ ∴ $٤^{٢س-١} = ٥٠$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج : $( ٢س - ١ ) لو_{هـ} ٤ = لو_{هـ} ٥٠$

∴ $٢س لو_{هـ} ٤ - لو_{هـ} ٤ = لو_{هـ} ٥٠$ ∴ $٢س لو_{هـ} ٤ = لو_{هـ} ٥٠ + لو_{هـ} ٤$

∴ $س = \frac{لو_{هـ} ٥٠ + لو_{هـ} ٤}{٢ لو_{هـ} ٤} = ١,٩١$ ∴ مجموعة الحل = { ١,٩١ }

(٩) ∵ $لو_{هـ} هـ^{س} = ٢ لو_{هـ} ٣$ ∴ $س لو_{هـ} هـ = ٢ لو_{هـ} ٣$

∴ $س = ٢ لو_{هـ} ٣$ ∴ مجموعة الحل = { ٢,١٩٧ }

(١٠) ∵ $٧^{س} = ٢٥$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين ينتج : $س لو_{هـ} ٧ = لو_{هـ} ٢٥$

∴ $س = \frac{لو_{هـ} ٢٥}{لو_{هـ} ٧} = ١,٦٥٤$ ∴ مجموعة الحل = { ١,٦٥٤ }

أوجد كلاً من النهايات التالية :

(١١) $\lim_{ن \to ٠} ( ١ + \frac{٢}{ن} )^{٣ن}$ (١٢) $\lim_{ن \to ٠} ( \frac{ن}{ن + ١} )^{ن}$

(١٣) $\lim_{س \to \infty} ( \frac{-١}{٢س + ١} )^{٢س}$

الحل

(١١) نضع : $س = \frac{٢}{ن}$ ∴ $ن = \frac{٢}{س}$ ، عندما : ن ← ٠ فإن : س ← ∞

∴ المقدار $= \lim_{س \to \infty} ( ١ + س )^{\frac{٢}{س} \times ٣} = \lim_{س \to \infty} [ ( ١ + س )^{\frac{١}{س}} ]^{٦} = هـ^{٦}$

(١٢) المقدار $= \lim_{ن \to ٠} ( \frac{ن + ١}{ن} )^{-ن} = \lim_{ن \to ٠} [ ( ١ + \frac{١}{ن} )^{ن} ]^{-١} = هـ^{-١}$

(١٣) بوضع : ص = ٢ س + ١ ∴ ٢ س = ص − ١

، عندما : س ← ∞ فإن : ص ← ∞

∴ المقدار $= \lim_{ص \to \infty} ( \frac{ص - ٢}{ص} )^{ص - ١} = \lim_{ص \to \infty} ( ١ + \frac{-٢}{ص} )^{ص - ١}$

$= \lim_{ص \to \infty} ( ١ + \frac{-٢}{ص} )^{ص} \times \lim_{ص \to \infty} ( ١ + \frac{-٢}{ص} )^{-١}$

$= هـ^{-٢} \times ١ = هـ^{-٢}$

أوجد $\frac{دص}{دس}$ لكل من :

(١٤) $ص = ٧ هـ^{س} - ٣$ (١٥) $ص = هـ^{٣س^٢ + ١}$

(١٦) $ص = س^٢ هـ^{-٣}$ (١٧) $ص = لو_{هـ} ( س^٢ + ٣ )$

(١٨) $ص = س لو_{هـ} س^٢$ (١٩) $ص = هـ^{س} لو_{هـ} ( س^٢ + ١ )$

(٢٠) $ص = \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} + ١}$ (٢١) $ص = س^٢ لو_{هـ} هـ^{س}$

(٢٢) $ص = \frac{١}{س} لو_{هـ} هـ^{س}$

الحل

(١٤) ∵ $ص = ٧ هـ^{س} - ٣$ ∴ $\frac{دص}{دس} = ٧ هـ^{س}$

(١٥) ∵ $ص = هـ^{٣س^٢ + ١}$

∴ $\frac{دص}{دس} = هـ^{٣س^٢ + ١} \times ٦ س = ٦ س هـ^{٣س^٢ + ١}$

(١٦) ∵ $ص = س^٢ هـ^{-٣}$ ∴ $\frac{دص}{دس} = ٢ س هـ^{-٣}$

(١٧) ∵ $ص = لو_{هـ} ( س^٢ + ٣ )$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س^٢ + ٣} \times ٢ س = \frac{٢س}{س^٢ + ٣}$

**(١٨)** $\because \text{ص} = \text{س}\ \text{لو}_\text{هـ}\ \text{س}^2$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{لو}_\text{هـ}\ \text{س}^2 + \text{س} \times \frac{1}{\text{س}^2} \times 2\text{س} = \text{لو}_\text{هـ}\ \text{س}^2 + 2$

**(١٩)** $\because \text{ص} = \text{هـ}^\text{س}\ \text{لو}_\text{هـ}\ (\text{س}^2+1)$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^\text{س}\ \text{لو}_\text{هـ}\ (\text{س}^2+1) + \text{هـ}^\text{س} \times \frac{1}{\text{س}^2+1} \times 2\text{س}$

$= \text{هـ}^\text{س} \left[ \text{لو}_\text{هـ}\ (\text{س}^2+1) + \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+1} \right]$

**(٢٠)** $\because \text{ص} = \frac{\text{هـ}^\text{س}}{\text{هـ}^\text{س}+1}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{هـ}^\text{س}+1)\times\text{هـ}^\text{س} - \text{هـ}^\text{س}\times\text{هـ}^\text{س}}{(\text{هـ}^\text{س}+1)^2} = \frac{\text{هـ}^\text{س}}{(\text{هـ}^\text{س}+1)^2}$

**(٢١)** $\because \text{ص} = \text{س}^2\ \text{لو}_\text{هـ}\ \text{هـ}^\text{س} = \text{س}^2 \times \text{س}\ \text{لو}_\text{هـ}\ \text{هـ} = \text{س}^3$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 3\text{س}^2$

**(٢٢)** $\because \text{ص} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{لو}_\text{هـ}\ \text{هـ}^\text{س} = \frac{1}{\text{س}} \times \text{س}\ \text{لو}_\text{هـ}\ \text{هـ} = 1$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفر}$

أوجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ لكل مما يأتى :

**(٢٣)** $\text{س} = \text{هـ}^{2\text{ن}}$ ، $\text{ص} = \text{هـ}^{3\text{ن}}$

**(٢٤)** $\text{س} = \text{ن}^3$ ، $\text{ص} = 4\ \text{لو}_\text{هـ}\ \text{ن}$

الحل

**(٢٣)** $\because \text{س} = \text{هـ}^{2\text{ن}}$ $\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 2\text{هـ}^{2\text{ن}}$

، $\because \text{ص} = \text{هـ}^{3\text{ن}}$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 3\text{هـ}^{3\text{ن}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{3}{2}\text{هـ}^\text{ن}$ ،

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= \frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\frac{3}{2}\text{هـ}^\text{ن}\right) \times \frac{1}{2}\text{هـ}^{-2\text{ن}}$

$= \frac{3}{2}\text{هـ}^\text{ن} \times \frac{1}{2}\text{هـ}^{-2\text{ن}} = \frac{3}{4}\text{هـ}^{-\text{ن}}$

**(٢٤)** $\because \text{س} = \text{ن}^3$ $\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = 3\text{ن}^2$

، $\because \text{ص} = 4\ \text{لو}_\text{هـ}\ \text{ن}$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{4}{\text{ن}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{4}{\text{ن}} \times \frac{1}{3\text{ن}^2} = \frac{4}{3}\text{ن}^{-3}$ ،

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) = \frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right) \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= \frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\frac{4}{3}\text{ن}^{-3}\right) \times \frac{1}{3\text{ن}^2}$

$= -4\text{ن}^{-4} \times \frac{1}{3\text{ن}^2} = -\frac{4}{3}\text{ن}^{-6}$

أوجد $\frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3}$ لكل مما يأتى :

**(٢٥)** $\text{ص} = \text{لو}_\text{هـ}\ \text{س}$ **(٢٦)** $\text{ص} = \text{س}^3 + \text{هـ}^{2\text{س}}$

**(٢٧)** $\text{ص} = \text{س}\ \text{لو}\ \text{س}$

الحل

**(٢٥)** $\because \text{ص} = \text{لو}_\text{هـ}\ \text{س}$ $\therefore \text{ص}' = \frac{1}{\text{س}} = \text{س}^{-1}$ ، $\text{ص}'' = -\text{س}^{-2}$

، $\text{ص}''' = 2\text{س}^{-3}$ $\therefore \frac{\text{د}^3\text{ص}}{\text{دس}^3} = \frac{2}{\text{س}^3}$

**(٢٦)** ∵ ص = $س^{3}$ + $هـ^{2س}$ ∴ $ص^{/}$ = ٣ $س^{2}$ + ٢ $هـ^{2س}$

، $ص^{//}$ = ٦ س + ٤ $هـ^{2س}$ ، $\frac{ع^{3}ص}{ع س^{3}}$ = ٦ + ٨ $هـ^{2س}$

**(٢٧)** ∵ ص = س لو س

∴ $ص^{/}$ = لو س + س × $\frac{1}{س \; لو_{هـ} 10}$ = لو س + $\frac{1}{لو_{هـ} 10}$

∴ $ص^{//}$ = $\frac{1}{س}$ = $س^{-1}$ ، $ص^{///}$ = − $س^{-2}$

∴ $\frac{ع^{3}ص}{ع س^{3}}$ = $\frac{-2}{س^{2}}$

**(٢٨)** إذا كان : $هـ^{س ص}$ = $س^{2}$ + ص أثبت أن :

( س $هـ^{س ص}$ − ١ ) $ص^{/}$ = ٢ س − ص $هـ^{س ص}$

الحل

∵ $هـ^{س ص}$ = $س^{2}$ + ص بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$هـ^{س ص}$ ( ص + س $ص^{/}$ ) = ٢ س + $ص^{/}$

∴ ص $هـ^{س ص}$ + س $ص^{/}$ $هـ^{س ص}$ = ٢ س + $ص^{/}$

∴ س $ص^{/}$ $هـ^{س ص}$ − $ص^{/}$ = ٢ س − ص $هـ^{س ص}$

∴ ( س $هـ^{س ص}$ − ١ ) $ص^{/}$ = ٢ س − ص $هـ^{س ص}$

**(٢٩)** إذا كان : $س^{2}$ ص = أ ب $لو_{هـ}$ س أثبت أن :

$س^{2}$ $ص^{//}$ + ٥ س $ص^{/}$ + ٤ س ص = ٠ .

الحل

∵ $س^{2}$ ص = أ ب $لو_{هـ}$ س بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س ص + $س^{2}$ $ص^{/}$ = أ ب × $\frac{1}{س}$ بالضرب × س ينتج :

٢ $س^{2}$ ص + $س^{3}$ $ص^{/}$ = أ ب بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

٤ س ص + ٢ $س^{2}$ $ص^{/}$ + ٣ $س^{2}$ $ص^{/}$ + $س^{3}$ $ص^{//}$ = ٠ .

بالقسمة ÷ س و الاختصار ينتج : $س^{2}$ $ص^{//}$ + ٥ س $ص^{/}$ + ٤ س ص = ٠ .

أوجد $\frac{ع ص}{ع س}$ لكل مما يأتى :

**(٣٠)** ص = $2^{س}$ ( س + ٣ ) **(٣١)** ص = ٣ $س^{س^{2} + 3}$

**(٣٢)** ص = $(1 - 3 س)^{حتا س}$ **(٣٣)** ص = $س^{هـ^{س}}$

الحل

**(٣٠)** ∵ ص = $2^{س}$ ( س + ٣ )

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = $2^{س}$ $لو_{هـ}$ ٢ ( س + ٣ ) + $2^{س}$ × ١

= $2^{س}$ [ $لو_{هـ}$ ٢ ( س + ٣ ) + ١ ]

**(٣١)** ∵ ص = ٣ $س^{س^{2} + 3}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين :

$لو_{هـ}$ ص = ( $س^{2}$ + ٢ ) $لو_{هـ}$ ٣ س بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{1}{ص}$ × $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢ س $لو_{هـ}$ ٣ س + ( $س^{2}$ + ٢ ) × $\frac{1}{3 س}$ × ٣

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ص ( ٢ س $لو_{هـ}$ ٣ س + $\frac{س^{2}+2}{3}$ )

= ٣ $س^{س^{2} + 3}$ ( ٢ س $لو_{هـ}$ ٣ س + $\frac{س^{2}+2}{3}$ )

**(٣٢)** ∵ ص = $(1 - 3 س)^{حتا س}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين :

$لو_{هـ}$ ص = حتا س ( ١ − ٣ س ) بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\frac{1}{ص}$ × $\frac{ع ص}{ع س}$ = − حا س ( ١ − ٣ س ) + حتا س × $\frac{1}{1 - 3 س}$ × ( −٣ )

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = − ص [ حا س ( ١ − ٣ س ) + $\frac{3 حتا س}{1 - 3 س}$ ]

= − $(1 - 3 س)^{حتا س}$ [ حا س ( ١ − ٣ س ) + $\frac{3 حتا س}{1 - 3 س}$ ]

(٣٣) ∵ $ص = س^{هـ^{س}}$   بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين :

$لو_{هـ} ص = هـ^{س} لو_{هـ} س$   بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$$\frac{1}{ص} \times \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س} لو_{هـ} س + هـ^{س} \times \frac{1}{س}$$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ص\, هـ^{س} \left( لو_{هـ} س + \frac{1}{س} \right)$$

$$= س^{هـ^{س}} \times هـ^{س} \left( لو_{هـ} س + \frac{1}{س} \right)$$

**أوجد قيم س التي يكون عندها مماس المنحنى يوازى محور السينات حيث : س > ٠ .**

(٣٤) $ص = س^{٣} لو_{هـ} س$   (٣٥) $ص = \frac{1}{س^{٢}} لو_{هـ} س^{٢}$

(٣٦) $ص = س^{٣} - ٨١ لو_{هـ} س$   (٣٧) $ص = ٣ - \frac{س^{٢}}{٤} + لو_{هـ} \frac{س}{٢}$

**الحل**

(٣٤) $ص' = ٣ س^{٢} لو_{هـ} س + س^{٣} \times \frac{1}{س} = ٣ س^{٢} لو_{هـ} س + س^{٢}$

∵ مماس المنحنى يوازى محور السينات ∴ نضع : ص' = ٠ .

∴ $٣ س^{٢} لو_{هـ} س + س^{٢} = ٠$ . و منها : $٣ لو_{هـ} س = -١$

∴ $لو_{هـ} س = -\frac{1}{3}$   ∴ $س = هـ^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{هـ}}$

(٣٥) $ص' = \frac{-٢}{س^{٣}} لو_{هـ} س^{٢} + \frac{1}{س^{٢}} \times \frac{1}{س^{٢}} \times ٢ س$

$= \frac{-٢}{س^{٣}} لو_{هـ} س^{٢} + \frac{٢}{س^{٣}} = \frac{-٢}{س^{٣}} ( لو_{هـ} س^{٢} - ١ )$

∵ مماس المنحنى يوازى محور السينات ∴ نضع : ص' = ٠ .

∴ $لو_{هـ} س^{٢} = ١$   ∴ $س^{٢} = هـ$

، ∵ س > ٠ .   ∴ $س = \sqrt{هـ}$

(٣٦) $ص' = ٣ س^{٢} - ٨١ \times \frac{1}{س} = \frac{٣}{س} ( س^{٣} - ٢٧ )$

∵ مماس المنحنى يوازى محور السينات ∴ نضع : ص' = ٠ .

∴ $س^{٣} - ٢٧ = ٠$ .   و منها : س = ٣

(٣٧) $ص' = -\frac{٢ س}{٤} + \frac{٢}{س} \times \frac{1}{2} = -\frac{س}{٢} + \frac{1}{س} = \frac{س^{٢} - ٢}{٢ س}$

∵ مماس المنحنى يوازى محور السينات ∴ نضع : ص' = ٠ .

∴ $س^{٢} - ٢ = ٠$ .  ، ∵ س > ٠ .  ∴ $س = \sqrt{٢}$

(٣٨) إذا كان : $س\, هـ^{-\frac{1}{2} ص} + ص\, هـ^{-\frac{1}{2} س} = ٢$

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند : س = ٠ .

**الحل**

∵ $س\, هـ^{-\frac{1}{2} ص} + ص\, هـ^{-\frac{1}{2} س} = ٢$   ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$هـ^{-\frac{1}{2} ص} - \frac{1}{2} س\, هـ^{-\frac{1}{2} ص} ص' + ص' هـ^{-\frac{1}{2} س} - \frac{1}{2} ص\, هـ^{-\frac{1}{2} س} = ٠$ .

$ص' ( هـ^{-\frac{1}{2} س} - \frac{1}{2} س\, هـ^{-\frac{1}{2} ص} ) = \frac{1}{2} ص\, هـ^{-\frac{1}{2} س} - هـ^{-\frac{1}{2} ص}$

، عند : س = ٠ .   فإن : ص = ٢ ،

$ص' ( ١ - ٠ ) = \frac{1}{2} \times ٢ \times ١ - هـ^{-١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١ - هـ^{-١} = ١ - \frac{1}{هـ} = \frac{هـ - ١}{هـ}$

**أوجد كلاً من التكاملات الآتية :**

(٣٩) $\int \frac{٩ + ٦ س}{س^{٢} + ٣ س} ءس$   (٤٠) $\int \frac{لو_{هـ} س}{س \sqrt{لو_{هـ} س}} ءس$

(٤١) $\int \left( \frac{٣}{س} + ٤ هـ^{-٢ س} \right) ءس$   (٤٢) $\int \left( \frac{هـ^{٣}}{س} + س لو_{هـ} ٣ \right) ءس$

**(٤٣)** $\int (س^{٣} - \frac{٣}{٢} هـ^{س}) \, ء س$     **(٤٤)** $\int طتا^{٣} س \, ء س$

الحل

**(٣٩)** المقدار $= ٣ \int \frac{٣ + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س} \, ء س$ ، $\because (س^{٢} + ٣ س)' = ٣ + ٢ س$

$\therefore$ المقدار $=$ لوهـ $| س^{٢} + ٣ س | +$ ث

**(٤٠)** المقدار $= \int \frac{لو_{هـ} س}{\frac{١}{٢} س \, لو_{هـ} س} \, ء س = ٢ \int \frac{١}{س} \, ء س = ٢ \, لو_{هـ} | س | +$ ث

**(٤١)** المقدار $= ٣ \, لو_{هـ} | س | - ٢ \, هـ^{-٢ س} +$ ث

**(٤٢)** المقدار $= هـ^{٣} لو_{هـ} | س | + \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} ٣ +$ ث

**(٤٣)** المقدار $= \frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٣}{٢} هـ^{س} +$ ث

**(٤٤)** المقدار $= \int طتا^{٢} س \times طتا س \, ء س = \int (قتا^{٢} س - ١) طتا س \, ء س$

$= \int (قتا^{٢} س \, طتا س - طتا س) \, ء س$

$= \int (طتا س \, قتا^{٢} س - \frac{حتا س}{حا س}) \, ء س$

$= \frac{١}{٢} طتا^{٢} س - لو_{هـ} | حا س | +$ ث

**(٤٥)** إذا كان مماس المنحنى : $ص = هـ^{س}$ عند النقطة $( ٢ ، هـ^{٢} )$ يقطع محور السينات فى النقطة أ ، و محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

$\because ص = هـ^{س}$     $\therefore \frac{ءص}{ءس} = هـ^{س}$

$\therefore$ ميل المماس $= [\frac{ءص}{ءس}]_{(٢ ، هـ^{٢})} = هـ^{٢}$

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة $( ٢ ، هـ^{٢} )$ هى : $ص - هـ^{٢} = هـ^{٢} ( س - ٢ )$

أى : $هـ^{٢} س - ص - هـ^{٢} = ٠$

، بوضع : ص = ٠   ينتج : س = ١

$\therefore$ نقطة تقاطع المماس مع محور السينات هى : أ ( ١ ، ٠ )

، بوضع : س = ٠   ينتج : $ص = - هـ^{٢}$

$\therefore$ نقطة تقاطع المماس مع محور الصادات هى : ب $( ٠ ، - هـ^{٢} )$

$\therefore (أب)^{٢} = (١ - ٠)^{٢} + (٠ + هـ^{٢})^{٢} = ١ + هـ^{٤}$

$\therefore أب = \sqrt{١ + هـ^{٤}} = ٧,٤٥٦$   أى أن : طول $\overline{أب} = ٧,٤٥٦$ وحدة طول

**(٤٦)** أوجد معادلتى المماس و العمودى للمنحنى :

$ص = س^{٣} - ١٨ \, لو_{هـ} س$ عند نقطة تقع عليه و إحداثيها السينى يساوى ٢

الحل

$\because ص = س^{٣} - ١٨ \, لو_{هـ} س$     $\therefore ص' = ٣ س^{٢} - ١٨ \times \frac{١}{س}$

و عندما : س = ٢   فإن : $ص = ٨ - ١٨ \, لو_{هـ} ٢ = - ٤,٤٨$

، ميل المماس $= [ص']_{س = ٢} = ١٢ - ٩ = ٣$ ، ميل العمودى $= - \frac{١}{٣}$

$\therefore$ معادلة المماس عند النقطة ( ٢ ، − ٤,٤٨ ) هى :

$ص + ٤,٤٨ = ٣ ( س - ٢ )$   أى : $٣ س - ص - ٦,٤٨ = ٠$

و معادلة العمودى عند النقطة ( ٢ ، − ٤,٤٨ ) هى :

$ص + ٤,٤٨ = ( - \frac{١}{٣} ) ( س - ٢ )$   أى : $٣ س + ص - ١١,٤٤ = ٠$

**(٤٧)** إذا كان ميل المماس عند أى نقطة ( س ، ص ) على منحنى يتناسب عكسياً مع س و كان ميل المماس يساوى ٢ عند :

س = ٤ ، ص = ٢ أوجد ص بدلالة س

**الحل**

∵ ص' ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص' = $\frac{ك}{س}$ حيث : ك ثابت ≠ ٠

، ∵ عند : س = ٤ فإن : ص' = ٢ ∴ ٢ = $\frac{٤}{س}$ ∴ ك = ٨

∴ ص' = $\frac{٨}{س}$ ∴ ص = ∫ $\frac{٨}{س}$ ءس = ٨ لو$_{هـ}$ | س | + ث

، ∵ س = ٤ ، ص = ٢ ∴ ٢ = ٨ لو$_{هـ}$ | ٤ | + ث

∴ ث = ٢ − ٨ لو$_{هـ}$ ٤ ∴ ص = ٨ لو$_{هـ}$ | س | + ٢ − ٨ لو$_{هـ}$ ٤

**(٤٨)** أوجد قيم س ( لأقرب رقمين عشريين ) التى يكون عندها مماس المنحنى : ص = $\frac{١}{س^٢}$ لو$_{هـ}$ س$^٢$ موازياً لمحور السينات

**الحل**

ص' = $\frac{-٢}{س^٣}$ لو$_{هـ}$ س$^٢$ + $\frac{١}{س^٢}$ × $\frac{١}{س^٢}$ × ٢ س

= $\frac{-٢}{س^٣}$ لو$_{هـ}$ س$^٢$ + $\frac{٢}{س^٣}$ = $\frac{-٢}{س^٣}$ ( لو$_{هـ}$ س$^٢$ − ١ )

∵ مماس المنحنى يوازى محور السينات ∴ نضع : ص' = ٠

∴ لو$_{هـ}$ س$^٢$ = ١ ∴ س$^٢$ = هـ ∴ س = ± $\sqrt{هـ}$

∴ قيم س التى تجعل المنحنى موازياً لمحور السينات هى :

س = ± $\sqrt{هـ}$ = ± ١,٦٥

## حل اختبار تراكمى صفحة ٥٩ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

**(١)** نهـــا$_{س ← ∞}$ $( ١ + \frac{١}{س} )^{٢س}$ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) هـ (ء) هـ$^٢$

**(٢)** إذا كان : م = هـ$^{لو_{هـ} ٧}$ فإن : م = ....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{هـ}$ (حـ) هـ (ء) ٧

**(٣)** مجموعة حل المعادلة :

لو$_{هـ}$ ( س − ٣ ) + لو$_{هـ}$ ( س − ٢ ) = لو$_{هـ}$ ٦ هى : ....

(أ) { ٠ ، ٥ } (ب) { ٥ } (حـ) { ٢ ، ٣ } (ء) $\phi$

**(٤)** إذا كان د (س) = س$^٢$ − ٣ لو$_{هـ}$ ٥ س فإن د' (٢) = ....

(أ) − ١ (ب) ١ (حـ) $\frac{٥}{٢}$ (ء) ٦

**الحل**

**(١)** المقدار = نهـــا$_{س ← ∞}$ $[ ( ١ + \frac{١}{س} )^{س} ]^٢$ = هـ$^٢$

**(٢)** م = ٧ مباشرة " خواص اللوغاريتم الطبيعى "

**(٣)** لو$_{هـ}$ [ ( س − ٣ ) ( س − ٢ ) ] = لو$_{هـ}$ ٦

∴ س$^٢$ − ٥ س + ٦ = ٦ ∴ س$^٢$ − ٥ س = ٠

∴ س ( س − ٥ ) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ٥

∴ مجموعة الحل = { ٠ ، ٥ }

**(٤)** د' (س) = ٢ س − ٣ × $\frac{١}{٥ س}$ × ٥ = ٢ س − $\frac{٣}{س}$

$\therefore$ $د^{/}(٢) = ٤ - \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٢}$

أجب عن الأسئلة الآتية :

**(٥)** أوجد المشتقة الأولى لكل من :

(أ) $ص = (س^{٣} + ١)^{٢}$　　(ب) $ص = لو_{هـ} س^{٢} - هـ^{\frac{١}{٤} س}$

(حـ) $ص = لو_{هـ} \left[ \frac{هـ^{س^{٢}}}{س^{٢}} \right]$

**الحل**

(أ) $ص^{/} = ٢ (س^{٣} + ١) \times ٣ س^{٢} = ٣ س^{٢} (س^{٣} + ١)$

(ب) $ص^{/} = \frac{١}{س^{٢}} \times ٢ س - \frac{١}{٤} هـ^{\frac{١}{٤} س} = \frac{٢}{س} - \frac{١}{٤} هـ^{\frac{١}{٤} س}$

(حـ) $\because$ $ص = لو_{هـ} هـ^{س^{٢}} - لو_{هـ} س^{٢} = س^{٢} لو_{هـ} هـ - ٢ لو_{هـ} س$

$= س^{٢} - ٢ لو_{هـ} س$

$\therefore$ $ص^{/} = ٢ س - ٢ \times \frac{١}{س} = ٢ ( س - \frac{١}{س} )$

**(٦)** إذا كانت : $ص = هـ^{٣ س} + س^{٢}$ أثبت أن :

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} - ٢ = ٩ ( ص - س^{٢} )$

**الحل**

$\because$ $ص = هـ^{٣ س} + س^{٢}$ (١) $\therefore$ بالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى س ينتج :

$ص^{/} = ٣ هـ^{٣ س} + ٢ س$ ، $ص^{//} = ٩ هـ^{٣ س} + ٢$ (٢)

، $\because$ من (١) : $هـ^{٣ س} = ص - س^{٢}$ بالتعويض فى (٢) ينتج :

$ص^{//} = ٩ ( ص - س^{٢} ) + ٢$ و منها : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٩ ( ص - س^{٢} ) + ٢$

**(٧)** أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

(أ) $\int \frac{٢ س^{٢} + ٣}{س} ءس$　　(ب) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}\ هـ^{\sqrt{س}}}$

(حـ) $\int \frac{٣}{٢ س لو_{هـ} س} ءس$

**الحل**

(أ) المقدار $= \int ( ٢ س + \frac{٣}{س} ) ءس = س^{٢} + ٣ لو_{هـ} | س | + ث$

(ب) المقدار $= - ٢ \int ( هـ^{- \sqrt{س}} \times \frac{- ١}{٢ \sqrt{س}} ) ءس$

، $\because$ $( - \sqrt{س} )^{/} = \frac{- ١}{٢ \sqrt{س}}$ $\therefore$ المقدار $= - ٢ هـ^{- \sqrt{س}} + ث$

(حـ) المقدار $= \frac{٣}{٢} \int \frac{\frac{١}{س}}{لو_{هـ} س} ءس = \frac{٣}{٢} لو_{هـ} | لو_{هـ} س | + ث$

**(٨)** إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه ( س ، ص ) يساوى $٧ - ٢ هـ^{س}$ ، و كان $د ( لو_{هـ} ٢ ) = ٣$ ، أوجد د (س)

**الحل**

$\because$ $د^{/}(س) = ٧ - ٢ هـ^{س}$

$\therefore$ $د(س) = \int ( ٧ - ٢ هـ^{س} ) ءس = ٧ س - ٢ هـ^{س} + ث$

، $\because$ $د ( لو_{هـ} ٢ ) = ٣$ $\therefore$ $٣ = ٧ لو_{هـ} ٢ - ٢ هـ^{لو_{هـ} ٢} + ث$

$\therefore$ $٣ = ٧ لو_{هـ} ٢ - ٢ \times ٢ + ث$ و منها : $ث = ٧ - ٧ لو_{هـ} ٢$

$\therefore$ $د(س) = ٧ س - ٢ هـ^{س} + ٧ - ٧ لو_{هـ} ٢$

$= ٧ ( س + ١ - لو_{هـ} ٢ ) - ٢ هـ^{س}$

# اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

## الاختبار الأول

**[١]** اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(١)** أى الدوال التالية تحقق العلاقة : $\frac{\text{ع}^3\text{ص}}{\text{ع س}^3} = \text{ص}$

(أ) $\text{ص} = \frac{1}{12}(\text{س}+1)^4$ (ب) ص = حا س

(جـ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ (د) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س} - 1}$

الحل

بإيجاد المشتقة الثالثة للدوال نجد أن : الدالة $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ تحقق العلاقة حيث :

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{\text{ع}^2\text{ص}}{\text{ع س}^2} = \frac{\text{ع}^3\text{ص}}{\text{ع س}^3} = \text{هـ}^{\text{س}}$ " إدرس الدوال الأخرى بنفسك "

**[٢] (ب)** إذا كان : $\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{س}^2 + \text{ص}^3 = 0$ .

أوجد $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ عند س = ٠ .

الحل

∵ $\text{هـ}^{\text{س ص}} - \text{س}^2 + \text{ص}^3 = 0$ . باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ $\text{ص هـ}^{\text{س ص}} + \text{س هـ}^{\text{س ص}} \times \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} - 2\text{س} + 3\text{ص}^2 \times \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = 0$ (١)

عند : س = ٠ فإن : $\text{هـ}^0 - 0 + \text{ص}^3 = 0$ .

∴ $1 + \text{ص}^3 = 0$ و منها : ص = −١ بالتعويض من (١) ينتج :

$(-1) \times \text{هـ}^0 + 0 \times \text{هـ}^0 \times \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} - 2 \times 0 + 3 \times (-1)^2 \times \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = 0$ .

∴ $(-1) \times 3 \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = 0$ . و منها : $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{1}{3}$

## الاختبار الثانى

**[١]** اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(١)** معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث : $\text{د(س)} = \text{هـ}^{2\text{س}+1}$ عند النقطة $(-\frac{1}{2} ، 1)$ هى ....

(أ) ٢ ص = س + ١ (ب) ص = ٢ س + ٢

(جـ) ص = ٢ س − ٣ (د) ٢ ص = ٣ س + ١

الحل

∵ $\text{د(س)} = \text{هـ}^{2\text{س}+1}$ ∴ $\text{د}'\text{(س)} = 2\,\text{هـ}^{2\text{س}+1}$

∴ م ( ميل المماس ) $= [\text{د}'\text{(س)}]_{(-\frac{1}{2} ، 1)} = 2$

∴ معادلة المماس هى : $\text{ص} - 1 = 2(\text{س} + \frac{1}{2})$ أى : ص = ٢ س + ٢

**(٤)** إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{1}{\text{س} - 2}$ و كان المنحنى يمر بالنقطة ( ٣ ، ٠ ) فإن $\text{د}(\text{هـ}^2 + 2)$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\text{لو}_{\text{هـ}} 2$ (د) $\text{لو}_{\text{هـ}} 3$

الحل

∵ $\text{د}'\text{(س)} = \frac{1}{\text{س} - 2}$ ∴ $\text{د(س)} = \int \frac{1}{\text{س} - 2}\,\text{ء س}$

∴ $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} - 2) + \text{ث}$ ، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( ٣ ، ٠ )

∴ $0 = \text{لو}_{\text{هـ}} 1 + \text{ث}$ و منها : ث = ٠ . ∴ $\text{د(س)} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} - 2)$

، $\text{د}(\text{هـ}^2 + 2) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{هـ}^2 + 2 - 2) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ}^2 = 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = 2$

## الاختبار الثالث

[٢] (أ) أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س حيث : $ص = س^{٢} لو_{هـ} س$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ س لو_{هـ} س + س^{٢} \times \frac{١}{س} = ٢ س لو_{هـ} س + س$

$= س (٢ لو_{هـ} س + ١) = س (لو_{هـ} س^{٢} + ١)$

## الاختبار الرابع

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int (٣ س^{٢} - ٤ هـ^{٢س}) ء س$ ،

الحل

(١) $\int (٣ س^{٢} - ٤ هـ^{٢س}) ء س = ٣ \times \frac{١}{٣} س^{٣} - ٤ \times \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ث$

$= س^{٣} - ٢ هـ^{٢س} + ث$

## الاختبار الخامس

[٢] (أ) أوجد : (٢) $\int \frac{٥ س}{٣ س^{٢} - ١} ء س$

الحل

(٢) $\int \frac{٥ س}{٣ س^{٢} - ١} ء س = \frac{٥}{٦} \int \frac{٦ س}{٣ س^{٢} - ١} ء س = \frac{٥}{٦} \int \frac{(٣ س^{٢} - ١)'}{٣ س^{٢} - ١} ء س$

$= \frac{٥}{٦} لو_{هـ} | ٣ س^{٢} - ١ | + ث$

[٤] (أ) أوجد $\lim_{س \to \infty} \left( \frac{٢س - ١}{٢س + ١} \right)^{٢س}$

الحل

بوضع : $ص = ٢ س + ١$ ∴ $٢ س = ص - ١$

، $٢ س - ١ = ص - ٢$ ، عندما : $س \to \infty$ فإن : $ص \to \infty$

∴ المقدار $= \lim_{ص \to \infty} \left( \frac{ص - ٢}{ص} \right)^{ص - ١}$

$= \lim_{ص \to \infty} \left( ١ + \frac{-٢}{ص} \right)^{ص} \times \lim_{ص \to \infty} \left( ١ + \frac{-٢}{ص} \right)^{-١}$

$= هـ^{-٢} \times ١ = هـ^{-٢}$

## الاختبار السادس

[١] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(٥) إذا كان $ص = س لو_{هـ} س - س$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = لو_{هـ} س$

(أ) (ب)

الحل

(٥) (أ) لأن : ∵ $ص = س لو_{هـ} س - س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = لو_{هـ} س + س \times \frac{١}{س} - ١ = لو_{هـ} س + ١ - ١ = لو_{هـ} س$

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٧ س^{٣}}{٢ - ٥ س^{٤}} ء س$ ،

(٢) $\int (٣ هـ^{-٥س} + \frac{\pi}{س}) ء س$

الحل

(١) المقدار $= \frac{٧}{٢٠} \int \frac{٢٠ س^{٣}}{٢ - ٥ س^{٤}} ء س = \int \frac{(٢ - ٥ س^{٤})'}{٢ - ٥ س^{٤}} ء س$

$= \frac{٧}{٢٠} لو_{هـ} | ٢ - ٥ س^{٤} | + ث$

(٢) المقدار $= ٣ \int هـ^{-٥س} ءس + \pi \int \frac{١}{س} ءس$

$= -\frac{٣}{٥} هـ^{-٥س} + \pi \; لو_{هـ} |س| + ث$

(ب) إذا كان : $ص = أ \; هـ^{س^٢ - ١}$ حيث : أ ثابت أثبت أن :

$$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = ٤ \; س \; ص \; (٣ + ٢ \; س^٢)$$

الحل

$\frac{ءص}{ءس} = ٢ \; س \; أ \; هـ^{س^٢ - ١}$

$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٢ \; أ \; هـ^{س^٢ - ١} + ٤ \; س^٢ \; أ \; هـ^{س^٢ - ١}$

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = ٤ \; س \; أ \; هـ^{س^٢ - ١} + ٨ \; س \; أ \; هـ^{س^٢ - ١} + ٨ \; س^٣ \; أ \; هـ^{س^٢ - ١}$

$= ١٢ \; س \; أ \; هـ^{س^٢ - ١} + ٨ \; س^٣ \; أ \; هـ^{س^٢ - ١}$

$= ٤ \; س \; أ \; هـ^{س^٢ - ١} (٣ + ٢ \; س^٢) = ٤ \; س \; ص \; (٣ + ٢ \; س^٢)$

[٥] (أ) أوجد معدل تغير $لو_{هـ} |٩ + س^٣|$ بالنسبة إلى $س^٢ + ٣$ عندما س + ١

الحل

نضع : $ص = لو_{هـ} |٩ + س^٣|$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ \; س^٢}{٩ + س^٣}$

، $ع = س^٢ + ٣$ ∴ $\frac{ءع}{ءس} = ٢ \; س$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{٣ \; س^٢}{٩ + س^٣} \times \frac{١}{٢ \; س}$

، عندما س = ١ ∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢٠}$

## الاختبار السابع

[١] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(٥) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{٥}{س})^{س} = هـ^{٥}$ (أ) (ب)

الحل

(٥) (أ) لأن : العبارة صحيحة مباشرة

(٦) $\int (\frac{٢هـ}{س} + \frac{س}{هـ}) ءس = ٢هـ \; لو_{هـ} |س| - \frac{س^٢}{هـ} + ث$

(أ) (ب)

الحل

(٦) (ب) ، التصحيح : المقدار $= ٢هـ \int \frac{١}{س} ءس + هـ \int س \; ءس =$

$= ٢هـ \; لو_{هـ} |س| + \frac{س^٢}{٢هـ} + ث$

[٢] (ب) أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = لو_{هـ} (٢ - \sqrt{٢} \; حتا \; س)$ عند النقطة التى تقع عليه و إحداثيها السينى يساوى $\frac{١}{٤}\pi$

الحل

∵ $ص = لو_{هـ} (٢ - \sqrt{٢} \; حتا \; س)$

∴ عند : $س = \frac{١}{٤}\pi$ فإن : $ص = لو_{هـ} (٢ - \sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}) = لو_{هـ} ١ = ٠$ .

، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\sqrt{٢} \; حا \; س}{٢ - \sqrt{٢} \; حتا \; س}$

، ميل المماس $= [\frac{ءص}{ءس}]_{(\frac{١}{٤}\pi ، ٠)} = \frac{\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}{٢ - \sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}} = ١$

∴ معادلة المماس هى : $\text{ص} - ٠ = ١ \times (\text{س} - \frac{١}{٤}\pi)$

أى : $\text{ص} = \text{س} - \frac{١}{٤}\pi$

## الاختبار الثامن

[أ] اكمل ما يلى :

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} [\ ٧\ \text{هـ}^{\text{قاس}}\ ] = ....$

الحل

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} [\ ٧\ \text{هـ}^{\text{قاس}}\ ] = ٧\ \text{قاس طاس}\ \text{هـ}^{\text{قاس}}$

(٦) إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^٢ \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{أ}}$ ، $\text{أ} \neq ٠$

فإن : $\left[ \frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} \right]_{\text{س}=٤} = ....$

الحل

(٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{س}^٢ \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{أ}} = ٢\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{س}$

$\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + ٢\text{س} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{أ}} = ٢\ \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}}{\text{أ}} + ٢$

$\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} = ٢ \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{أ}} = \frac{٢}{\text{س}}$ ∴ $\left[ \frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣} \right]_{\text{س}=٤} = \frac{١}{٢}$

## الاختبار التاسع

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^٢ - ١}\ \text{ءس}$ ،

الحل

(١) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^٢ - ١}\ \text{ءس} = \frac{٣}{٢} \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ١}\ \text{ءس} = \frac{٣}{٢} \int \frac{(\text{س}^٢ - ١)'}{\text{س}^٢ - ١}\ \text{ءس}$

$= \frac{٣}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\ \text{س}^٢ - ١\ |$

## الاختبار العاشر

[أ] اكمل ما يلى :

(١) $\lim_{\text{س} \to \infty} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س}+٢} = ....$

الحل

(١) المقدار $= \lim_{\text{س} \to \infty} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to \infty} (١ + \frac{١}{\text{س}})^{٢}$

$= \text{هـ} \times ١ = \text{هـ}$

تم بحمد الله و عونه

أحمد الشنتورى

# المتميز

# فى
# الرياضيات البحتة
# التفاضل و التكامل

## الجزء النظرى
## و
## حلول التمارين
## الوحدة الثالثة

لو$_{هـ}$ | س | — نهـــا (س ← ∞) — ء ص / ء س — ∫

## إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

# الوحدة الثالثة .... سلوك الدالة و رسم المنحنيات

## ١ – ١ تزايد و تناقص الدوال

تذكر ما يلى :

[١] إشارة الدالة الثابتة :

قاعدة الدالة : د ( س ) = حـ حيث : حـ ≠ ٠ .

هى نفس إشارة حـ لكل س ∈ ح

[٢] إشارة الدالة الخطية :

قاعدة الدالة : د ( س ) = ب س + حـ ، ب ≠ ٠ .

فتكون : س = $\frac{-حـ}{ب}$ عندما د ( س ) = ٠ .

و إشارة الدالة تتحدد حسب الشكل التالى :

| س | – ∞ | $\frac{-حـ}{ب}$ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د | مخالفة لإشارة معامل س | ٠ | مثل إشارة معامل س |

[٣] إشارة الدالة التربيعية :

قاعدة الدالة : د ( س ) = ٲ $س^2$ + ب س + حـ ، ٲ ≠ ٠ .

نوجد المميز : $ب^2$ – ٤ ٲ حـ ، توجد ثلاث حالات هى :

(١) إذا كان : $ب^2$ – ٤ ٲ حـ = ٠ .

فإن : للدالة جذران حقيقيان متساويان

، بفرض أن كل منهما يساوى ل

و إشارة الدالة تكون : مثل إشارة معامل $س^2$ عندما : س ≠ ل

، د ( س ) = ٠ . عندما : س ≠ ل

(٢) إذا كان : $ب^2$ – ٤ ٲ حـ > ٠ .

فإن : للدالة جذران حقيقيان مختلفان

، بفرض أنهما " ل ، م " ، ل > م

و إشارة الدالة تتحدد حسب الشكل التالى :

| س | – ∞ | ل | | م | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د | مثل إشارة معامل $س^2$ | ٠ | مخالفة لإشارة معامل $س^2$ | ٠ | مثل إشارة معامل $س^2$ |

(٣) إذا كان : $ب^2$ – ٤ ٲ حـ > ٠ .

فإن : الدالة ليس لها جذور حقيقية

و إشارة الدالة تكون : مثل إشارة معامل $س^2$ لكل س ∈ ح

## تزايد و تناقص الدوال

نعلم أن :

(١) يقال للدالة د :

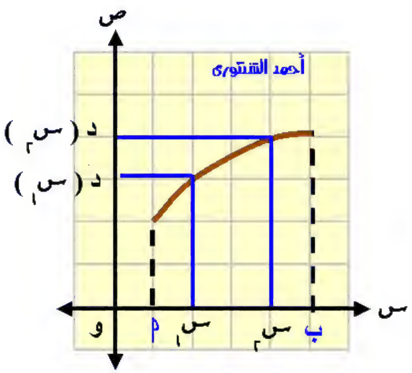
أنها تزايدية فى ] ٲ ، ب [

إذا كان :

لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈ ] ٲ ، ب [

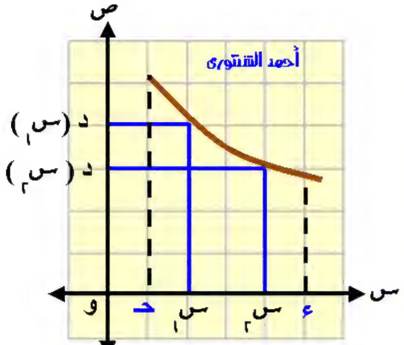
حيث : $س_2$ > $س_1$

فإن : د ( $س_2$ ) > د ( $س_1$ )




أى أن : الدالة تكون متزايدة فى فترة ما إذا كانت قيمتها تتزايد بتزايد س

(٢) يقال للدالة د أنها تناقصية فى ] حـ ، ء [ إذا كان :
لكل س١ ، س٢ ∈ ] حـ ، ء [
حيث : س٢ > س١
فإن : د ( س٢ ) < د ( س١ )




أى أن : الدالة تكون متناقصة فى فترة ما إذا كانت قيمتها تتناقص بتناقص س

**اختبار المشتقة الأولى للدوال المطردة :**

**نظرية :**

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة ] أ ، ب [ :

(١) إذا كانت : د/ ( س ) > ٠ لجميع قيم س ∈ ] أ ، ب [
فإن : الدالة د متزايدة على ] أ ، ب [

(٢) إذا كانت : د/ ( س ) < ٠ لكل س ∈ ] أ ، ب [
فإن : الدالة متناقصة على ] أ ، ب [

**خطوات بحث تزايد و تناقص الدالة باستخدام المشتقة الأولى :**

(١) نحدد مجال الدالة

(٢) نحل المعادلة : د/ ( س ) = ٠

(٣) نوجد النقط التى عندها :
د/ ( س ) = ٠ أو د/ ( س ) غير موجودة

(٤) نحدد الفترات التى ينقسم إليها مجال الدالة بهذه النقط

(٥) نعين إشارة د/ ( س ) فى كل فترة من هذه الفترات بإحدى الطرق :

(١) دراسة إشارة د/ ( س )

(٢) التعويض عن إحدى قيم س التى تنتمى للفترة فى د/ ( س ) و لتكن حـ فإذا كانت :
[١] د/ ( حـ ) > ٠ فإن : د/ ( س ) متزايدة فى هذه الفترة
[٢] د/ ( حـ ) < ٠ فإن : د/ ( س ) متناقصة فى هذه الفترة

(٣) ايجاد مجموعة حل المتباينتين :
[١] د/ ( س ) > ٠ فتكون : د/ ( س ) متزايدة فى هذه الفترة
[٢] د/ ( س ) < ٠ فتكون : د/ ( س ) متناقصة فى هذه الفترة

و الشكلين التاليين يوضحان ذلك :

| س | −∞ | | حـ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | | + + | ٠ | − − | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | | ↘ | |

| س | −∞ | | حـ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | | + + | غير موجودة | − − | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | | ↘ | |

**ملاحظات :**

(١) الدالة تتزايد فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها فى هذه الفترة موجباً أى إذا كان المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٢) الدالة تتناقص فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها فى هذه الفترة سالباً أى إذا كان المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه

(٣) قيم س التى تفصل بين فترات التزايد و التناقص للدالة هى القيم التى تكون عندها المشتقة الأولى للدالة تساوى صفراً أو غير موجودة

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٦٣

حدد فترات التزايد و التناقص لكل مما يأتى :

(أ) $د(س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٥ س$

(ب) $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$

### الحل

(أ) ∵ $د(س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٥ س$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ $د'(س) = ٣ س^{٢} - ١٨ س + ١٥ = ٣ ( س^{٢} - ٦ س + ٥ )$

$= ٣ ( س - ١ ) ( س - ٥ )$

بوضع : $د'(س) = ٠$ يكون : س = ١ ، س = ٥

ببحث إشارة د'(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ١ | | ٥ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د'(س) | + + | ٠ | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ | | ↗ |

د متزايدة على ] −∞ ، ١ ] ، د متناقصة على [ ١ ، ٥ ] ، د متزايدة على [ ٥ ، ∞ [

(ب) ∵ $د(س) = \frac{س}{س^{٢} + ١}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ $د'(س) = \frac{(س^{٢} + ١)(١) - (س)(٢ س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = \frac{١ - س^{٢}}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

بوضع : $د'(س) = ٠$ يكون : $١ - س^{٢} = ٠$

∴ س = ١ ، س = −١

ببحث إشارة د'(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | −١ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د'(س) | − − | ٠ | + + | ٠ | − − |
| سلوك د(س) | ↘ | | ↗ | | ↘ |

د متناقصة على ] −∞ ، −١ ] ، د متزايدة على [ −١ ، ١ ] ، د متناقصة على [ ١ ، ∞ [

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٦٤

حدد فترات التزايد و التناقص للدالة د حيث :

$د(س) = س - ٢ حتا س$ ، $٠ < س < ٢\pi$

### الحل

∵ $د(س) = س - ٢ حتا س$ دالة قابلة للاشتقاق على ] ٠ ، ٢π [

∴ $د'(س) = ١ + ٢ حا س$ بوضع : $د'(س) = ٠$ يكون : $حا س = -\frac{١}{٢}$

∴ $س = \frac{٧}{٦}\pi$ ، $س = \frac{١١}{٦}\pi$ ببحث إشارة د'(س) كما يلى :

∵ عندما : $س = \pi \in ] ٠ ، \frac{٧}{٦}\pi [$

يكون : $د'(س) = ١ + ٢ حا \pi = ١ > ٠$ ∴ د متزايدة على ] ٠ ، $\frac{٧}{٦}\pi$ ]

، ∵ عندما : $س = \frac{٣}{٢}\pi \in ] \frac{٧}{٦}\pi ، \frac{١١}{٦}\pi [$

يكون : $د'(س) = ١ + ٢ حا \frac{٣}{٢}\pi = -١ < ٠$

∴ د متناقصة على [ $\frac{٧}{٦}\pi$ ، $\frac{١١}{٦}\pi$ ] ،

∵ عندما : $س = \frac{١١١}{٦٠}\pi \in ] \frac{١١}{٦}\pi ، ٢\pi [$

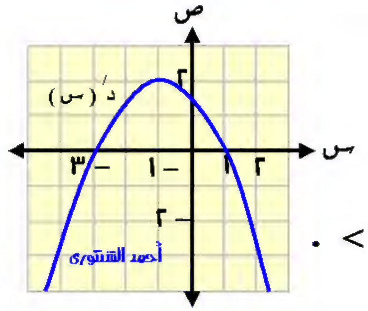
يكون : $د'(س) = ١ + ٢ حا \frac{١١١}{٦٠}\pi = ٠,١ > ٠$

∴ د متزايدة على [ $\frac{١١}{٦}\pi$ ، ٢π [

و الجدول التالى يوضح ذلك :

| س | ٠ | | $\frac{7}{6}\pi$ | | $\frac{11}{6}\pi$ | | ٢ π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/(س) | | + + | ٠ | – – | ٠ | + + | |
| سلوك د(س) | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

## إجابة تفكير ناقد صفحة ٦٤




يوضح الشكل المقابل : منحنى د/(س) للدالة د حيث : د(س) كثيرة حدود

(أ) عين فترات التزايد و التناقص للدالة د

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة : د//(س) > ٠ .

**الحل**

(أ) ∵ منحنى د/(س) يقع أسفل محور س في ]–∞ ، –٣[

∴ د/(س) < ٠ في ]–∞ ، –٣[ ∴ د متناقصة على ]–∞ ، –٣[

، ∵ منحنى د/(س) يقع أعلى محور س فى ]–٣ ، ١[

∴ د/(س) > ٠ فى ]–١ ، ١[ ∴ د متزايدة على ]–١ ، ١[

، ∵ منحنى د/(س) يقع أسفل محور س فى ]١ ، ∞[

∴ د/(س) < ٠ فى ]١ ، ∞[ ∴ د متناقصة على ]١ ، ∞[

**حل آخر**

من الشكل نلاحظ الجدول التالى :

| س | –∞ | | –٣ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/(س) | | – – | ٠ | + + | ٠ | – – | |
| سلوك د(س) | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

∴ د متناقصة على ]–∞ ، –٣[ ، د متزايدة على ]–٣ ، ١[ ، د متناقصة على ]١ ، ∞[

(ب) ∵ من الشكل : منحنى د/(س) يمثل منحنى دالة تربيعية

∴ نفرض أن : د/(س) = أ س$^{2}$ + ب س + حـ

، ∵ منحنى د/(س) يمر بالنقط (١ ، ٠) ، (–٣ ، ٠) ، (–١ ، ٢)

∴ بالتعويض بهذه النقط تباعاً فى المعادلة : د/(س) = أ س$^{2}$ + ب س + حـ

ينتج : أ + ب + حـ = ٠ (١) ، ٩ أ – ٣ ب + حـ = ٠ (٢)

، أ – ب + حـ = ٢ (٣) بطرح (١) من (٢) ينتج :

٨ أ – ٤ ب = ٠ ∴ ب = ٢ أ (٤)

بالتعويض من (٤) فى (١) ، (٣) ينتج :

٣ أ + حـ = ٠ ، – أ + حـ = ٢ ، بالطرح ينتج : أ = $-\frac{1}{2}$

بالتعويض فى (١) ، (٣) ينتج : ب = –١ ، حـ = $\frac{3}{2}$

∴ نفرض أن : د/(س) = $-\frac{1}{2}$ س$^{2}$ – س + $\frac{3}{2}$

∴ د//(س) = – س – ١ ، ∵ د//(س) > ٠ ∴ – س – ١ > ٠

∴ س < –١ ∴ مجموعة الحل = ]–∞ ، –١[

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٦٤

حدد فترات التزايد و التناقص للدالة د حيث :

د(س) = س – هـ$^{س}$ ثم أرسم منحنى الدالة د و تحقق من اجابتك

**الحل**

∵ د(س) = س – هـ$^{س}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د/(س) = ١ – هـ$^{س}$ بوضع : د/(س) = ٠

يكون : ١ – هـ$^{س}$ = ٠ ∴ هـ$^{س}$ = ١ ∴ س = ٠

ببحث إشارة د/(س) كما يلى :

∵ عندما : س = –١ ∈ ]–∞ ، ٠[ يكون :

د/(س) = ١ – هـ$^{-1}$ = ٠,٦٣ > ٠ ∴ د متزايدة على ]–∞ ، ٠[

، ∵ عندما : س = ١ ∈ ] ٠ ، ∞ [ يكون :

د/ ( س ) = ١ − هـ = − ١,٧ < ٠ ∴ د متناقصة على ] ٠ ، ∞ [

، الجدول التالى يوضح ذلك :

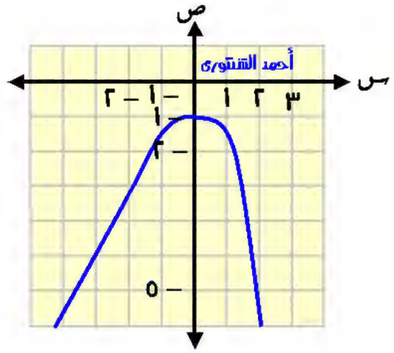
| س | −∞ | | ٠ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | + | + | ٠ | − | − |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | | ↘ | |

كما أن الشكل المقابل يوضح :

منحنى الدالة د ، و منه نجد :

د متزايدة على ] −∞ ، ٠ [ ،

د متناقصة على ] ٠ ، ∞ [




## حل تمارين ( ٣ − ١ ) صفحة ٦٥ بالكتاب المدرسى

حدد فترات تزايد و تناقص الدالة د فى كل مما يأتى :

**(١)** د ( س ) = س$^{٢}$ − ٤ س

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٢}$ − ٤ س دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د/ ( س ) = ٢ س − ٤ = ٢ ( س − ٢ )

بوضع : د/ ( س ) = ٠ يكون : س = ٢

ببحث إشارة د/ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | − | − | ٠ | + | + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | | ↗ | |

∴ د متناقصة على ] −∞ ، ٢ [ ، د متزايدة على ] ٢ ، ∞ [

**(٢)** د ( س ) = ( س − ٣ )$^{٢}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ( س − ٣ )$^{٢}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د/ ( س ) = ٢ ( س − ٣ ) بوضع : د/ ( س ) = ٠ يكون : س = ٣

ببحث إشارة د/ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | ٣ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | − | − | ٠ | + | + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | | ↗ | |

د متناقصة على ] −∞ ، ٣ [ ، د متزايدة على ] ٣ ، ∞ [

**(٣)** د ( س ) = س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٥

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٥ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د/ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ − ١٢ س = ٣ س ( س − ٤ )

بوضع : د/ ( س ) = ٠ يكون : س = ٠ ، س = ٤

ببحث إشارة د/ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | ٠ | | ٤ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | + | + | ٠ | − − | ٠ | + | + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | | ↘ | | ↗ | |

د متزايدة على ] −∞ ، ٠ [ ، د متناقصة على ] ٠ ، ٤ [ ،

د متزايدة على ] ٤ ، ∞ [

**(٤)** د ( س ) = ٩ س − س$^{٣}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٩ س − س$^{٣}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د$'$ ( س ) = ٩ − ٣ س$^{٢}$ = − ٣ ( س − $\sqrt{٣}$ ) ( س + $\sqrt{٣}$ )

بوضع : د$'$ ( س ) = ٠ يكون : س = $\sqrt{٣}$ ، س = − $\sqrt{٣}$

ببحث إشارة د$'$ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | − ∞ | − $\sqrt{٣}$ | | $\sqrt{٣}$ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | − − | ٠ | + + | ٠ | − − |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ | | ↘ |

د متناقصة على ] − ∞ ، − $\sqrt{٣}$ [ ، د متزايدة على ] − $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ [

، د متناقصة على ] $\sqrt{٣}$ ، ∞ [

**(٥)** د ( س ) = س$^{٤}$ + ٤ س

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٤}$ + ٤ س دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د$'$ ( س ) = ٤ س$^{٣}$ + ٤ = ٤ ( س$^{٣}$ + ١ ) بوضع : د$'$ ( س ) = ٠

يكون : س$^{٣}$ + ١ = ٠ ∴ س$^{٣}$ = − ١ ∴ س = − ١

ببحث إشارة د$'$ ( س ) كما يلى :

∵ عندما : س = − ٢ ∈ ] − ∞ ، − ١ [ يكون :

د$'$ ( س ) = − ٢٨ < ٠ ∴ د متناقصة على ] − ∞ ، − ١ [

، ∵ عندما : س = ١ ∈ ] − ١ ، ∞ [

يكون : د$'$ ( س ) = ٨ > ٠ ∴ د متزايدة على ] − ١ ، ∞ [

، الجدول التالى يوضح ذلك :

| س | − ∞ | − ١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ |

د متناقصة على ] − ∞ ، − ١ [ ، د متزايدة على ] − ١ ، ∞ [

**(٦)** د ( س ) = ٢ − ٣ ( س − ٢ )$^{\frac{٤}{٣}}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٢ − ٣ ( س − ٢ )$^{\frac{٤}{٣}}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د$'$ ( س ) = − ٣ × $\frac{٤}{٣}$ ( س − ٢ )$^{\frac{١}{٣}}$ × ١

= − ٤ ( س − ٢ )$^{\frac{١}{٣}}$ = $\frac{-٤}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$

بوضع : د$'$ ( س ) = ٠ يكون : س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

ببحث إشارة د$'$ ( س ) كما يلى :

∵ عندما : س = ١ ∈ ] − ∞ ، ٢ [ يكون : د$'$ ( س ) = ٤ > ٠

∴ د متزايدة على ] − ∞ ، ٢ [ ،

∵ عندما : س = ٣ ∈ ] ٢ ، ∞ [ يكون : د$'$ ( س ) = − ٤ < ٠

∴ د متناقصة على ] ٢ ، ∞ [ ، الجدول التالى يوضح ذلك :

| س | − ∞ | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | + + | ٠ | − − |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ |

د متزايدة على ] − ∞ ، ٢ [ ، د متناقصة على ] ٢ ، ∞ [

**(٧)** د(س) = ١ − $\frac{١}{س}$

**الحل**

∵ د(س) = ١ − $\frac{١}{س}$ = ١ − س^−١^ دالة قابلة للاشتقاق على ح − {٠}

∴ د′(س) = − (−١) س^−٢^ = $\frac{١}{س^٢}$ ≠ ٠

، ∵ د′(س) غير معرفة عندما : س = ٠ ∉ ح − {٠}

∴ نبحث إشارة د′(س) كما يلى :

∵ عندما : س = −١ ∈ ]−∞ ، ٠[ يكون : د′(س) = ١ > ٠

∴ د متزايدة على ]−∞ ، ٠[ ، ∵ عندما : س = ١ ∈ ]٠ ، ∞[

يكون : د′(س) = ١ > ٠

∴ د متزايدة على ]٠ ، ∞[

، الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | −∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | غير معرفة | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↗ |

د متزايدة على كل من : ]−∞ ، ٠[ ، ]٠ ، ∞[

**(٨)** د(س) = $\frac{س − ٢}{س + ٢}$

**الحل**

∵ د(س) = $\frac{س − ٢}{س + ٢}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح − {−٢}

∴ د′(س) = $\frac{(س + ٢)(١) − (س − ٢)(١)}{(س + ٢)^٢}$ = $\frac{٤}{(س + ٢)^٢}$ ≠ ٠

، ∵ د′(س) غير معرفة عندما : س = −٢ ∉ ح − {−٢}

∴ نبحث إشارة د′(س) كما يلى :

∵ عندما : س = −٣ ∈ ]−∞ ، −٢[ يكون : د′(س) = ٤ > ٠

∴ د متزايدة على ]−∞ ، −٢[ ،

∵ عندما : س = −١ ∈ ]−٢ ، ∞[ يكون : د′(س) = ٤ > ٠

∴ د متزايدة على ]−٢ ، ∞[ ، الجدول التالى يوضح ذلك :

| س | −∞ | −٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | غير معرفة | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↗ |

د متزايدة على كل من : ]−∞ ، −٢[ ، ]−٢ ، ∞[

**(٩)** د(س) = $\frac{\sqrt{س − ١}}{س}$

**الحل**

∵ د(س) = $\frac{\sqrt{س − ١}}{س}$ دالة قابلة للاشتقاق على ]١ ، ∞[

∴ د′(س) = $\frac{\frac{س × ١}{٢\sqrt{س − ١}} − \sqrt{س − ١}}{س^٢}$ بالضرب بسطاً و مقاماً × $\sqrt{س − ١}$

∴ د′(س) = $\frac{س − ٢س + ٢}{٢س^٢ \sqrt{س − ١}}$ = $\frac{٢ − س}{٢س^٢ \sqrt{س − ١}}$

، ∵ د′(س) = ٠ عندما : س = ٢

، د′(س) غير معرفة عندما : س = ١ ، س = ٠ ∉ ]١ ، ∞[

∴ نبحث إشارة د′(س) كما يلى :

∵ عندما : س = ١,٢٥ ∈ ]١ ، ٢[ يكون : د′(س) = ٠,٤٨ > ٠

∴ د متزايدة على ]١ ، ٢[

، عندما : س = ٥ ∈ ]٢ ، ∞[ يكون : د′(س) = −٠,٠٣ < ٠

∴ د متناقصة على ]٢ ، ∞[ ، الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | −∞ | ١ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | | غير موجودة | + + | ٠ | − − |
| سلوك د(س) | | | ↗ | | ↘ |

د متزايدة على ] ١ ، ٢ [ ، د متناقصة على ] ٢ ، ∞ [

**(١٠)** د ( س ) = س + لوهـ س

**الحل**

∵ د ( س ) = س + لوهـ س دالة قابلة للاشتقاق على ] ٠ ، ∞ [

∴ د/ ( س ) = ١ + $\frac{١}{س}$

، ∵ د/ ( س ) غير معرفة عندما : س = ٠ ∌ ] ٠ ، ∞ [

، د/ ( س ) > ٠ لكل س ∋ ] ٠ ، ∞ [ ∴ د متزايدة على ] ٠ ، ∞ [

**(١١)** د ( س ) = ٣ − لوهـ س٢

**الحل**

∵ د ( س ) = ٣ − لوهـ س٢ دالة قابلة للاشتقاق على ح − { ٠ }

∴ د/ ( س ) = − $\frac{٢ س}{س^٢}$ = − $\frac{٢}{س}$

، ∵ د/ ( س ) غير معرفة عندما : س = ٠ ∌ ح − { ٠ }

∴ نبحث إشارة د/ ( س ) كما يلى :

∵ عندما : س = − ١ ∋ ] − ∞ ، ٠ [ يكون : د/ ( س ) = ٢ > ٠

∴ د متزايدة على ] − ∞ ، ٠ [ ،

، عندما : س = ١ ∋ ] ٠ ، ∞ [ يكون : د/ ( س ) = − ٢ < ٠

∴ د متناقصة على ] ٠ ، ∞ [ ، الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | − ∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | + + | غير معرفة | − − |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ |

د متزايدة على ] − ∞ ، ٠ [ ، د متناقصة على ] ٠ ، ∞ [

**(١٢)** د ( س ) = ٥ − ٢ هـ^٢س

**الحل**

∵ د ( س ) = ٥ − ٢ هـ^٢س دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د/ ( س ) = − ٤ هـ^٢س ≠ ٠ .

، ∵ د/ ( س ) < ٠ لكل س ∋ ح ∴ د متناقصة على ح

**(١٣)** أثبت أن : الدالة د حيث د ( س ) = طا س − س

متزايدة على ] ٠ ، $\frac{١}{٤}$ π [

**الحل**

∵ د ( س ) = طا س − س دالة قابلة للاشتقاق على ] ٠ ، $\frac{١}{٤}$ π [

∴ د/ ( س ) = قا٢ س − ١ = طا٢ س

، ∵ د/ ( س ) > ٠ لكل س ∋ ] ٠ ، $\frac{١}{٤}$ π [

∴ د متزايدة على ] ٠ ، $\frac{١}{٤}$ π [

**(١٤)** حدد فترات التزايد و التناقص للدالة د حيث :

د ( س ) = ١ − حا س ، ٠ < س < ٢ π

**الحل**

∵ د ( س ) = ١ − حا س دالة قابلة للاشتقاق على ] ٠ ، ٢ π [

∴ د/ ( س ) = − حتا س

بوضع : د/ ( س ) = ٠ يكون : حتا س = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$ π ، س = $\frac{٣}{٢}$ π

ببحث إشارة د/ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | ٠ | | $\frac{1}{4}\pi$ | | $\frac{3}{4}\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | | − − | ٠ | + + | ٠ | − − | |
| سلوك د ( س ) | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

د متناقصة على ] ٠ ، $\frac{1}{4}\pi$ [ لأن : س تقع فى الربع الأول

حيث : حتا س موجبة فتكون : د/ ( س ) = − × + = −

، د متزايدة على ] $\frac{1}{4}\pi$ ، $\frac{3}{4}\pi$ [ لأن : س تقع فى الربعين الثانى و الثالث

حيث : حتا س سالبة فتكون : د/ ( س ) = − × − = +

∴ د متناقصة على ] $\frac{3}{4}\pi$ ، $2\pi$ [ لأن : س تقع فى الربع الأول

حيث : حتا س موجبة فتكون : د/ ( س ) = − × + = −

(١٥) إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق ،

د/ ( س ) < ر/ ( س ) لكل س ∈ ح فأثبت أن : الدالة ع

حيث : ع ( س ) = د ( س ) − ر ( س ) متناقصة لكل س ∈ ح

**الحل**

∵ ع ( س ) = د ( س ) − ر ( س ) لكل س ∈ ح

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ع/ ( س ) = د/ ( س ) − ر/ ( س )

، ∵ د/ ( س ) < ر/ ( س ) لكل س ∈ ح

∴ د/ ( س ) − ر/ ( س ) < ٠ لكل س ∈ ح

∴ ع/ ( س ) < ٠ لكل س ∈ ح

∴ الدالة ع متناقصة لكل س ∈ ح

## ٣ – ٢ القيم العظمى و الصغرى ( القيم القصوى )

**تعريف :**

**النقط الحرجة :**

للدالة د المتصلة على [ ا ، ب ] نقطة حرجة ( حـ ، د ( حـ ) )

إذا كانت حـ ∈ ] ا ، ب [ ، د/ ( حـ ) = ٠ أو الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = حـ أى أن : د/ ( حـ ) غير موجودة

**تعريف :**

**القيم العظمى و القيم الصغرى المحلية :**

إذا كانت الدالة د متصلة ، مجالها ف ، حـ ∈ ف

فإنه يوجد للدالة د :

(ا) قيمة عظمى محلية عند س = حـ إذا وجدت فترة مفتوحة ] ا ، ب [ ⊂ ف تحوى حـ و يكون د/ ( س ) ≥ د/ ( حـ ) لكل س ∈ ] ا ، ب [

(٢) قيمة صغرى محلية عند س = حـ إذا وجدت فترة مفتوحة ] ا ، ب [ ⊂ ف تحوى حـ و يكون د/ ( س ) ≤ د/ ( حـ ) لكل س ∈ ] ا ، ب [

**استخدام المشتقة الأولى لتحديد القيم العظمى و الصغرى المحلية :**

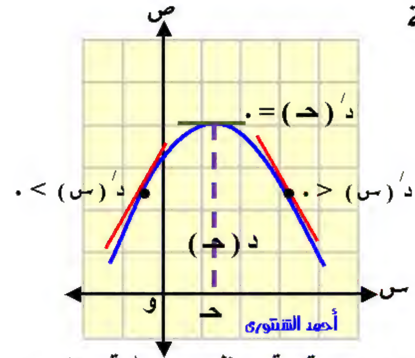
إذا كانت : ( حـ ، د ( حـ ) ) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ و وجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

(ا) د/ ( س ) > ٠ عندما س < حـ

، د/ ( س ) < ٠ عندما س > حـ

فإن : د ( حـ ) قيمة عظمى محلية

| س | أ | حـ | ب |
|---|---|---|---|
| إشارة د′ ( س ) | – – | ⊙ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ |
| د ( حـ ) | قيمة عظمى محلية | | |



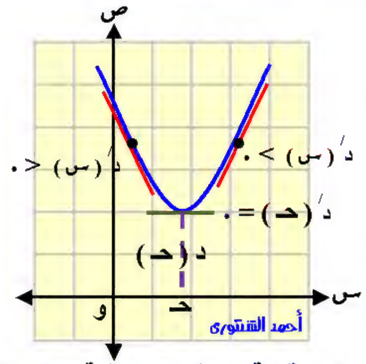

د ( حـ ) قيمة عظمى محلية عند حـ

**(٢)** د′ ( س ) < ٠ عندما س < حـ

، د′ ( س ) > ٠ عندما س > حـ

فإن : د ( حـ ) قيمة صغرى محلية

| س | أ | حـ | ب |
|---|---|---|---|
| إشارة د′ ( س ) | + + | ⊙ | – – |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ |
| د ( حـ ) | قيمة صغرى محلية | | |



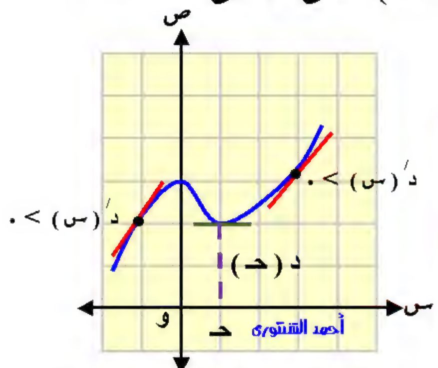

د ( حـ ) قيمة صغرى محلية عند حـ

**(٣)** إذا لم يحدث تغير فى إشارة د′ ( س ) على جانبى حـ فإنه :

لا توجد للدالة د قيم عظمى

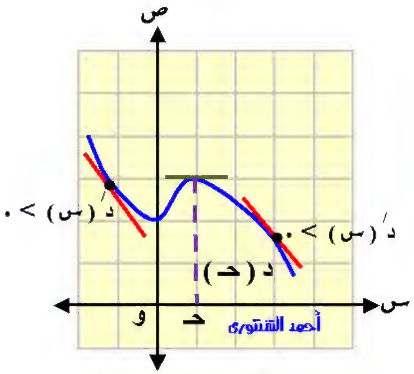
أو صغرى محلية عند حـ

| س | أ | حـ | ب |
|---|---|---|---|
| إشارة د′ ( س ) | + + | ⊙ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↗ |
| د ( حـ ) | ليست عظمى و ليست صغرى | | |




د ( حـ ) ليست عظمى و ليست صغرى

| س | أ | حـ | ب |
|---|---|---|---|
| إشارة د′ ( س ) | – – | ⊙ | – – |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↘ |
| د ( حـ ) | ليست عظمى و ليست صغرى | | |




د ( حـ ) ليست عظمى و ليست صغرى

## خطوات تعين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة باستخدام المشتقة الأولى :

**(١)** نحدد مجال الدالة

**(٢)** نوجد د′ ( س )

**(٣)** نوجد النقط الحرجة للدالة

أى : التى تجعل د′ ( س ) = ٠ أو غير موجودة

**(٤)** نبحث إشارة د′ ( س ) حول النقطة الحرجة و لتكن : حـ

**أ)** فى جوار س = حـ : إشارة د′ ( س ) تغيرت من موجب
( قبل " على يسار " س = حـ ) إلى سالب
( بعد " على يمين " س = حـ )
كانت د ( حـ ) قيمة عظمى محلية

**ب)** فى جوار س = حـ : إشارة د′ ( س ) تغيرت من سالب
( قبل " على يسار " س = حـ ) إلى موجب
( بعد " على يمين " س = حـ )
كانت د ( حـ ) قيمة صغرى محلية

٣) فى جوار س = حـ : لم تتغير إشارة د$'$( س )
كانت د ( حـ ) ليست عظمى محلية أو صغرى محلية

**نظرية :**

إذا كانت الدالة د متصلة على [ أ ، ب ] و كانت للدالة د قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية عند حـ ∈ ] أ ، ب [
فإن د$'$( حـ ) = ٠ أو د$'$( حـ ) غير موجودة

**ملاحظات :**

(١) عكس النظرية غير صحيح
أى أن : إذا كان د$'$( حـ ) = ٠ أو غير موجودة لدالة متصلة عند حـ فليس بالضرورة وجود قيمة عظمى أو صغرى محلية عند حـ

(٢) نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية تكون نقط حرجة و العكس غير صحيح
أى أن : النقط الحرجة قد تكون عظمى أو صغرى محلية أو ليست عظمى و ليست صغرى

(٣) إذا كانت الدالة د تزايدية ( أو تناقصية ) فى فترة ما فليس لهذه الدالة قيم عظمى ( أو صغرى ) محلية فى هذه الفترة

(٤) النقط الحرجة للدالة التى عندها المشتقة الأولى = صفر يكون عندها المماس أفقى ( يوازى محور السينات ) و تسمى : نقطة التوقف

(٥) قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية للدالة

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٦٨

إذا كان : د ( س ) = $\frac{1}{3}$ س$^{3}$ − ٩ س + ٣
أوجد القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د

**الحل**

∵ د ( س ) = $\frac{1}{3}$ س$^{3}$ − ٩ س + ٣ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$( س ) = س$^{2}$ − ٩ = ( س − ٣ ) ( س + ٣ )

، عندما : د$'$( س ) = ٠ ∴ س = ٣ ، س = −٣

∴ توجد للدالة د نقطتان حرجتان هما : ( ٣ ، −١٥ ) ، ( −٣ ، ٢١ )

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | −٣ | | ٣ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | | + + | ٠ | − − | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | ٢١ | ↘ | −١٥ | ↗ | |

د ( ٣ ) = −١٥ قيمة صغرى محلية ، د ( −٣ ) = ٢١ قيمة عظمى محلية

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٦٨

أثبت أن للدالة د حيث : د ( س ) = $\sqrt[3]{س^{2}}$ قيمة صغرى محلية

**الحل**

∵ د ( س ) = $\sqrt[3]{س^{2}}$ = س$^{\frac{2}{3}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$( س ) = $\frac{2}{3}$ س$^{-\frac{1}{3}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[3]{س}}$ حيث : س ≠ ٠

، ∵ د$'$( س ) غير موجودة عند : س = ٠

∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : ( ٠ ، ٠ )

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | -∞ | | ٠ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | | - - | غير موجودة | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↘ | | ↗ | |

د( ٠ ) = ٠ قيمة صغرى محلية

## إجابة تفكير ناقد صفحة ٦٨

هل للدالة د حيث : د ( س ) = س$^{٣}$ + ٣ س$^{٢}$ − ٤
قيم عظمى و صغرى محلية ؟ فسر اجابتك

الحل

∵ د ( س ) = س$^{٣}$ + ٣ س$^{٢}$ − ٤ ، د متصلة لكل س ∈ ح

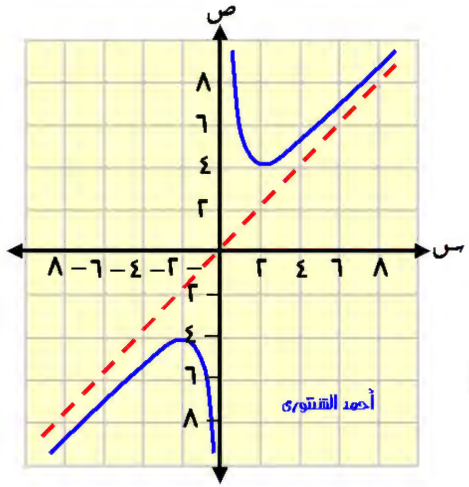
∴ د$'$( س ) = ٣ س$^{٢}$ + ٣ = ٣ ( س + ١ )$^{٢}$ > ٠

أى لا يوجد قيم للمتغير س تجعل د$'$( س ) = ٠ ، أو د$'$( س ) غير موجودة

∴ لا توجد للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية

## إجابة تكنولوجيا صفحة ٦٩

يبين الشكل المقابل :
منحنى الدالة د باستخدام أحد البرامج الرسومية
قارن بين جدول المتغيرات و منحناها . ماذا تلاحظ ؟




الحل

من منحنى الدالة د نجد :
د ( − ٢ ) = − ٤ قيمة عظمى محلية
، د ( ٢ ) = ٤ قيمة صغرى محلية

د متصلة لكل س ∈ ح − { ٠ } ، من الجدول التالى نجد :

| س | -∞ | | ٢- | | ٠ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | | + + | ٠ | - - | غير معرفة | - - | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | ٤- | ↘ | | ↘ | ٢ | ↗ | |

د ( − ٢ ) = − ٤ قيمة عظمى محلية ، د ( ٢ ) = ٤ قيمة صغرى محلية
نلاحظ : القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٦٩

أوجد القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د حيث :

د ( س ) = $\frac{س^{٢}}{١ - س}$ مبيناً نوعها

الحل

∵ د ( س ) = $\frac{س^{٢}}{١ - س}$ حيث : مجال د ( س ) = ح − { ١ }

∴ د$'$( س ) = $\frac{( ١ - س ) ( ٢ س ) - ( - ١ ) ( س^{٢} )}{( ١ - س )^{٢}}$

= $\frac{( - س ) ( س - ٢ )}{( ١ - س )^{٢}}$

، ∵ د$'$( س ) غير معرفة عند : س = ١ ∉ مجال د ( س )

، د$'$( س ) = ٠ عند : س = ٠ ، س = ٢

∴ توجد للدالة د نقطتان حرجتان هما : ( ٠ ، ٠ ) ، ( ٢ ، − ٤ )

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | -∞ | | ٠ | | ١ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | | - - | ٠ | + + | غير معرفة | + + | ٠ | - - | |
| سلوك د ( س ) | | ↘ | ٠ | ↗ | | ↗ | ٤- | ↘ | |

د ( ٠ ) = ٠ قيمة صغرى محلية ، د ( ٢ ) = − ٤ قيمة عظمى محلية

## القيم القصوى لدالة على فترة مغلقة :

### تعريف القيم القصوى :

إذا كانت د دالة معرفة على [ أ ، ب ] و كانت حـ ∋ [ أ ، ب ]

(١) د ( حـ ) هى قيمة صغرى على [ أ ، ب ] عندما يكون :

د ( حـ ) ≤ د ( س ) لكل س ∋ [ أ ، ب ]

(٢) د ( حـ ) هى قيمة عظمى على [ أ ، ب ] عندما يكون :

د ( حـ ) ≥ د ( س ) لكل س ∋ [ أ ، ب ]

### ملاحظات :

(١) القيمة الصغرى و القيمة العظمى لدالة على فترة تسمى القيم القصوى للدالة على هذه الفترة

(٢) القيمة القصوى يمكن أن تحدث عند أى نقطة داخل الفترة أو على حدود الفترة و عندما تحدث عند حدود الفترة تسمى نقطة حدية قصوى

### خطوات ايجاد القيم القصوى للدالة د على [ أ ، ب ] :

(١) نوجد النقط الحرجة للدالة أى : التى تجعل د'( س ) = ٠ .
أو غير موجودة و التى تنتمى إلى [ أ ، ب ]

(٢) نوجد د ( أ ) ، د ( ب ) و قيمة الدالة عند كل نقطة حرجة

(٣) نقارن بين القيم السابقة كلها فتكون :

١) أكبر هذه القيم هى القيمة العظمى المطلقة فى [ أ ، ب ]

٢) أصغر هذه القيم هى القيمة الصغرى المطلقة فى [ أ ، ب ]

### نظرية :

إذا كانت الدالة د متصلة على [ أ ، ب ] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة و قيمة صغرى مطلقة على [ أ ، ب ]

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٦٩

أوجد القيم القصوى للدالة د :

(أ) د ( س ) = ١٠ س هـ^(-س) ، س ∋ [ ٠ ، ٤ ]

(ب) د ( س ) = $\frac{\text{٤ س}}{\text{س}^{2} + 1}$ ، س ∋ [ -١ ، ٣ ]

### الحل

(أ) ∵ د ( س ) = ١٠ س هـ^(-س) ، س ∋ [ ٠ ، ٤ ]

∴ د'( س ) = ١٠ س هـ^(-س) ( -١ ) + ١٠ هـ^(-س) = ١٠ هـ^(-س) ( ١ - س )

بوضع : د'( س ) = ٠ ، ∵ هـ^(-س) ≠ ٠ .

∴ ١ - س = ٠ ∴ س = ١ ∋ [ ٠ ، ٤ ]

∴ توجد نقطة حرجة للدالة هى : د ( ١ ) = ١٠ هـ^(-١) = $\frac{10}{\text{هـ}}$

، ∵ د ( ٠ ) = ٠ ، د ( ٤ ) = ٤٠ هـ^(-٤) = $\frac{40}{\text{هـ}^{4}}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{10}{\text{هـ}}$ ، قيمة صغرى مطلقة = ٠ .

(ب) ∵ د ( س ) = $\frac{\text{٤ س}}{\text{س}^{2} + 1}$ ، س ∋ [ -١ ، ٣ ]

∴ د'( س ) = $\frac{(\text{س}^{2}+1)(4) - (\text{٤ س})(\text{٢ س})}{(\text{س}^{2}+1)^{2}} = \frac{4 - \text{٤ س}^{2}}{(\text{س}^{2}+1)^{2}}$

بوضع : د'( س ) = ٠ يكون : ٤ - ٤ س² = ٠ .

∴ -٤ ( س² - ١ ) = ٠ و منها :

س = ١ ∋ [ -١ ، ٣ ] ، س = -١ ∋ [ -١ ، ٣ ]

∴ توجد نقطتان حرجتان للدالة هما : د ( -١ ) = -٢ ، د ( ١ ) = ٢

، ∵ د ( ٣ ) = $\frac{6}{5}$

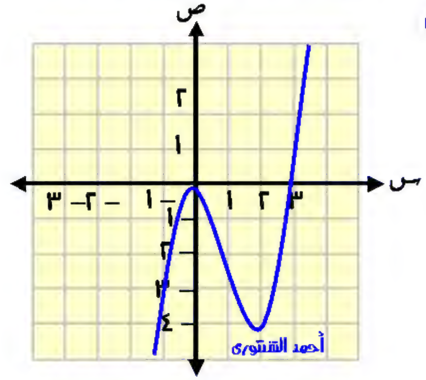
∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ ، قيمة صغرى مطلقة = -٢

أحمد الشتورى

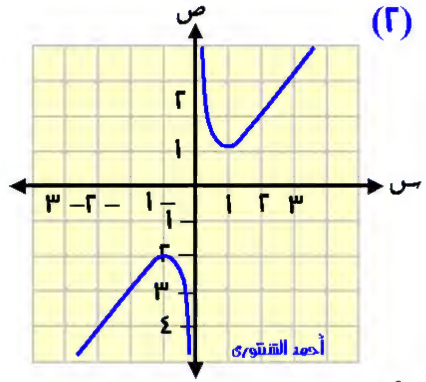
## حل تمارين ( ٣ – ٢ ) صفحة ٧١ بالكتاب المدرسى

حدد القيم العظمى و الصغرى المحلية ( إن وجدت ) للدالة د فى الأشكال التالية و بين نوعها :

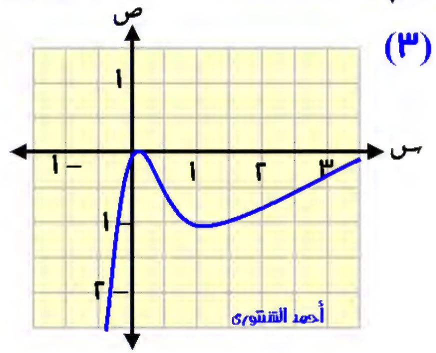
(١)



(٢)



(٣)



**الحل**

(١) د ( ٠ ) = ٠ قيمة عظمى محلية ،
د ( ١ ) = – ٤ قيمة صغرى محلية

(٢) د ( – ١ ) = – ٢ قيمة عظمى محلية ،
د ( ١ ) = ٢ قيمة صغرى محلية

(٣) د ( ٠ ) = ٠ قيمة عظمى محلية ،
د ( – ١ ) = – ١ قيمة صغرى محلية



اوجد القيم العظمى و الصغرى المحلية ( إن وجدت ) للدالة د فى كل مما يأتى مبيناً نوعها :

**(٤)** د ( س ) = س$^{٣}$ + ٣ س$^{٢}$ + ٢

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٣}$ + ٣ س$^{٢}$ + ٢ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ + ٦ س = ٣ س ( س + ٢ )

، عندما : د$'$ ( س ) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = – ٢

∴ توجد للدالة د نقطتان حرجتان هما : ( ٠ ، ٢ ) ، ( – ٢ ، ٦ )

ببحث إشارة د$'$ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | | – ٢ | | ٠ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | | + + | ٠ | – – | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | ٦ | ↘ | ٢ | ↗ | |

د ( ٠ ) = ٢ قيمة صغرى محلية ، د ( – ٢ ) = ٦ قيمة عظمى محلية

**(٥)** د ( س ) = س$^{٤}$ – ٢ س$^{٢}$

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٤}$ – ٢ س$^{٢}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$ ( س ) = ٤ س$^{٣}$ – ٤ س = ٤ س ( س$^{٢}$ – ١ )

= ٤ س ( س – ١ ) ( س + ١ )

، عندما : د$'$ ( س ) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ١ ، س = – ١

∴ توجد للدالة د ثلاث نقط حرجة هى : ( ٠ ، ٠ ) ، ( ١ ، – ١ ) ، ( – ١ ، – ١ ) ، ببحث إشارة د$'$ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | | – ١ | | ٠ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | | – – | ٠ | + + | ٠ | – – | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↘ | – ١ | ↗ | ٠ | ↘ | – ١ | ↗ | |

د ( – ١ ) = – ١ قيمة صغرى محلية ، د ( ٠ ) = ٠ قيمة عظمى محلية

، د ( ١ ) = – ١ قيمة صغرى محلية

**(٦)** د ( س ) = ٤ س – س$^{٣}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٤ س – س$^{٣}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$( س ) = ٤ – ٣ س$^{٢}$ = ( ٢ – $\sqrt{٣}$ س ) ( ٢ + $\sqrt{٣}$ س )

، عندما : د$'$( س ) = ٠ ∴ س = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، س = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

∴ توجد للدالة د نقطتان حرجتان هما :

( $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١٦}{٣\sqrt{٣}}$ ) ، ( $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{-١٦}{٣\sqrt{٣}}$ )

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | | $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ | | $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | – | – | ٠ | + + | ٠ | – | – |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | $\frac{-١٦}{٣\sqrt{٣}}$ | ↗ | $\frac{١٦}{٣\sqrt{٣}}$ | ↘ | |

د ( $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ) = $\frac{-١٦}{٣\sqrt{٣}}$ قيمة صغرى محلية

، د ( $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ) = $\frac{١٦}{٣\sqrt{٣}}$ قيمة عظمى محلية

**(٧)** د ( س ) = ٣ س$^{٥}$ – ٥ س$^{٣}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٣ س$^{٥}$ – ٥ س$^{٣}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$( س ) = ١٥ س$^{٤}$ – ١٥ س$^{٢}$ = ١٥ س$^{٢}$ ( س$^{٢}$ – ١ )

= ١٥ س$^{٢}$ ( س – ١ ) ( س + ١ )

، عندما : د$'$( س ) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ١ ، س = – ١

∴ توجد للدالة د ثلاث نقط حرجة هى : ( ٠ ، ٠ ) ، ( ١ ، – ٢ ) ، ( – ١ ، ٢ ) ، ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | | – ١ | | ٠ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | + | + | ٠ | – – | ٠ | – – | ٠ | + | + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ٢ | ↘ | ٠ | ↘ | – ٢ | ↗ | |

د ( – ١ ) = ٢ قيمة عظمى محلية ، د ( ١ ) = – ٢ قيمة صغرى محلية

لاحظ : د ( ٠ ) = ٠ ليست قيمة عظمى أو صغرى محلية

حيث لم يحدث تغير لإشارة د$'$( س ) عند : س = ٠ .

**(٨)** د ( س ) = ٣ – س$^{\frac{٢}{٣}}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٣ – س$^{\frac{٢}{٣}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$( س ) = – $\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{-٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، ∵ د متصلة عند : س = ٠ ، د$'$( س ) غير موجودة عند : س = ٠ .

∴ توجد نقطة حرجة عند : س = ٠ هى : ( ٠ ، ٣ )

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | | ٠ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | + | + | غير موجودة | – | – |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ٣ | ↘ | |

د ( ٠ ) = ٣ قيمة عظمى محلية

**(٩)** د ( س ) = ( س + ٢ )$^{\frac{٢}{٣}}$

**الحل**

∵ $د(س) = (س + ٢)^{-\frac{٢}{٣}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ $د'(س) = \frac{٢}{٣}(س + ٢)^{-\frac{١}{٣}} \times ١ = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س + ٢}}$

، ∵ د متصلة عند : س = −٢ ، د′(س) غير موجودة عند : س = −٢

∴ توجد نقطة حرجة عند : س = −٢ هى : (−٢ ، ٠)

، ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | −٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | − − | غير موجودة | + + |
| سلوك د(س) | ↘ | ٠ | ↗ |

د(−٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

**(١٠)** $د(س) = س + \frac{٤}{س^٢}$

**الحل**

∵ $د(س) = س + \frac{٤}{س^٢} = س + ٤س^{-٢}$

، د متصلة لكل س ∈ ح − { ٠ }

∴ $د'(س) = ١ + ٤ \times (−٢) س^{-٣} = ١ − \frac{٨}{س^٣}$

، بوضع : د′(س) = ٠ يكون : $س^٣ = ٨$ أى : س = ٢

∴ توجد نقطة حرجة عند : س = ٢ هى : (٢ ، ٣)

ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | غير معرفة | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ | ٣ | ↗ |

د(٢) = ٣ قيمة صغرى محلية

**(١١)** $د(س) = س + \frac{٤}{س − ١}$

**الحل**

∵ $د(س) = س + \frac{٤}{س − ١} = س + ٤(س − ١)^{-١}$

، د متصلة لكل س ∈ ح − { ١ }

∴ $د'(س) = ١ − ٤(س − ١)^{-٢} = ١ − \frac{٤}{(س − ١)^٢}$

، بوضع : د′(س) = ٠ يكون : $(س − ١)^٢ = ٤$ و منها :

س − ١ = ٢ أى : س = ٣ ، س − ١ = −٢ أى : س = −١

∴ توجد للدالة د نقطتان حرجتان هما : (−١ ، −٣) ، (٣ ، ٥)

ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | −١ | | ١ | | ٣ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | ٠ | − − | غير معرفة | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | −٣ | ↘ | | ↘ | ٥ | ↗ |

د(−١) = −٣ قيمة عظمى محلية ، د(٣) = ٥ قيمة صغرى محلية

**(١٢)** $د(س) = س + \frac{٣}{س − ٢}$

**الحل**

∵ $د(س) = \frac{٣}{س − ٢} = ٣(س − ٢)^{-١}$

، د متصلة لكل س ∈ ح − { ٢ }

∴ $د'(س) = −٣(س − ٢)^{-٢} = \frac{−٣}{(س − ٢)^٢} \neq ٠$

، ∵ لا توجد نقطة فى مجال د تجعل د′(س) = ٠ أو غير موجودة

∴ ليس للدالة د قيم عظمى أو صغرى محلية

أحمد الشتوى

**(١٣)** $د(س) = ٤ هـ^{-س^٢}$

الحل

∵ $د(س) = ٤ هـ^{-س^٢}$ ، د متصلة لكل $س \in ح$

∴ $د'(س) = -٨ س هـ^{-س^٢}$ ، عندما : $د'(س) = ٠$ ∴ $س = ٠$

∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : $(٠ ، ٤)$

ببحث إشارة $د'(س)$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | ٠ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $د'(س)$ | + + | ٠ | − − |
| سلوك $د(س)$ | ↗ | ٤ | ↘ |

$د(٠) = ٤$ قيمة عظمى محلية

**(١٤)** $د(س) = هـ^{س} (٣ - س)$

الحل

∵ $د(س) = هـ^{س}(٣ - س)$ ، د متصلة لكل $س \in ح$

∴ $د'(س) = هـ^{س} \times (-١) + هـ^{س}(٣ - س)$

$= ٢هـ^{س} - س هـ^{س} = هـ^{س}(٢ - س)$

، عندما : $د'(س) = ٠$ ، ∵ $هـ^{س} \neq ٠$ ∴ $٢ - س = ٠$

∴ $س = ٢$ ∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : $(٢ ، هـ^٢)$

ببحث إشارة $د'(س)$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | ٢ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $د'(س)$ | + + | ٠ | − − |
| سلوك $د(س)$ | ↗ | $هـ^٢$ | ↘ |

$د(٢) = هـ^٢$ قيمة عظمى محلية

**(١٥)** $د(س) = هـ^{س} + هـ^{-س}$

الحل

∵ $د(س) = هـ^{س} + هـ^{-س}$ ، د متصلة لكل $س \in ح$

∴ $د'(س) = هـ^{س} - هـ^{-س} = هـ^{-س}(هـ^{٢س} - ١)$

، عندما : $د'(س) = ٠$ ، ∵ $هـ^{-س} \neq ٠$

∴ $هـ^{٢س} - ١ = ٠$ ∴ $(هـ^{س} - ١)(هـ^{س} + ١) = ٠$

∴ $هـ^{س} = ١$ ∴ $س = ٠$ أو : $هـ^{س} = -١$ مرفوض

∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : $(٠ ، ٢)$

ببحث إشارة $د'(س)$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | ٠ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $د'(س)$ | − − | ٠ | + + |
| سلوك $د(س)$ | ↘ | ٢ | ↗ |

$د(٠) = ٢$ قيمة صغرى محلية

**(١٦)** $د(س) = س - لو_{هـ} س$

الحل

∵ $د(س) = س - لو_{هـ} س$ ، د متصلة لكل $س \in ]٠ ، \infty[$

∴ $د'(س) = ١ - \frac{١}{س} = \frac{س - ١}{س}$

، بوضع : $د'(س) = ٠$ يكون : $س - ١ = ٠$ ∴ $س = ١$

∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : $(١ ، ١)$

ببحث إشارة $د'(س)$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | ٠ | ١ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $د'(س)$ | − − | ٠ | + + |
| سلوك $د(س)$ | ↘ | ١ | ↗ |

$د(١) = ١$ قيمة صغرى محلية

**(١٧)** د ( س ) = ٨ لو$_{هـ}$ س − س$^{٢}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٨ لو$_{هـ}$ س − س$^{٢}$ ، د متصلة لكل س ∈ ] ٠ ، ∞ [

∴ د$'$( س ) = $\frac{٨}{س}$ − ٢ س = $\frac{٨ − ٢ س^{٢}}{س}$ = $\frac{−٢ ( س^{٢} − ٤ )}{س}$

، بوضع : د$'$( س ) = ٠ يكون : س$^{٢}$ − ٤ = ٠ ∴ س = ٢ ∈ ] ٠ ، ∞ [

، س = −٢ ∉ ] ٠ ، ∞ [ ∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : ( ٢ ، ١,٥٥ )

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | ٠ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | | + + | ٠ | − − | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | ١,٥٥ | ↘ | |

د ( ٢ ) = ١,٥٥ قيمة عظمى محلية

**(١٨)** د ( س ) = ( س − ١ ) لو$_{هـ}$ س

**الحل**

∵ د ( س ) = ( س − ١ ) لو$_{هـ}$ س ، د متصلة لكل س ∈ ] ٠ ، ∞ [

∴ د$'$( س ) = ١ × لو$_{هـ}$ س + $\frac{١}{س}$ × ( س − ١ ) = لو$_{هـ}$ س + $\frac{س − ١}{س}$

= $\frac{س لو_{هـ} س + س − ١}{س}$

، بوضع : د$'$( س ) = ٠ ∴ س لو$_{هـ}$ س + س − ١ = ٠ .

لا يمكن حل هذه المعادلة جبرياً و من الواضح أن : س = ١ يمثل حل لها لأن :

عندما : س = ١ فإن : لو$_{هـ}$ س = لو$_{هـ}$ ١ = ٠ .

∴ س لو$_{هـ}$ س + س − ١ = ٠ . عندما : س = ١ أى أن :

د$'$( س ) = ٠ . عندما : س = ١

∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : ( ١ ، ٠ )

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | ٠ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | | − − | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↘ | ٠ | ↗ | |

د ( ١ ) = ٠ قيمة صغرى محلية

**أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة :**

**(١٩)** د ( س ) = س$^{٣}$ − ٣ س + ١ ، س ∈ [ −٢ ، ١ ]

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٣}$ − ٣ س + ١ ، د متصلة لكل س ∈ [ −٢ ، ١ ]

∴ د$'$( س ) = ٣ س$^{٢}$ − ٣ = ٣ ( س − ١ ) ( س + ١ )

، عندما : د$'$( س ) = ٠ ∴ س = ١ ∈ [ −٢ ، ١ ]

، س = −١ ∈ [ −٢ ، ١ ] ∴ توجد نقطتان حرجتان للدالة هما :

د ( −١ ) = ٣ ، د ( ١ ) = −١ ، ∵ د ( −٢ ) = −١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ ، قيمة صغرى مطلقة = −١

**(٢٠)** د ( س ) = $\sqrt{س − ١}$ ، س ∈ [ ٢ ، ٥ ]

**الحل**

∵ د ( س ) = $\sqrt{س − ١}$ ، د متصلة لكل س ∈ [ ٢ ، ٥ ]

∴ د$'$( س ) = $\frac{١}{٢ \sqrt{س − ١}}$ ≠ ٠

∴ لا توجد نقطة فى مجال د تجعل د$'$( س ) = ٠ .

، ∵ د$'$( س ) غير موجودة عند : س = ١ ∉ [ ٢ ، ٥ ]

∴ لا توجد نقط حرجة للدالة ، ∵ د ( ٢ ) = ١ ، د ( ٥ ) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ ، قيمة صغرى مطلقة = ١

**(٢١)** د ( س ) = حا س + حتا س ، س ∋ [ ٠ ، ٢ π ]

الحل

∵ د ( س ) = حا س + حتا س ، د متصلة لكل س ∋ [ ٠ ، ٢ π ]

∴ د/ ( س ) = حتا س – حا س ، بوضع : د/ ( س ) = ٠

يكون : حا س = حتا س ∴ طا س = ١

∴ س = $\frac{١}{٤}$ π ∋ [ ٠ ، ٢ π ] أو : س = $\frac{٥}{٤}$ π ∋ [ ٠ ، ٢ π ]

∴ توجد نقطتا حرجتان للدالة هما : د ( $\frac{١}{٤}$ π ) = $\sqrt{٢}$ ، د ( $\frac{٥}{٤}$ π ) = – $\sqrt{٢}$

، ∵ د ( ٠ ) = ١ ، د ( ٢ π ) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\sqrt{٢}$ ، قيمة صغرى مطلقة = – $\sqrt{٢}$

**(٢٢)** د ( س ) = س هـ$^{-س}$ ، س ∋ [ ٠ ، ٢ ]

الحل

∵ د ( س ) = س هـ$^{-س}$ ، د متصلة لكل س ∋ [ ٠ ، ٢ ]

∴ د/ ( س ) = ١ × هـ$^{-س}$ – س × هـ$^{-س}$ = هـ$^{-س}$ ( ١ – س )

، عندما : د/ ( س ) = ٠ ، ∵ هـ$^{-س}$ ≠ ٠

∴ ( ١ – س ) = ٠ ∴ س = ١

∴ توجد للدالة د نقطة حرجة هى : د ( ١ ) = ٠,٣٧

، ∵ د ( ٠ ) = ٠ ، د ( ٢ ) = ٠,٢٧

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٠,٣٧ ، قيمة صغرى مطلقة = ٠

**(٢٣)** أوجد قيم : ٲ ، ب ، حـ ، ٶ بحيث يحقق المنحنى :

د ( س ) = ٲ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ٶ الشروط التالية معاً

(ٲ) يمر بنقطة الأصل

(ب) له نقطة حرجة عند : س = ١

(حـ) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ( ٢ ، د ( ٢ ) ) الواقعة عليه هى : ٩ س + ص = ٢٠

الحل

∵ د ( س ) = ٲ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ٶ

∴ د/ ( س ) = ٣ ٲ س$^{٢}$ + ٢ ب س + حـ

، ∵ المنحنى يمر بنقطة الأصل ∴ د ( ٠ ) = ٠ ∴ ٶ = ٠

، ∵ للمنحنى نقطة حرجة عند : س = ١ ∴ د/ ( ١ ) = ٠

∴ ٣ ٲ + ٢ ب + حـ = ٠ (١)

، ∵ معادلة المماس عند : " س = ٢ " هى : ٩ س + ص = ٢٠

∴ ميل المماس عند : " س = ٢ " = – ٩ ∴ د/ ( ٢ ) = – ٩

∴ ١٢ ٲ + ٤ ب + حـ = – ٩ (٢)

، ∵ عند نقطة التماس : س = ٢ ∴ من معادلة المماس :

٩ س + ص = ٢٠ يكون : ١٨ + ص = ٢٠ ∴ ص = ٢

∴ المنحنى يمر بالنقطة ( ٢ ، ٢ ) أى أن : د ( ٢ ) = ٢

∴ ٨ ٲ + ٤ ب + ٢ حـ = ٢ (٣)

بطرح (١) من (٢) ينتج : ٩ ٲ + ٢ ب = – ٩ (٤)

، بضرب (١) × ٢ و طرحها من (٣) ينتج : ٢ ٲ = ٢ ∴ ٲ = ١

، بالتعويض فى (٤) ينتج : ب = – ٩

، بالتعويض فى (١) ينتج : حـ = ١٥

أحمد الشتوري

## ٣ – ٣ رسم المنحنيات

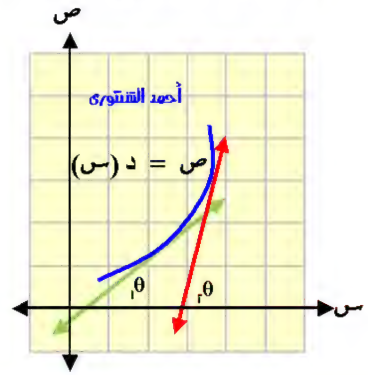
**تحدب المنحنيات :**

**تعريف :**

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على ] أ ، ب [ :

١) يكون المنحنى محدباً لأسفل إذا كانت د/ متزايدة على هذه الفترة

٢) يكون المنحنى محدباً لأعلى إذا كانت د/ متناقصة على هذه الفترة



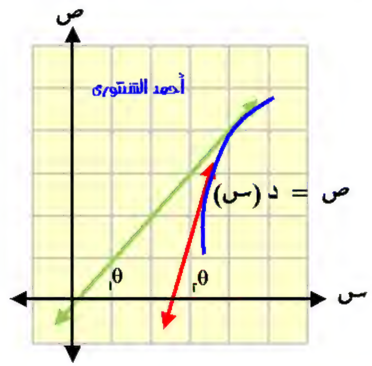

| س | أ ... ب |
|---|---|
| إشارة د// | + + + |
| تحدب منحنى د | لأسفل |

المنحنى محدب لأسفل

د/ متزايدة و تكون مشتقتها موجبة

أى : د//( س ) > ٠

لاحظ أن : المنحنى يقع أسفل مماساته




| س | أ ... ب |
|---|---|
| إشارة د// | − − − |
| تحدب منحنى د | لأعلى |

المنحنى محدب لأعلى

د/ متناقصة و تكون مشتقتها سالبة

أى : د//( س ) < ٠

لاحظ أن : المنحنى يقع أعلى مماساته



إذا كان للدالة د مشتقة ثانية غير صفرية فيمكن من خلالها دراسة تزايد و تناقص المشتقة الأولى د/ و تحديد فترات التحدب لأعلى و التحدب لأسفل لمنحنى الدالة د

**اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات :**

**نظرية :**

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على ] أ ، ب [ :

(١) د//( س ) > ٠ لجميع قيم س ∈ ] أ ، ب [

فإن : منحنى د يكون محدباً لأسفل على ] أ ، ب [

(٢) د//( س ) < ٠ لجميع قيم س ∈ ] أ ، ب [

فإن : منحنى د يكون محدباً لأعلى على ] أ ، ب [

**إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٧٣**

حدد فترات التحدب لأعلى و التحدب لأسفل لكل من المنحنيات التالية :

(أ) د ( س ) = $س^2$ − ٤ س + ٢

(ب) د ( س ) = $س^4$ − ٤ $س^3$

**الحل**

(أ) ∵ د ( س ) = $س^2$ − ٤ س + ٢

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ د/( س ) = ٢ س − ٤

، د//( س ) = ٢ ، ∵ د//( س ) > ٠

لكل س ∈ ح

∴ المنحنى محدب لأسفل

لكل س ∈ ح

و الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | −∞ ... ∞ |
|---|---|
| إشارة د// | + + |
| تحدب منحنى د | لأسفل |

(ب) ∵ د ( س ) = $س^{٤}$ − ٤ $س^{٣}$

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ $د^{/}$ ( س ) = ٤ $س^{٣}$ − ١٢ $س^{٢}$

، $د^{//}$ ( س ) = ١٢ $س^{٢}$ − ٢٤ س = ١٢ س ( س − ٢ )

بوضع : $د^{//}$ ( س ) = ٠ يكون : س = ٠ ، س = ٢

ببحث إشارة $د^{//}$ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د^{//}$ ( س ) | + + | ٠ | − − | ٠ | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | لأعلى | | لأسفل |

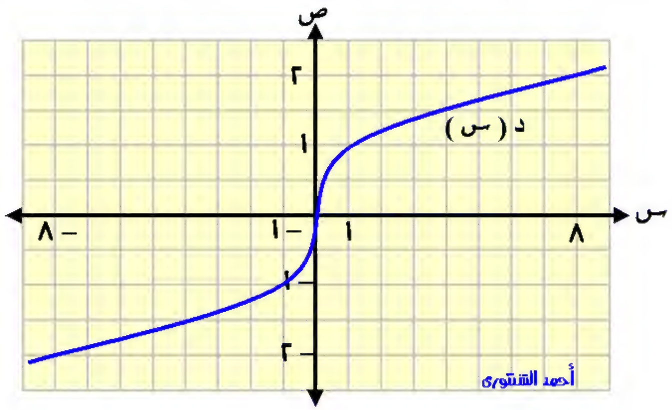
منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] −∞ ، −١ [ ، محدب لأعلى فى ] ٠ ، ٢ [ ، منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] ٢ ، ∞ [

## إجابة تكنولوجيا صفحة ٧٣

باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم الدالتين د ، ر حيث :

د ( س ) = $\sqrt[٣]{س}$ ، ر ( س ) = $س^{\frac{٢}{٣}}$ و حدد فترات التحدب لأعلى و التحدب لأسفل و حقق اجابتك باستخدام اختبار المشتقة الثانية

**الحل**




من الشكل نجد :

منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] −∞ ، ٠ [

، محدب لأعلى فى ] ٠ ، ∞ [

التحقق باستخدام اختبار المشتقة الثانية :

∵ د ( س ) = $\sqrt[٣]{س}$ = $س^{\frac{١}{٣}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ $د^{/}$ ( س ) = $\frac{١}{٣}$ $س^{-\frac{٢}{٣}}$ ،

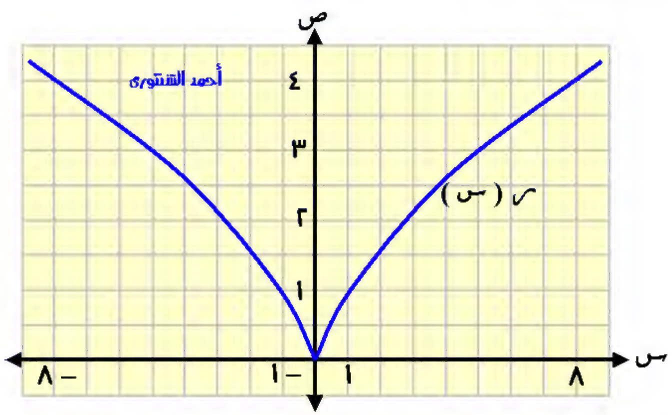
$د^{//}$ ( س ) = − $\frac{٢}{٩}$ $س^{-\frac{٥}{٣}}$ = $\frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^{٥}}}$ حيث : س ≠ ٠

ببحث إشارة $د^{//}$ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة $د^{//}$ ( س ) | + + | غير معرفة | − − |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | لأعلى |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] −∞ ، ٠ [

، محدب لأعلى فى ] ٠ ، ∞ [




من الشكل نجد :

منحنى الدالة محدب لأعلى فى ] −∞ ، ٠ [ ، ] ٠ ، ∞ [

التحقق باستخدام اختبار المشتقة الثانية :

∵ د(س) = $س^{\frac{2}{3}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د'(س) = $\frac{2}{3}$ $س^{-\frac{1}{3}}$ ،

د''(س) = $-\frac{2}{9}$ $س^{-\frac{4}{3}}$ = $\frac{-2}{9\sqrt[3]{س^{4}}}$ حيث : س ≠ ٠ .

نبحث إشارة د''(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | ٠ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة د''(س) | - - | غير معرفة | - - |
| تحدب منحنى د(س) | لأعلى | | لأعلى |

منحنى الدالة محدب لأعلى فى ]$-\infty$ ، ٠[ ، ]٠ ، $\infty$[

**ملاحظة :**

قد يتغير اتجاه تحدب منحنى الدالة المتصلة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى عند نقطة تنعدم عندها المشتقة الثانية للدالة أو تكون غير موجودة

**نقطة الانقلاب :**

**تعريف :**

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة ]أ ، ب[ ، حـ ∈ ]أ ، ب[
و كان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (حـ ، د(حـ)) فإن :
هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تغير تحدب المنحنى عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب لأسفل

**ملاحظات :**

(١) نقطة الانقلاب عند حـ ∈ ]أ ، ب[ تعنى أن : د(حـ) تكون معرفة

(٢) قد يكون للمنحنى نقطة انقلاب واحدة أو أكثر

(٣) نقط الانقلاب هى النقط التى تفصل بين مناطق التحدب لأعلى و مناطق التحدب لأسفل

(٤) المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة

(٥) النقطة (حـ ، د(حـ)) تكون نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تحقق ما يلى :

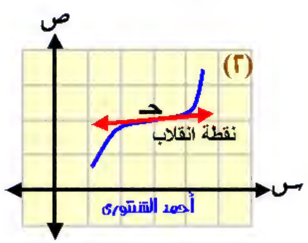
أ) منحنى الدالة د متصل عند النقطة حـ

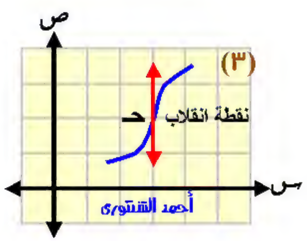
٢) يمكن رسم مماس وحيد لمنحنى الدالة د عند النقطة حـ
أى أن : د'(حـ) ∈ ح " موجودة "
أو غير معرفة " المماس عندها رأسى "

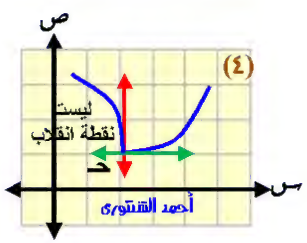
٣) تتغير إشارة د''(س) قبل و بعد النقطة حـ
أى أن : د''(حـ) = ٠ أو غير موجودة

و الأشكال التالية توضح ذلك :



توجد نقطة انقلاب فى الأشكال (١) ، (٢) ، (٣) لأنها منحنيات لدوال متصلة يتغير اتجاه تحدب المنحنى قبل و بعد حـ و لها مماس عند حـ
لا توجد نقطة انقلاب فى شكل (٤) لعدم وجود مماس وحيد عند حـ

### إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٧٥

إذا كانت : د(س) = { (س + ٣)$^{٢}$ عندما س < −١ ، ٣ س$^{٢}$ − س$^{٣}$ عندما س ≥ −١ }

حدد فترات التحدب لأعلى و التحدب لأسفل لمنحنى الدالة د ، و أوجد نقط الانقلاب و معادلة مماس المنحنى عندها

**الحل**

∵ الدالة د متعددة التعريف مجالها ح

، د(−١$^{+}$) = د(−١$^{-}$) = د(−١) = ٤

∴ الدالة د متصلة عند : س = −١

، ∵ د$'$(−١$^{+}$) = نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) $\frac{\text{د(−١ + هـ) − د(−١)}}{\text{هـ}}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) $\frac{\text{(−١ + هـ + ٣)}^{٢} - ٤}{\text{هـ}}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) (هـ + ٤) = ٤

، ∵ د$'$(−١$^{-}$) = نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) $\frac{\text{د(−١ + هـ) − د(−١)}}{\text{هـ}}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) $\frac{٣\text{(−١ + هـ)}^{٢} - \text{(−١ + هـ)}^{٣} - ٤}{\text{هـ}}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) $\frac{\text{(−١ + هـ)}^{٢}\text{(٤ − هـ)} - ٤}{\text{هـ}}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) (٦ هـ − هـ$^{٢}$ − ٩) = −٩

∴ د$'$(−١$^{+}$) ≠ د$'$(−١$^{-}$) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : س = −١

∴ د$'$(س) = { ٢(س + ٣) عندما س < −١ ، غير موجودة عندما س = −١ ، ٦ س − ٣ س$^{٢}$ عندما س > −١ }

∴ لا يوجد مماس للدالة عند : س = −١

∴ د$''$(س) = { ٢ عندما س < −١ ، غير موجودة عندما س = −١ ، ٦ − ٦ س عندما س > −١ }

بوضع : د$''$(س) = ٠ يكون : ٦ − ٦ س = ٠ ∴ س = ١

ببحث إشارة د$''$(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | −١ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$''$(س) | | + + | غير موجودة | + + | ٠ | − − | |
| تحدب منحنى د(س) | | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى ]−∞ ، −١[ ، ]−١ ، ١[

، محدب لأعلى فى ]١ ، ∞[ ، و له نقطة انقلاب هى : (١ ، ٢)

، ∵ ميل المماس = [د$'$(س)]$_{(١ ، ٢)}$ = ٦ × ١ − ٣ × (١)$^{٢}$ = ٣

∴ معادلة مماس المنحنى عند (١ ، ٢) هى : ص − ٢ = ٣(س − ١)

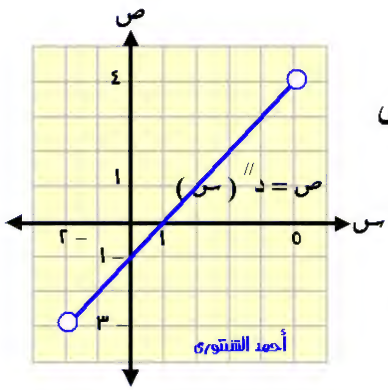
أى : ٣ س − ص − ١ = ٠

### إجابة تفكير ناقد صفحة ٧٥

يمثل الشكل المقابل منحنى د$''$(س) على [−٢ ، ٥] للدالة المتصلة د

وضح فترات التحدب لأعلى و التحدب لأسفل لمنحنى الدالة د إن وجدت

هل توجد نقط انقلاب لمنحنى د فى هذه الفترة ؟ فسر اجابتك



### الحل

∵ د″( س ) < ٠ فى ] −٢ ، ١ [

∴ منحنى الدالة محدب لأعلى فى ] −٢ ، ١ [ ،

∵ د″( س ) > ٠ فى ] ١ ، ٥ [

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] ١ ، ٥ [ ،

د″( ١ ) = ٠ ، عند : س = ١ يتغير تحدب المنحنى

∴ توجد نقطة انقلاب للمنحنى عند : س = ١

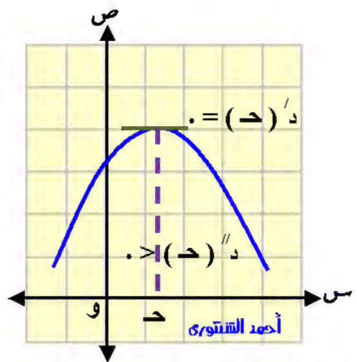
### اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى و الصغرى المحلية :

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوى حـ بحيث د′( حـ ) = ٠ و كانت :

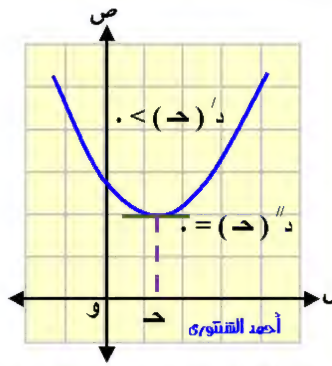
**(١)** د″( حـ ) < ٠ فإن : د ( حـ ) قيمة عظمى محلية

**(٢)** د″( حـ ) > ٠ فإن : د ( حـ ) قيمة صغرى محلية

**(٣)** د″( حـ ) = ٠ فإن : اختبار المشتقة الثانية لا يستطيع تحديد نوع النقطة ( حـ ، د ( حـ ) ) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية ( يتم استخدام اختبار المشتقة الأولى )




د ( حـ ) قيمة عظمى محلية عند حـ




د ( حـ ) قيمة صغرى محلية عند حـ

### خطوات تعين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة باستخدام المشتقة الثانية :

**(١)** نحدد مجال الدالة

**(٢)** نوجد د′( س )

**(٣)** نوجد النقط الحرجة للدالة

أى : التى تجعل د′( س ) = ٠ أو غير موجودة

**(٤)** نبحث إشارة د″( س ) حول النقطة الحرجة و لتكن : حـ

**١)** إذا كانت : د′( حـ ) = ٠ ، د″( حـ ) < ٠ " سالبة "
فإن : ( حـ ، د ( حـ ) ) نقطة قيمة عظمى محلية

**٢)** إذا كانت : د′( حـ ) = ٠ ، د″( حـ ) > ٠ " موجبة "
فإن : ( حـ ، د ( حـ ) ) نقطة قيمة صغرى محلية

**٣)** إذا كانت : د′( حـ ) = ٠ ، د″( حـ ) = ٠
نستخدم اختبار المشتقة الأولى

### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٧٦

باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د حيث : د ( س ) = س٣ − ٣ س٢ − ٩ س

### الحل

∵ د ( س ) = س٣ − ٣ س٢ − ٩ س

، د كثيرة حدود فهى متصلة لكل س ∈ ح

∴ د′( س ) = ٣ س٢ − ٦ س − ٩ = ٣ ( س − ٣ ) ( س + ١ )

، د″( س ) = ٦ س − ٦

للدالة نقط حرجة عندما : د′( س ) = ٣ ( س − ٣ ) ( س + ١ ) = ٠

أى عندما : س = ٣ ، س = −١

عندما : س = ٣ يكون : د$''$( ٣ ) = ١٢ > ٠

∴ د ( ٣ ) = − ٢٧ قيمة صغرى محلية

عندما : س = − ١ يكون : د$''$( − ١ ) = − ١٢ < ٠

∴ د ( − ١ ) = ٥ قيمة عظمى محلية

## رسم الشكل العام لمنحنيات كثيرات الحدود :

يستخدم حساب التفاضل فى رسم الشكل العام لمنحنيات الدوال بالاعتماد على تتبع سلوك الدالة و تمثيل الأزواج المرتبة فى المستوى الاحداثى المتعامد ، تقتصر الدراسة بهذا المحتوى على دوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فأقل على الصورة :

د ( س ) = أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ء

### خطوات رسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د ( س ) :

(١) نحدد مجال الدالة

(٢) نحدد نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

١) إذا كانت زوجية يكون منحناها متماثل حول محور الصادات

٢) إذا كانت فردية يكون منحناها متماثل حول نقطة الأصل

(٣) نوجد د$'$( س ) ، د$''$( س )

(٤) تحديد فترات التزايد و التناقص و التحدب و نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الانقلاب ان وجدت

(٥) اعداد جدول التزايد و التناقص و التحدب لمعرفة الشكل العام للمنحنى و نوع النقط الحرجة

(٦) ايجاد نقط تقاطع منحنى الدالة مع محورى الاحداثيات إن أمكن ذلك

(٧) رسم منحنى الدالة و يمكن الاستعانة ببعض النقط الاضافية



## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٧٧

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث :

ص = د ( س ) = ١٢ س − س$^{٣}$

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، فردية أى متماثلة حول نقطة الأصل

∵ د ( س ) = ١٢ س − س$^{٣}$

∴ د$'$( س ) = ١٢ − ٣ س$^{٢}$ = − ٣ ( س − ٢ ) ( س + ٢ )

، د$''$( س ) = − ٦ س

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$( س ) = − ٣ ( س − ٢ ) ( س + ٢ ) = ٠

أى عندما : س = ٢ ، س = − ٢ ، و تكون د متزايدة فى ] − ٢ ، ٢ [

، و متناقصة فى ] − ∞ ، − ٢ [ ، ] ٢ ، ∞ [

، ( − ٢ ، − ١٦ ) نقطة قيمة صغرى محلية

، ( ٢ ، ١٦ ) نقطة قيمة عظمى محلية

، د$''$( س ) = − ٦ س = ٠ أى عندما : س = ٠

، د$''$( س ) > ٠ فى ] − ∞ ، ٠ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، د$''$( س ) < ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ٠ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | − ∞ | − ٢ | | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | − − | ٠ | + + | | + + | ٠ | − − |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |
| إشارة د$''$( س ) | + + | | + + | ٠ | − − | | − − |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | | لأعلى |
| ص | | − ١٦ | | ٠ | | ١٦ | |
| | | قيمة صغرى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة عظمى محلية | |

بعض النقط الاضافية :

بوضع : د ( س ) = ١٢ س − س$^{٣}$ = ٠

∴ − س ( س$^{٢}$ − ١٢ ) = ٠

∴ − س ( س − ٢$\sqrt{٣}$ ) ( س + ٢$\sqrt{٣}$ ) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٢$\sqrt{٣}$

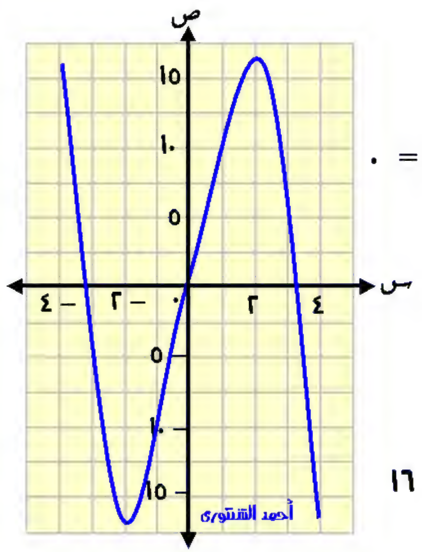
، س = − ٢$\sqrt{٣}$

، عندما : س = ٤ فإن :

د ( س ) = ١٢ × ٤ − ( ٤ )$^{٣}$ = − ١٦

، عندما : س = − ٤ فإن :

د ( س ) = ١٢ × ( − ٤ ) − ( − ٤ )$^{٣}$ = ١٦




## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٧٨

ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث : ص = د ( س )

إذا علمت ما يلى :

(١) د متصلة مجالها ] ٠ ، ∞ [ ، د ( ٤ ) = ٣

، د ( ٠ ) = ١

(٢) د$'$ ( س ) > ٠ عندما : س > ٠

(٣) د$''$ ( س ) > ٠ عندما : س < ٤ ، د$''$ ( ٤ ) = ٠

، د$''$ ( س ) < ٠ عندما : س > ٤

الحل

من (١) د متصلة مجالها ] ٠ ، ∞ [ ، د ( ٤ ) = ٣ ، د ( ٠ ) = ١

∴ النقطتين ( ٤ ، ٣ ) ، ( ٠ ، ١ ) فى المجال ] ٠ ، ∞ [

من (٢) د$'$ ( س ) > ٠ عندما : س > ٠

∴ د متزايدة على ] ٠ ، ∞ [

من (٣) د$''$ ( س ) > ٠ عندما : س < ٤

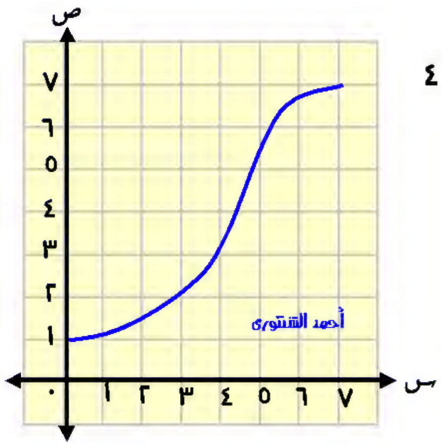
∴ محدب لأسفل فى ] ٠ ، ٤ [

، د$''$ ( ٤ ) = ٠

∴ ( ٤ ، ٣ ) نقطة انقلاب

، د$''$ ( س ) < ٠ عندما : س > ٤

∴ المنحنى محدب لأعلى فى ] ٤ ، ∞ [




## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٧٨

إذا كانت النقطة ( ٢ ، ٢ ) هى نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د حيث :

د ( س ) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س فاوجد قيم أ ، ب الحقيقية

الحل

∵ النقطة ( ٢ ، ٢ ) نقطة انقلاب لمنحنى د

∴ د$''$ ( ٢ ) = ٠ (١) ، د ( ٢ ) = ٢ (٢)

، ∵ د ( س ) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ + ٢ أ س + ب ، د$''$ ( س ) = ٦ س + ٢ أ

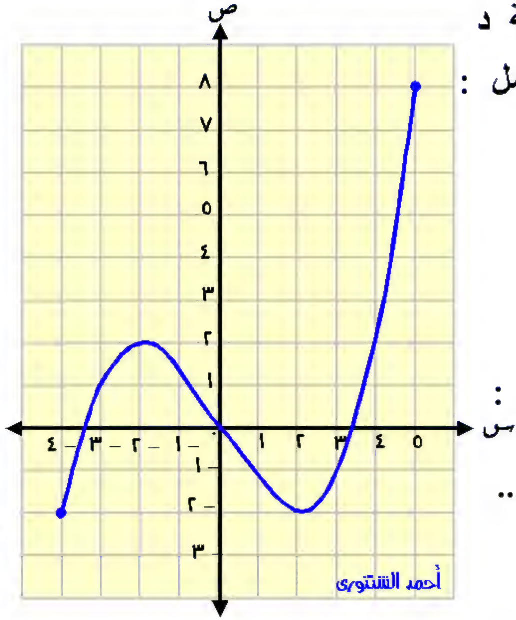
من (٢) : ٨ + ٤ أ + ٢ ب = ٢ و منها : ٤ أ + ٢ ب = − ٦ (٣)

من (١) : ١٢ + ٢ أ = ٠ و منها : أ = − ٦

بالتعويض فى (٣) ينتج : ب = ٩

## حل تمارين ( ٣ – ٣ ) صفحة ٨٠ بالكتاب المدرسى

(١) يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د
حيث : ص = د ( س ) ، اكمل :




(أ) مجال الدالة د = ....

(ب) د/ ( س ) > ٠ عندما :
س ∈ ....

(حـ) د// ( س ) < ٠ عندما :
س ∈ ....

(ء) المنحنى محدب لأعلى عندما :
س ∈ ....

(هـ) للمنحنى نقطة انقلاب هى ....

(و) للدالة قيمة صغرى محلية
عند : س = ....

(ز) للدالة قيمة عظمى مطلقة = ....

الحل

(أ) مجال الدالة د = [ – ٤ ، ٥ ]

(ب) ∵ منحنى الدالة متناقص فى [ – ٢ ، ٢ ] ، له مماس أفقى عند كل من :
س = – ٢ ، س = ٢

∴ د/ ( س ) > ٠ عندما : س ∈ ] – ٢ ، ٢ [

(حـ) ∵ منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] ٠ ، ٥ [

∴ د// ( س ) < ٠ عندما : س ∈ [ ٠ ، ٥ ]

(ء) من الشكل : المنحنى محدب لأعلى عندما : س ∈ [ – ٤ ، ٠ ]

(هـ) ∵ من الشكل : المنحنى يتغير تحدبه حول النقطة ( ٠ ، ٠ )

∴ للمنحنى نقطة انقلاب هى ( ٠ ، ٠ )

(و) من الشكل : للدالة قيمة صغرى محلية عند : س = ٢

(ز) من الشكل : للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٨

ابحث فترات تحدب الدالة د ثم اوجد نقط الانقلاب ( إن وجدت ) لكل مما يأتى :

(٢) د ( س ) = ٤ – ٦ س – ٣ س٢

الحل

∵ د ( س ) = ٤ – ٦ س – ٣ س٢

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ د/ ( س ) = – ٦ – ٦ س ، د// ( س ) = – ٦

، ∵ د// ( س ) > ٠ لكل س ∈ ح

∴ المنحنى محدب لأعلى لكل س ∈ ح

و لا توجد نقط انقلاب

و الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | ∞ ∞ – |
|---|---|
| إشارة د// | – – |
| تحدب منحنى د | لأعلى |

(٣) د ( س ) = س٣ – ٣ س٢ + ١

الحل

∵ د ( س ) = س٣ – ٣ س٢ + ١ ، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ د/ ( س ) = ٣ س٢ – ٦ س ،

د// ( س ) = ٦ س – ٦ = ٦ ( س – ١ )

بوضع : د// ( س ) = ٠ يكون : س = ١

ببحث إشارة د// ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | ∞ | ١ | ∞ – |
|---|---|---|---|
| إشارة د// ( س ) | + + | ٠ | – – |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | ١ | لأعلى |

منحنى الدالة محدب لأعلى فى ] −∞ ، ١ [ ، محدب لأسفل فى ] ١ ، ∞ [
، و النقطة ( ١ ، −١ ) نقطة انقلاب

**(٤)** $د(س) = ١٥ س + ٦ س^٢ - س^٣$

الحل

∵ $د(س) = ١٥ س + ٦ س^٢ - س^٣$

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ $د^{/}(س) = ١٥ + ١٢ س - ٣ س^٢$ ،

$د^{//}(س) = ١٢ - ٦ س = -٦ ( س - ٢ )$

بوضع : $د^{//}(س) = ٠$ يكون : س = ٢

ببحث إشارة $د^{//}(س)$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د^{//}(س)$ | + | + | ٠ | − | − |
| تحدب منحنى د (س) | | لأسفل | ٤٦ | لأعلى | |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] −∞ ، ٢ [ ، محدب لأعلى فى ] ٢ ، ∞ [
، و النقطة ( ٢ ، ٤٦ ) نقطة انقلاب

**(٥)** $د(س) = س^٤ - ٨ س^٢ + ١٦$

الحل

∵ $د(س) = س^٤ - ٨ س^٢ + ١٦$

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ $د^{/}(س) = ٤ س^٣ - ١٦ س$ ،

$د^{//}(س) = ١٢ س^٢ - ١٦ = ٤ ( \sqrt{٣} س + ٢ ) ( \sqrt{٣} س - ٢ )$

بوضع : $د^{//}(س) = ٠$ يكون : $س = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، $س = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ببحث إشارة $د^{//}(س)$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ | | $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د^{//}(س)$ | + | + | ٠ | − − | ٠ | + | + |
| تحدب منحنى د (س) | | لأسفل | $\frac{٦٤}{٩}$ | لأعلى | $\frac{٦٤}{٩}$ | لأسفل | |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] −∞ ، $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ [ ، ] $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ∞ [
، محدب لأعلى فى ] $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ [
، و النقط ( $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$ ) ، ( $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٦٤}{٩}$ ) نقط انقلاب

**(٦)** $د(س) = \frac{٦}{س^٢ + ٣}$

الحل

∵ $د(س) = \frac{٦}{س^٢ + ٣} = ٦ ( س^٢ + ٣ )^{-١}$

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ $د^{/}(س) = -٦ ( س^٢ + ٣ )^{-٢} \times ٢ س = -١٢ س ( س^٢ + ٣ )^{-٢}$

، $د^{//}(س) = -١٢ ( س^٢ + ٣ )^{-٢} + ٤٨ س^٢ ( س^٢ + ٣ )^{-٣}$

$= -١٢ ( س^٢ + ٣ )^{-٣} ( س^٢ + ٣ - ٤ س^٢ )$

$= -١٢ ( س^٢ + ٣ )^{-٣} ( ٣ - ٣ س^٢ )$

$= ٣٦ ( س^٢ + ٣ )^{-٣} ( س^٢ - ١ )$

$= \frac{٣٦ ( س + ١ ) ( س - ١ )}{( س^٢ + ٣ )^٣}$

بوضع : $د^{//}(س) = ٠$ يكون : س = −١ ، س = ١

ببحث إشارة $د^{//}(س)$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | $-١$ | | $١$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د $''$ ( س ) | + + | ٠ | − − | ٠ | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | $\frac{٢}{٣}$ | لأعلى | $\frac{٢}{٣}$ | لأسفل |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى $]-\infty \text{ ، } -١[$ ، $]١ \text{ ، } \infty[$

، محدب لأعلى فى $]-١ \text{ ، } ١[$

، و النقط $(-١ \text{ ، } \frac{٢}{٣})$ ، $(١ \text{ ، } \frac{٢}{٣})$ نقط انقلاب

**(٧)** $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$

الحل

$\because \text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤} = (\text{س}^{٢} - ١)(\text{س}^{٢} - ٤)^{-١}$

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل $\text{س} \in \text{ح} - \{-٢ \text{ ، } ٢\}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س}(\text{س}^{٢} - ٤)^{-١} - ٢\text{س}(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٢}(\text{س}^{٢} - ١)$

$= ٢\text{س}(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٢}(\text{س}^{٢} - ٤ - \text{س}^{٢} + ١)$

$= -٦\text{س}(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٢}$

، $\text{د}''(\text{س}) = -٦(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٢} + ٢٤\text{س}^{٢}(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٣}$

$= -٦(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٣}(\text{س}^{٢} - ٤ - ٤\text{س}^{٢})$

$= -٦(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٣}(-٤ - ٣\text{س}^{٢})$

$= ٦(\text{س}^{٢} - ٤)^{-٣}(٣\text{س}^{٢} + ٤) = \dfrac{٦(٣\text{س}^{٢} + ٤)}{(\text{س}^{٢} - ٤)^{٣}}$

بوضع : $\text{د}''(\text{س}) = ٠$ يكون : $٣\text{س}^{٢} + ٤ = ٠$ ليس لها حل فى ح

أى عندما : $\text{س} = -٢ \notin$ مجال د ، $\text{س} = ٢ \notin$ مجال د

نبحث إشارة $\text{د}''(\text{س})$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | $-٢$ | | $٢$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د $''$ ( س ) | + + | غير معرفة | − − | غير معرفة | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | لأعلى | | لأسفل |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى $]-\infty \text{ ، } -٢[$ ، $]٢ \text{ ، } \infty[$

، محدب لأعلى فى $]-٢ \text{ ، } ٢[$ ، و لا توجد نقط انقلاب

**(٨)** $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١٢ & \text{عندما } \text{س} \geq ٤ \\ ١٢ + ٢\text{س} - \text{س}^{٢} & \text{عندما } \text{س} < ٤ \end{cases}$

الحل

$\because$ الدالة د متعددة التعريف مجالها ح

، $\text{د}(٤^{+}) = \text{د}(٤^{-}) = \text{د}(٤) = ٤$

$\therefore$ الدالة د متصلة عند : $\text{س} = ٤$

، $\because \text{د}'(٤^{+}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \dfrac{\text{د}(٤ + \text{هـ}) - \text{د}(٤)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \dfrac{(٤ + \text{هـ})^{٢} - ١٢ - ٤}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{+}} (\text{هـ} + ٨) = ٨$

، $\because \text{د}'(٤^{-}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \dfrac{\text{د}(٤ + \text{هـ}) - \text{د}(٤)}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \dfrac{١٢ + ٢(٤ + \text{هـ}) - (٤ + \text{هـ})^{٢} - ٤}{\text{هـ}}$

$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{-}} (-\text{هـ} - ٦) = -٦$

$\therefore \text{د}'(٤^{+}) \neq \text{د}'(٤^{-})$ $\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : $\text{س} = ٤$

∴ د/ ( س ) = { ٢ س عندما س < ٤ ، غير موجودة عندما س = ٤ ، ٢ − ٢ س عندما س < ٤ }

∴ لا يوجد مماس للدالة عند : س = ٤

∴ د// ( س ) = { ٢ عندما س < ٤ ، غير موجودة عندما س = ٤ ، − ٢ عندما س < ٤ }

د// ( س ) ≠ ٠ ، ببحث إشارة د// ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | − ∞ | ٤ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د// ( س ) | + + | غير موجودة | − − |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | ٤ | لأعلى |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] − ∞ ، ٤ [ ، محدب لأعلى فى ] ٤ ، ∞ [

، و لا توجد نقطة انقلاب لعدم وجود مماس للمنحنى عند النقطة ( ٤ ، ٤ )

(٩) د ( س ) = { س$^{٣}$ − ٣ س عندما س < ٠ . ، ٤ س − س$^{٢}$ عندما س ≥ ٠ . }

**الحل**

∵ الدالة د متعددة التعريف مجالها ح

، د ( ٠$^{+}$ ) = د ( ٠$^{-}$ ) = د ( ٠ ) = ٠ .

∴ الدالة د متصلة عند : س = ٠ .

∵ د/ ( ٠$^{+}$ ) = نهــا (هـ ← ٠$^{+}$) $\frac{\text{د ( ٠ + هـ ) − د ( ٠ )}}{\text{هـ}}$

= نهــا (هـ ← ٠$^{+}$) $\frac{\text{( ٠ + هـ )}^{٣} \text{ − ٣ ( ٠ + هـ ) − ٠}}{\text{هـ}}$

= نهــا (هـ ← ٠$^{+}$) ( هـ$^{٢}$ − ٣ ) = − ٣

، ∵ د/ ( ٠$^{-}$ ) = نهــا (هـ ← ٠$^{-}$) $\frac{\text{د ( ٠ + هـ ) − د ( ٠ )}}{\text{هـ}}$

= نهــا (هـ ← ٠$^{-}$) $\frac{\text{٤ ( ٠ + هـ ) − ( ٠ + هـ )}^{٢} \text{ − ٠}}{\text{هـ}}$

= نهــا (هـ ← ٠$^{-}$) ( ٤ − هـ ) = ٤

∴ د/ ( ٠$^{+}$ ) ≠ د/ ( ٠$^{-}$ ) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : س = ٠ .

∴ د/ ( س ) = { ٣ س$^{٢}$ − ٣ عندما س < ٠ . ، غير موجودة عندما س = ٠ . ، ٤ − ٢ س عندما س < ٠ . }

∴ لا يوجد مماس للدالة عند : س = ٠ .

∴ د// ( س ) = { ٦ س عندما س < ٠ . ، غير موجودة عندما س = ٠ . ، − ٢ عندما س < ٠ . }

بوضع : د// ( س ) = ٠ . يكون : ٦ س = ٠ . ∴ س = ٠ .

ببحث إشارة د// ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | − ∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د// ( س ) | − − | غير موجودة | − − |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | ٠ | لأعلى |

منحنى الدالة محدب لأعلى فى كل من : ] − ∞ ، ٠ [ ، ] ٠ ، ∞ [

، و لا توجد نقطة انقلاب عند : ( ٠ ، ٠ )

**(١٠)** أثبت أن قياس زاوية ميل المماس عند نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة د حيث : د(س) = $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$ يساوى $\frac{١}{٤}\pi$

**الحل**

∵ د(س) = $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$ = س (١ − س$^{٢}$)$^{-١}$

، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح − {−١ ، ١}

∴ د$'$(س) = ١ × (١ − س$^{٢}$)$^{-١}$ − س (−٢س) (١ − س$^{٢}$)$^{-٢}$

= (١ − س$^{٢}$)$^{-٢}$ (١ − س$^{٢}$ + ٢س$^{٢}$)

= (١ − س$^{٢}$)$^{-٢}$ (١ + س$^{٢}$)

، د$''$(س) = ٤س (١ − س$^{٢}$)$^{-٣}$ (١ + س$^{٢}$) + ٢س (١ − س$^{٢}$)$^{-٢}$

= ٢س (١ − س$^{٢}$)$^{-٣}$ (٢ + ٢س$^{٢}$ + ١ − س$^{٢}$)

= ٢س (١ − س$^{٢}$)$^{-٣}$ (س$^{٢}$ + ٣) = $\frac{٢\text{س}(\text{س}^{٢}+٣)}{(١-\text{س}^{٢})^{٣}}$

بوضع : د$''$(س) = ٠ يكون : ٢س (س$^{٢}$ + ٣) = ٠

∴ س = ٠ ∈ مجال د ، س$^{٢}$ + ٣ = ٠ ليس لها حل فى ح

، ∵ د$''$(س) غير معرفة عندما : ١ − س$^{٢}$ = ٠

أى عندما : س = −١ ∉ مجال د ، س = ١ ∉ مجال د

ببحث إشارة د$''$(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | −١ | | ٠ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$''$(س) | − − | غير معرفة | − − | | + + | غير معرفة | + + |
| تحدب منحنى د(س) | لأعلى | | لأعلى | ٠ | لأسفل | | لأسفل |

النقطة (٠ ، ٠) نقطة انقلاب ، ميل المماس = [د$'$(س)]$_{(٠ ، ٠)}$ = ١

∴ قياس الزاوية التى يصنعها المماس = طا$^{-١}$ (١) = $\frac{١}{٤}\pi$

**(١١)** إذا كان لمنحنى الدالة د حيث : د(س) = س (س − ٣)$^{٢}$ قيمة عظمى محلية عند س$_{١}$ ، قيمة صغرى محلية عند س$_{٢}$

فأثبت أن الاحداثى السينى لنقطة الانقلاب = $\frac{١}{٢}$ (س$_{١}$ + س$_{٢}$)

**الحل**

∵ د(س) = س (س − ٣)$^{٢}$ = س$^{٣}$ − ٦س$^{٢}$ + ٩س

، الدالة د كثيرة حدود مجالها ح

∴ د$'$(س) = ٣س$^{٢}$ − ١٢س + ٩ = ٣(س − ١)(س − ٣)

، د$''$(س) = ٦س − ١٢ = ٦(س − ٢)

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$(س) = ٣(س − ١)(س − ٣) = ٠

أى عندما : س = ١ ، س = ٣

، ∵ عندما : س = ١ يكون : د$''$(١) = −٦ < ٠ .

∴ د(١) = ٤ قيمة عظمى محلية ∴ س$_{١}$ = ١

، عندما : س = ٣ يكون : د$''$(٣) = ٦ > ٠ .

∴ د(٣) = ٠ . قيمة صغرى محلية ∴ س$_{٢}$ = ٣

، د$''$(س) = ٦(س − ٢) = ٠ . أى عندما : س = ٢

، د$''$(س) < ٠ . فى ]−∞ ، ٢[ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، د$''$(س) > ٠ . فى ]٢ ، ∞[ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة (٢ ، ٢) نقطة انقلاب

∴ $\frac{١}{٢}$ (س$_{١}$ + س$_{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ (١ + ٣) = ٢ = الاحداثى السينى لنقطة الانقلاب

**(١٢)** أوجد أ ، ب بحيث يكون للمنحنى :

س$^{٢}$ص + أ ص + ب س$^{٢}$ = ٠ نقطة انقلاب

عند النقطة (١ ، −١)

الحل

∵ النقطة ( ١ ، – ١ ) نقطة انقلاب للمنحنى : س$^{٢}$ ص + أ ص + ب س$^{٢}$ = ٠ .

∴ فهى تحقق معادلته أى أن : ١ × ( – ١ ) + أ × ( – ١ ) + ب × ( ١ )$^{٢}$ = ٠ .

و منها : ب = أ + ١ (١)

، باشتقاق معادلة المنحنى مرتين بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س ص + س$^{٢}$ ص/ + أ ص/ + ٢ ب س = ٠ .

∴ ٢ س ص + ص/ ( س$^{٢}$ + أ ) + ٢ ب س = ٠ .

، عند النقطة ( ١ ، – ١ ) يكون :

٢ × ١ × ( – ١ ) + ص/ (( ١ )$^{٢}$ + أ ) + ٢ ب × ١ = ٠ .

و منها : ص/ ( ١ + أ ) = ٢ – ٢ ب ، و بالتعويض من (١) ينتج :

ب ص/ = ٢ – ٢ ب (٢)

، ٢ ص + ٢ س ص/ + ٢ س ص/ + س$^{٢}$ ص// + أ ص// + ٢ ب = ٠ .

∴ ٢ ص + ٤ س ص/ + ص// ( س$^{٢}$ + أ ) + ٢ ب = ٠ . (٣)

، ∵ النقطة ( ١ ، – ١ ) نقطة انقلاب للمنحنى

∴ عند النقطة ( ١ ، – ١ ) يكون : ص// = ٠ .

∴ من (٣) ينتج : ٢ × ( – ١ ) + ٤ × ١ × ص/ + ٢ ب = ٠ .

∴ – ٢ + ٤ ص/ + ٢ ب = ٠ . ، بالضرب × ب ينتج :

∴ – ٢ ب + ٤ ب ص/ + ٢ ب$^{٢}$ = ٠ . و بالتعويض من (٢) ينتج :

– ٢ ب + ٤ × ( ٢ – ٢ ب ) × ب + ٢ ب$^{٢}$ = ٠ . و منها :

ب$^{٢}$ – ٥ ب + ٤ = ٠ . ∴ ( ب – ١ ) ( ب – ٤ ) = ٠ .

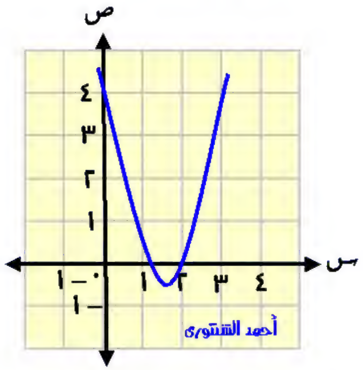
∴ ب = ١ و بالتعويض من (١) ينتج : أ = صفر

أو : ب = ٤ و بالتعويض من (١) ينتج : أ = ٣

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى :

**(١٣)** د ( ٠ ) = ٤ ، د ( ٣ ) = ٤ ، د/(س) < ٠ لكل س < ٢ ، د/(س) > ٠ لكل س > ٢ ، د//(س) > ٠ .

الحل




∵ د ( ٠ ) = ٤ ، د ( ٣ ) = ٤

∴ النقطتين ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٣ ، ٤ ) تقعان على المنحنى

، ∵ د/(س) < ٠ لكل س < ٢

∴ د متناقصة على ] – ∞ ، ٢ ]

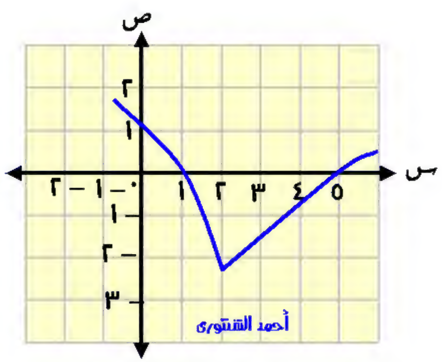
، ∵ د/(س) > ٠ لكل س > ٢

∴ د متزايدة على [ ٢ ، ∞ [

، ∵ د//(س) > ٠ . ∴ المنحنى محدب لأسفل

**(١٤)** د ( ١ ) = د ( ٥ ) = ٠ ، د/(س) < ٠ لكل س < ٣ ، د/(س) > ٠ لكل س > ٣ ، د//(س) < ٠ لكل س ≠ ٣

الحل




∵ د ( ١ ) = د ( ٥ ) = ٠ .

∴ النقطتين ( ١ ، ٠ ) ، ( ٥ ، ٠ ) تقعان على المنحنى

، ∵ د/(س) < ٠ لكل س < ٣

∴ د متناقصة على ] – ∞ ، ٣ ]

، ∵ د/(س) > ٠ لكل س > ٣

∴ د متزايدة على [ ٣ ، ∞ [

، ∵ د″ ( س ) > ٠ لكل س ≠ ٣ ∴ المنحنى محدب لأعلى لكل س ≠ ٣

**(١٥)** د ( −١ ) = ٢ د ( ٠ ) = ٤ ، د ( ١ ) = ٠ ،

د ( −١ ) = د ( ١ ) = ١ ، د″ ( س ) > ٠ .

لكل س > ٠ ، د″ ( س ) > ٠ لكل س < ٠ .

**الحل**

∵ د ( −١ ) = ٢ د ( ٠ ) = ٤

∴ د ( −١ ) = ٤ ، د ( ٠ ) = ٢

∴ النقطتين ( −١ ، ٤ ) ، ( ٠ ، ٢ )

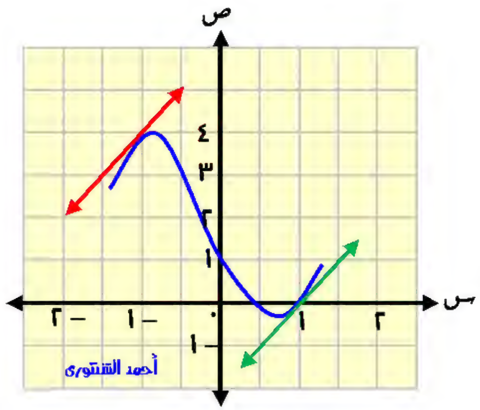
تقعان على المنحنى

، ∵ د ( ١ ) = ٠

∴ النقطتين ( ٠ ، ٤ ) تقع على المنحنى

، ∵ د ( −١ ) = د ( ١ ) = ١

∴ المماس للمنحنى عند : س = ١ ،




عند س = −١ يصنعان زاوية قياسها $\frac{1}{4}\pi$ " متوازيان "

، ∵ د″ ( س ) > ٠ لكل س > ٠ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى ] −∞ ، ٠ [

، ∵ د′ ( س ) > ٠ لكل س > ٠ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] ٠ ، ∞ [

**(١٦)** د ( ٣ ) = ٤ ، عندما : س > ٣ فإن : د′ ( س ) > ٠ ،

د″ ( س ) > ٠ ، عندما : س > ٣ فإن : د′ ( س ) > ٠ .

، د″ ( س ) > ٠ .

**الحل**

∵ د ( ٣ ) = ٤ ∴ النقطة ( ٣ ، ٤ ) تقع على المنحنى

، ∵ عندما : س > ٣ فإن : د′ ( س ) > ٠ ، د″ ( س ) > ٠ .

∴ المنحنى متزايد على ] −∞ ، ٣ [

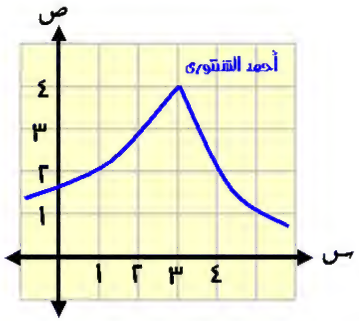
، محدب لأعلى فى ] −∞ ، ٣ [

، ∵ عندما : س > ٣ فإن :

د′ ( س ) > ٠ ، د″ ( س ) > ٠ .

∴ المنحنى متناقص على ] −∞ ، ٣ [

، محدب لأعلى فى ] −∞ ، ٣ [




ادرس تغيرات الدالة د و ارسم الشكل العام لمنحناها فى كل مما يأتى :

**(١٧)** د ( س ) = س² − ٦ س + ٥

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د ( س ) = س² − ٦ س + ٥

∴ د′ ( س ) = ٢ س − ٦ = ٢ ( س − ٣ ) ، د″ ( س ) = ٢

للدالة نقط حرجة عندما : د′ ( س ) = ٢ ( س − ٣ ) = ٠ .

أى عندما : س = ٣ ، و تكون د متناقصة فى ] −∞ ، ٣ [

، و متزايدة فى ] ٣ ، ∞ [ ، ( ٣ ، −٤ ) نقطة قيمة صغرى محلية

، د″ ( س ) > ٠ فى ] −∞ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، لاحظ الجدول التالى :

| س | −∞ ٣ ∞ |
|---|---|
| إشارة د′ ( س ) | − − ٠ + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ ↗ |
| إشارة د″ ( س ) | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل |
| ص | −٤ |
| | قيمة صغرى محلية |

بعض النقط الاضافية :

بوضع : د ( س ) = س$^{2}$ − ٦ س + ٥ = ٠

∴ ( س − ١ ) ( س − ٥ ) = ٠

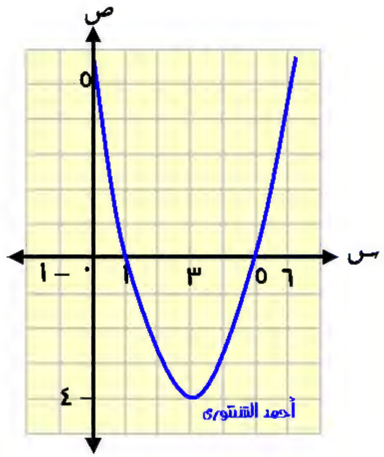
∴ س = ١ ، س = ٥

، عندما : س = ١ فإن : د ( س ) = ٠

، عندما : س = ٥ فإن : د ( س ) = ٠

، عندما : س = ٠ فإن : د ( س ) = ٥

، عندما : س = ٦ فإن : د ( س ) = ٥




**(١٨)** د ( س ) = ٣ − س$^{2}$

الحل

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، زوجية أى متماثلة حول محور الصادات

∵ د ( س ) = ٣ − س$^{2}$ ∴ د$'$ ( س ) = − ٢ س ، د$''$ ( س ) = − ٢

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$ ( س ) = − ٢ س = ٠

أى عندما : س = ٠ ، و تكون د متزايدة فى ] − ∞ ، ٠ [ ،

متناقصة فى ] ٠ ، ∞ [ ، ( ٠ ، ٣ ) نقطة قيمة عظمى محلية

، د$''$ ( س ) < ٠ فى ] − ∞ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، لاحظ الجدول التالى :

| س | − ∞ ٠ ∞ |
|---|---|
| إشارة د$'$ (س) | + + ٠ − − |
| سلوك د (س) | ↗ ↘ |
| إشارة د$''$ (س) | − − |
| تحدب منحنى د (س) | لأعلى |
| ص | ٣ |
| | قيمة عظمى محلية |

بعض النقط الاضافية :

عندما : س = ٣ فإن : د ( س ) = − ٦

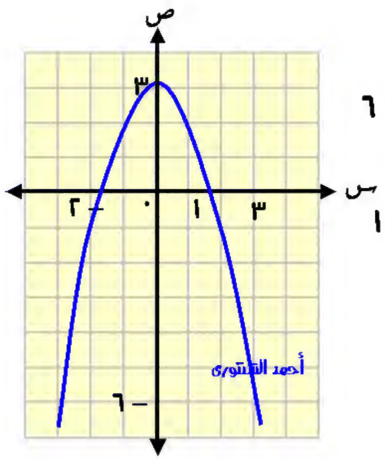
، عندما : س = − ٣ فإن : د ( س ) = − ٦

، عندما : س = ٢ فإن : د ( س ) = − ١

، عندما : س = − ٢ فإن : د ( س ) = − ١

، عندما : س = ١ فإن : د ( س ) = ٢

، عندما : س = − ١ فإن : د ( س ) = ٢




**(١٩)** د ( س ) = س$^{3}$ − ٣ س$^{2}$ + ٣

الحل

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د ( س ) = س$^{3}$ − ٣ س$^{2}$ + ٣

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{2}$ − ٦ س = ٣ س ( س − ٢ )

، د$''$ ( س ) = ٦ س − ٦ = ٦ ( س − ١ )

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$ ( س ) = ٣ س ( س − ٢ ) = ٠

أى عندما : س = ٠ ، س = ٢ ، و تكون د متناقصة فى ] ٠ ، ٢ [

، و متزايدة فى ] − ∞ ، ٠ [ ، ] ٢ ، ∞ [

، ( ٢ ، − ١ ) نقطة قيمة صغرى محلية ، ( ٠ ، ٣ ) نقطة قيمة عظمى محلية

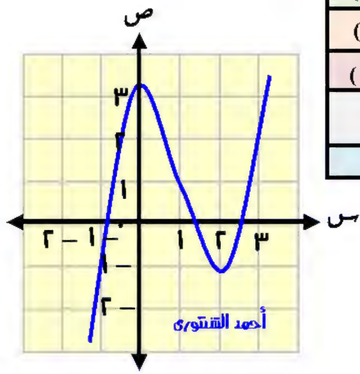
، د$''$ ( س ) = ٦ ( س − ١ ) = ٠ أى عندما : س = ١

، د$''$ ( س ) < ٠ فى ] − ∞ ، ١ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، د$''$ ( س ) > ٠ فى ] ١ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ١ ، ١ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | $-\infty$ | ٠ | | ١ | | ٢ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | + + | ٠ | – – | | – – | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د// ( س ) | – – | | – – | ٠ | + + | | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | ٣ | | ١ | | –١ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = – ١ فإن : د ( س ) = – ١

، عندما : س = ٣ فإن : د ( س ) = ٣

**(٢٠)** د ( س ) = $\frac{1}{3}$ س$^{3}$ – س + ٢

الحل

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د ( س ) = $\frac{1}{3}$ س$^{3}$ – س + ٢

∴ د/ ( س ) = س$^{2}$ – ١ = ( س + ١ ) ( س – ١ ) ، د// ( س ) = ٢ س

للدالة نقط حرجة عندما : د/ ( س ) = ( س + ١ ) ( س – ١ ) = ٠ .

أى عندما : س = – ١ ، س = ١ ، و تكون د متناقصة فى ] – ١ ، ١ [

، و متزايدة فى ] – ∞ ، – ١ [ ، ] ١ ، ∞ [

، ( – ١ ، $\frac{8}{3}$ ) نقطة قيمة عظمى محلية ، ( ١ ، $\frac{4}{3}$ ) نقطة قيمة صغرى محلية

، د// ( س ) = ٢ س = ٠ أى عندما : س = ٠ .

، د// ( س ) < ٠ فى ] – ∞ ، ٠ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، د// ( س ) > ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ٢ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | $-\infty$ | –١ | | ٠ | | ١ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | + + | ٠ | – – | | – – | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د// ( س ) | – – | | – – | ٠ | + + | | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | $\frac{8}{3}$ | | ٢ | | $\frac{4}{3}$ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |

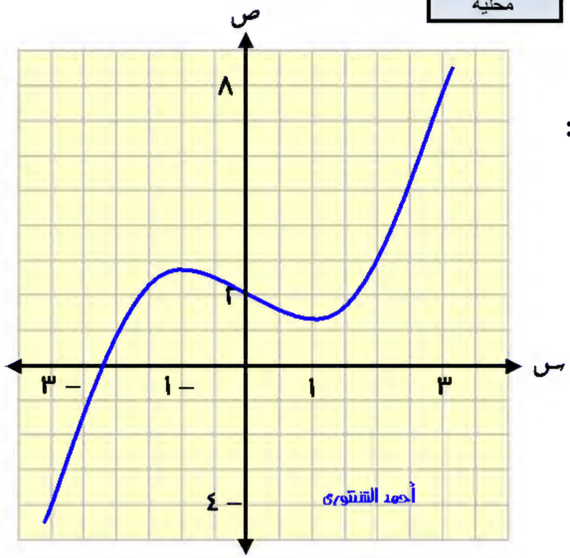
بعض النقط الاضافية :

عندما : س = – ٣ فإن :

د ( س ) = – ٤

، عندما : س = ٣ فإن :

د ( س ) = ٨




**(٢١)** د ( س ) = $\frac{1}{8}$ س$^{3}$ – $\frac{3}{2}$ س + ١

الحل

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د ( س ) = $\frac{1}{8}$ س$^{3}$ – $\frac{3}{2}$ س + ١

∴ د/ ( س ) = $\frac{3}{8}$ س$^{2}$ – $\frac{3}{2}$ = $\frac{3}{8}$ ( س$^{2}$ – ٤ ) = $\frac{3}{8}$ ( س + ٢ ) ( س – ٢ )

، د$''$( س ) = $\frac{٣}{٤}$ س

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$( س ) = $\frac{٣}{٨}$ ( س + ٢ ) ( س − ٢ ) = ٠ .

أى عندما : س = − ٢ ، س = ٢ ، و تكون د متناقصة فى ] − ٢ ، ٢ [

، و متزايدة فى ] − ∞ ، − ٢ [ ، ] ٢ ، ∞ [

، ( − ٢ ، ٣ ) نقطة قيمة عظمى محلية ، ( ٢ ، − ١ ) نقطة قيمة صغرى محلية

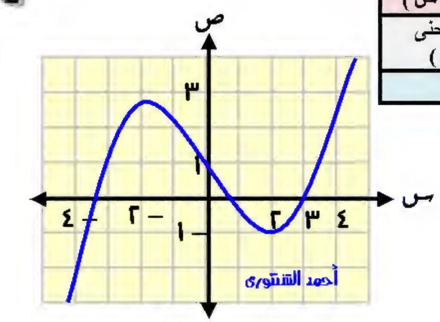
، د$''$( س ) = $\frac{٣}{٤}$ س = ٠ أى عندما : س = ٠ .

، د$''$( س ) < ٠ فى ] − ∞ ، ٠ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، د$''$( س ) > ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ١ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | − ∞ | − ٢ | | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | + + | ٠ | − − | | − − | ٠ | + + |
| سلوك د( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د$''$( س ) | − − | | − − | ٠ | + + | | + + |
| تحدب منحنى د( س ) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | ٣ | | ١ | | − ١ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = − ٤ فإن : د( س ) = ١

، عندما : س = ٤ فإن : د( س ) = ٣

**(٢٢)** د( س ) = − س ( س − ٣ )$^{٢}$

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د( س ) = − س ( س − ٣ )$^{٢}$ = − س$^{٣}$ + ٦ س$^{٢}$ − ٩ س

∴ د$'$( س ) = − ٣ س$^{٢}$ + ١٢ س − ٩ = − ٣ ( س − ١ ) ( س − ٣ )

، د$''$( س ) = − ٦ س + ١٢ = − ٦ ( س − ٢ )

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$( س ) = − ٣ ( س − ١ ) ( س − ٣ ) = ٠ .

أى عندما : س = ١ ، س = ٣ ، و تكون د متزايدة فى ] ١ ، ٣ [

، و متناقصة فى ] − ∞ ، ١ [ ، ] ٣ ، ∞ [

، ( ١ ، − ٤ ) نقطة قيمة صغرى محلية ، ( ٣ ، ٠ ) نقطة قيمة عظمى محلية

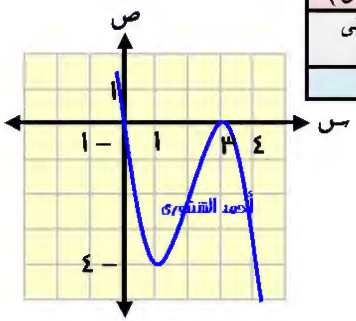
، د$''$( س ) = − ٦ ( س − ٢ ) = ٠ أى عندما : س = ٢

، د$''$( س ) > ٠ فى ] − ∞ ، ٢ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، د$''$( س ) < ٠ فى ] ٢ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة ( ٢ ، − ٢ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | − ∞ | ١ | | ٢ | | ٣ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | − − | ٠ | + + | | + + | ٠ | − − |
| سلوك د( س ) | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |
| إشارة د$''$( س ) | + + | | + + | ٠ | − − | | − − |
| تحدب منحنى د( س ) | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | | لأعلى |
| ص | | − ٤ | | ٢ | | ٠ | |
| | | قيمة صغرى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة عظمى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = ٤ فإن : د( س ) = − ٤

، عندما : س = ٠ فإن : د( س ) = ٠ .

**(٢٣)** د(س) = (٢ − س)(س + ١)$^{٢}$

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د(س) = (٢ − س)(س + ١)$^{٢}$ = (٢ − س)(س$^{٢}$ + ٢س + ١)

= − س$^{٣}$ + ٣س + ٢

∴ د$'$(س) = − ٣س$^{٢}$ + ٣ = − ٣(س + ١)(س − ١)

، د$''$(س) = − ٦س

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$(س) = − ٣(س + ١)(س − ١) = ٠ .

أى عندما : س = − ١ ، س = ١ ، و تكون د متزايدة فى ]− ١ ، ١[

، و متناقصة فى ]− ∞ ، − ١[ ، ]١ ، ∞[

، (− ١ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية ، (١ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية

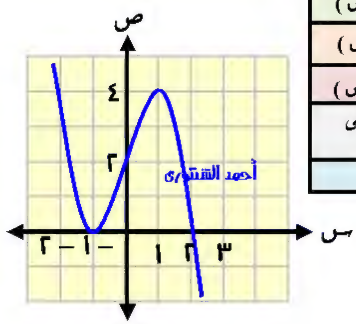
، د$''$(س) = − ٦س = ٠ أى عندما : س = ٠ .

، د$''$(س) $>$ ٠ فى ]− ∞ ، ٠[ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، د$''$(س) $<$ ٠ فى ]٠ ، ∞[ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة (٠ ، ٢) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | − ∞ | − ١ | | ٠ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$(س) | − − | ٠ | + | | + | ٠ | − − |
| سلوك د(س) | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |
| إشارة د$''$(س) | + + | | + + | ٠ | − − | | − − |
| تحدب منحنى د(س) | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | | لأعلى |
| ص | | ٠ | | ٢ | | ٤ | |
| | | قيمة صغرى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة عظمى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = − ٢ فإن : د(س) = ٤

، عندما : س = ٢ فإن : د(س) = ٠ .

**(٢٤)** د(س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤)(س − ٢)$^{٢}$

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د(س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤)(س$^{٢}$ − ٤س + ٤)

= $\frac{١}{٨}$ (س$^{٣}$ − ١٢س + ١٦)

∴ د$'$(س) = $\frac{٣}{٨}$ س$^{٢}$ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٨}$ (س$^{٢}$ − ٤) = $\frac{٣}{٨}$ (س + ٢)(س − ٢)

، د$''$(س) = $\frac{٣}{٤}$ س

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$(س) = $\frac{٣}{٨}$ (س + ٢)(س − ٢) = ٠ .

أى عندما : س = − ٢ ، س = ٢ ، و تكون د متناقصة فى ]− ٢ ، ٢[

، و متزايدة فى ]− ∞ ، − ٢[ ، ]٢ ، ∞[

، (− ٢ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية ، (٢ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية

، د$''$(س) = $\frac{٣}{٤}$ س = ٠ أى عندما : س = ٠ .

، د$''$(س) $<$ ٠ فى ]− ∞ ، ٠[ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، د$''$(س) $>$ ٠ فى ]٠ ، ∞[ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة (٠ ، ٢) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول المقابل :

| س | − ∞ | − ٢ | | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$(س) | + + | ٠ | − − | | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د$''$(س) | − − | | − − | ٠ | + + | | + + |
| تحدب منحنى د(س) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | ٤ | | ٢ | | ٠ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |

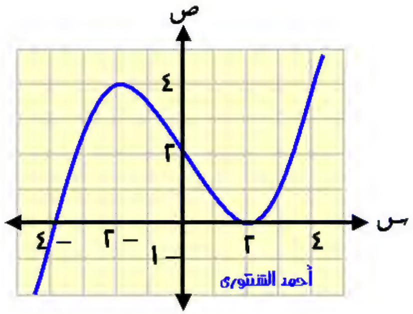
بعض النقط الاضافية :

عندما : س = – ٤ فإن :

د ( س ) = ٠ .

، عندما : س = ٤ فإن :

د ( س ) = ٤




**(٢٥)** د ( س ) = { س$^{3}$ – ٣ س$^{2}$ عندما س > ٠ . ، س$^{2}$ – ٢ س عندما س ≤ ٠ . }

## الحل

∵ الدالة د متعددة التعريف مجالها ح

، د ( ٠$^{+}$ ) = د ( ٠$^{-}$ ) = د ( ٠ ) = ٠ .

∴ الدالة د متصلة عند : س = ٠ .

، ∵ د$^{/}$ ( ٠$^{+}$ ) = نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) [ د ( ٠ + هـ ) – د ( ٠ ) ] ÷ هـ

= نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) [ ( ٠ + هـ )$^{3}$ – ٣ ( ٠ + هـ )$^{2}$ – ٠ ] ÷ هـ

= نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) ( هـ$^{2}$ – ٣ هـ ) = صفر

، ∵ د$^{/}$ ( ٠$^{-}$ ) = نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) [ د ( ٠ + هـ ) – د ( ٠ ) ] ÷ هـ

= نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) [ ( ٠ + هـ )$^{2}$ – ٢ ( ٠ + هـ ) – ٠ ] ÷ هـ

= نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) ( هـ – ٢ ) = – ٢

∴ د$^{/}$ ( ٠$^{+}$ ) ≠ د$^{/}$ ( ٠$^{-}$ ) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : س = ٠ .

∴ د$^{/}$ ( س ) = { ٣ س$^{2}$ – ٦ س عندما س > ٠ . ، غير موجودة عندما س = ٠ . ، ٢ س – ٢ عندما س < ٠ . }

∴ لا يوجد مماس للدالة عند : س = ٠ .

∴ د$^{//}$ ( س ) = { ٦ س – ٦ عندما س > ٠ . ، غير موجودة عندما س = ٠ . ، ٢ عندما س < ٠ . }

بوضع : د$^{/}$ ( س ) = ٠ يكون :

عندما : س > ٠ فإن : ٣ س$^{2}$ – ٦ س = ٣ س ( س – ٢ ) = ٠ .

∴ س = ٠ ∉ ] ٠ ، ∞ [ مرفوض ، س = ٢ ∈ ] ٠ ، ∞ [

عندما : س < ٠ فإن : ٢ س – ٢ = ٢ ( س – ١ ) = ٠ .

∴ س = ١ ∉ ] – ∞ ، ٠ [ مرفوض

∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٠ ، س = ٢

، بدراسة اشارة د$^{/}$ ( س ) عند : س = ٠ ، س = ٢ نجد :

د متناقصة على ] – ∞ ، ٠ [ ، د متناقصة على ] ٠ ، ٢ [ ، و تكون : النقطة ( ٠ ، ٠ ) ليست نقطة قيمة عظمى محلية أو نقطة قيمة صغرى محلية

، متزايدة فى ] ٢ ، ∞ [ ، ( ٢ ، – ٤ ) صغرى محلية

بوضع : د$^{//}$ ( س ) = ٠ نجد عندما : س > ٠ .

فإن : ٦ س – ٦ = ٦ ( س – ١ ) = ٠ ∴ س = ١ ∈ ] ٠ ، ∞ [

عندما : س < ٠ فإن : د$^{//}$ ( س ) ≠ ٠ .

، ∵ د$^{//}$ ( س ) غير موجودة عند : س = ٠ . ∴ بدراسة اشارة د$^{//}$ ( س )

عند : س = ٠ ، س = ١ نجد : منحنى الدالة محدب لأسفل

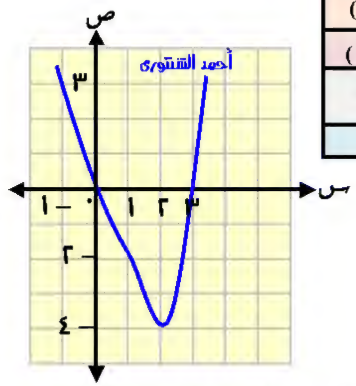
فى ] – ∞ ، ٠ [ ، ] ١ ، ∞ [

، محدب لأعلى فى ] ٠ ، ١ [ ، النقطة ( ١ ، – ٢ ) نقطة انقلاب

و لا توجد نقطة انقلاب عند : ( ٠ ، ٠ ) حيث : لا يوجد مماس للدالة عند : س = ٠

، لاحظ الجدول التالى :

| س | -∞ | ٠ | | ١ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/(س) | - - | غير موجودة | | - - | | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↘ | | | ↘ | | | ↗ |
| إشارة د//(س) | + + | | - - | ٠ | | + + | |
| تحدب منحنى د(س) | لأسفل | غير موجودة | لأعلى | | | لأسفل | |
| ص | | ٠ | | -٢ | | -٤ | |
| | | | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = -١ فإن : د(س) = ٣

عندما : س > ٠ ، د(س) = ٠ فإن : س = ٣

**(٢٥)** د(س) = س | س - ٤ |

**الحل**

د(س) = { س² - ٤س عندما س ≥ ٤ ؛ ٤س - س² عندما س < ٤ }

∵ الدالة د متعددة التعريف مجالها ح

، د(٤⁺) = د(٤⁻) = د(٤) = ٠ ∴ الدالة د متصلة عند : س = ٠

، ∵ د/(٤⁺) = نهـا (هـ ← ٠⁺) [ د(٤ + هـ) - د(٤) ] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁺) [ (٤ + هـ)² - ٤(٤ + هـ) - ٠ ] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁺) ( هـ + ٤ ) = ٤

، ∵ د/(٤⁻) = نهـا (هـ ← ٠⁻) [ د(٤ + هـ) - د(٤) ] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁻) [ ٤(٤ + هـ) - (٤ + هـ)² - ٠ ] / هـ

= نهـا (هـ ← ٠⁻) ( هـ - ٤ هـ ) = -٤

∴ د/(٤⁺) ≠ د/(٤⁻) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : س = ٤

∴ د/(س) = { ٢س - ٤ عندما س > ٤ ؛ غير موجودة عندما س = ٤ ؛ ٤ - ٢س عندما س < ٤ }

∴ لا يوجد مماس للدالة عند : س = ٤

∴ د//(س) = { ٢ عندما س > ٤ ؛ غير موجودة عندما س = ٤ ؛ -٢ عندما س < ٤ }

بوضع : د/(س) = ٠ يكون :

عندما : س > ٠ فإن : ٢س - ٤ = ٢(س - ٢) = ٠

∴ س = ٢ ∉ ]٤ ، ∞[ مرفوض

عندما : س < ٠ فإن : ٤ - ٢س = -٢(س - ٢) = ٠

∴ س = ٢ ∈ ]-∞ ، ٤[ ∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٢ ، س = ٤

، بدراسة اشارة د/(س) عند : س = ٢ ، س = ٤ نجد :

∴ د متزايدة على ]-∞ ، ٢[ ، متناقصة على ]٢ ، ٤[ ،

متزايدة على ]٢ ، ∞[ و تكون : (٢ ، ٤) عظمى محلية

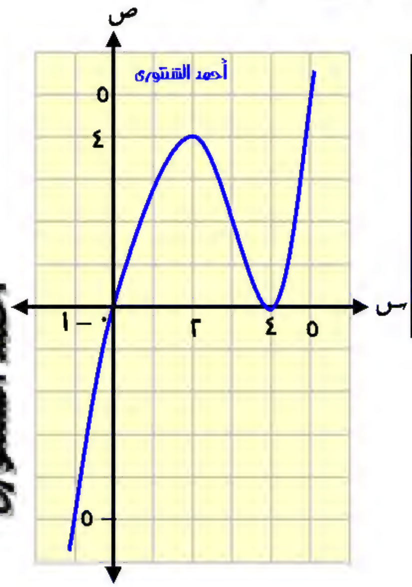
، النقطة (٤ ، ٠) ليست نقطة قيمة عظمى محلية أو نقطة قيمة صغرى محلية

، ∵ د//(س) ≠ ٠ ، د//(س) غير موجودة عند : س = ٤

∴ بدراسة اشارة د//( س ) عند : س = ٤ نجد : منحنى الدالة محدب لأعلى فى ] − ∞ ، ٤ [ ، محدب لأسفل فى ] ٤ ، ∞ [ ، النقطة ( ٤ ، ٠ ) ليست نقطة انقلاب حيث : لا يوجد مماس للدالة عند : س = ٤

، لاحظ الجدول التالى :

| س | − ∞ | | ٢ | | ٤ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/( س ) | | + + | ٠ | − − | غير موجودة | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |
| إشارة د//( س ) | | − − | | | غير موجودة | + + | |
| تحدب منحنى د (س) | | لأعلى | | | | لأسفل | |
| ص | | | ٤ | | ٠ | | |
| | | | قيمة عظمى محلية | | | | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = ٠ فإن : د ( س ) = ٠

عندما : س = ٥ فإن : س = ٥

عندما : س = −١ فإن : س = −٥



## ٣ − ٤ تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى

### النمذجة الرياضية :

هى صياغة مشكلة ما وفق علاقات رياضية يطلق عليها النموذج الرياضى و يسهم حساب التفاضل فى حل النموذج الرياضى لمعظم مشكلات الحياة العملية حين يكون الهدف الحصول على أكبر قيمة أو أصغر قيمة لمتغير ما فى إطار القيم القصوى المحلية و القيم القصوى المطلقة و تكون خطوات الحل كما يلى :

(١) قراءة المسألة بدقة و فهم مضمونها

(٢) تحديد المتغيرات و وضع رموز لها و رسم شكل لبيان ذلك " إن أمكن "

(٣) تحديد المتغير المطلوب ايجاد قيمته العظمى أو الصغرى و كتابة الصيغة التى تربطه بالمتغيرات الأخرى

(٤) استخدام المعلومات المعطاة فى المسألة لاختصار المتغيرات لمتغير واحد مستقل فقط

(٥) التعبير عن المتغير المطلوب بمعادلة تربطه بالمتغير المستقل الوحيد و ليكن س

(٦) تحديد مجموعة قيم س المحتملة

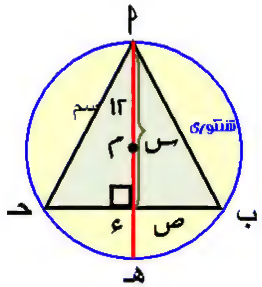
(٧) إذا كانت مجموعة القيم المحتملة فترة مغلقة نبحث عن القيم العظمى المحلية أو الصغرى المحلية عند النقاط الحرجة و القيم القصوى عند اطراف الفترة

(٨) إذا كانت مجموعة القيم المحتملة فترة مفتوحة نبحث عن النقاط الحرجة و نستخدم اختبارات المشتقة الأولى أو الثانية للتأكد ما تؤول إليه القيمة المطلوبة

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٨٣

**أوجد أكبر مساحة لمثلث متساوى الساقين يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم**

الحل




من الشكل المقابل : △ ٵ ب حـ فيه : ٵ ب = ٵ حـ

، ٵ ء ⊥ ب حـ ∴ ب ء = حـ ء

و بفرض أن : ب ء = حـ ء = ص ، ٵ ء = س

∵ ٵ م = نق " للدائرة " = ١٢ سم

∴ هـ ء = ( ٢٤ − س ) سم

∵ ٵ هـ ∩ ب حـ = { ء } ∴ ب ء × حـ ء = ٵ ء × ء هـ

∴ ص × ص = س ( ٢٤ − س ) ∴ ص = $\sqrt{\text{٢٤ س − س}^{2}}$ (١)

∴ مساحة △ ٵ ب حـ = د ( س ) = $\frac{1}{2}$ ب حـ × ٵ ء

∴ د ( س ) = $\frac{1}{2}$ × ٢ س × $\sqrt{\text{٢٤ س − س}^{2}}$ = س ( ٢٤ س − س$^{2}$ )$^{\frac{1}{2}}$

∴ د$'$ ( س ) = ( ٢٤ س − س$^{2}$ )$^{\frac{1}{2}}$ + س × $\frac{1}{2}$ ( ٢٤ س − س$^{2}$ )$^{-\frac{1}{2}}$ ( ٢٤ − ٢ س )

= ( ٢٤ س − س$^{2}$ )$^{-\frac{1}{2}}$ ( ٢٤ س − س$^{2}$ + ١٢ س − س$^{2}$ )

= − ٢ س ( ٢٤ س − س$^{2}$ )$^{-\frac{1}{2}}$ ( س − ١٨ )

= $\frac{\text{− ٢ س ( س − ١٨ )}}{\sqrt{\text{٢٤ س − س}^{2}}}$

| س | −∞ | ١٨ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | + + | ٠ | − − |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ |

، د$'$ ( س ) = ٠

عندما : − ٢ س ( س − ١٨ ) = ٠

أى عندما : س = ٠ مرفوض ، س = ١٨

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

عند : س = ١٨ تكون مساحة △ ٵ ب حـ أكبر ما يمكن

من (١) ينتج : ص = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

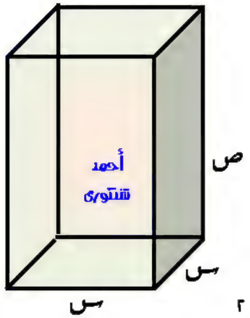
∴ عند : ٵ ء = ١٨ سم ، ب حـ = ١٢ $\sqrt{٣}$ سم

∴ مساحة △ ٵ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ $\sqrt{٣}$ × ١٨ = ١٠٨ $\sqrt{٣}$ سم$^{2}$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٨٤

**خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ متراً مكعباً ، و قاعدته مربعة يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازلة يتكلف القاع ٥٠ جنيهاً لكل متر مربع و يتكلف الغطاء ٢٠ جنيهاً لكل متر مربع ، كما تتكلف الجوانب ٣٠ جنيهاً لكل متر مربع ، أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن**

الحل




نفرض أن : أبعاد الخزان من الداخل هى :

س ، س ، ص متر " القاعدة مربعة "

∵ سعة الخزان = ٢٥٢ م$^{3}$

∴ حجم الخزان = ٢٥٢ م$^{3}$ ∴ س$^{2}$ ص = ٢٥٢ م$^{3}$

∴ ص = $\frac{٢٥٢}{\text{س}^{2}}$ = ٢٥٢ س$^{-2}$ (١)

∵ المساحة الكلية للخزان من الداخل = ٤ س ص + ٢ س$^{2}$

∴ التكلفة الكلية = ٣٠ × ٤ س ص + ٥٠ س$^{2}$ + ٢٠ س$^{2}$

∴ التكلفة الكلية = د ( س ) = ١٢٠ س × ٢٥٢ س$^{-2}$ + ٧٠ س$^{2}$

= ٣٠٢٤٠ س$^{-1}$ + ٧٠ س$^{2}$

∴ د$'$ ( س ) = − ٣٠٢٤٠ س$^{-2}$ + ١٤٠ س = − ٣٠٢٤٠ س$^{-2}$ ( س$^{3}$ − ٢١٦ )

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : ٣٠٢٤٠ س$^{-2}$ ( س$^{3}$ − ٢١٦ ) = ٠

أى عندما : س = ٦

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

| س | ∞ | ٦ | -∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د'(س) | + + | ٠ | - - |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ |

عند : س = ٦

تكون التكلفة أقل ما يمكن

∴ س = ٦ م ، من (١) ينتج : ص = ٧ م

∴ أبعاد الخزان التى التكلفة أصغر ما يمكن هى : ٦ م ، ٦ م ، ٧ م

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٨٥

فى مستوى احداثى متعامد رسم ←أ ب→ يمر بالنقطة ( ٣ ، ٢ ) و يقطع محور الاحداثيات فى النقطة أ و النقطة ب ، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ و ب تساوى ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل ( ٠ ، ٠ )

### الحل

∵ المستقيم يمر بالنقط : ( ٠ ، أ ) ، ( ب ، ٠ ) ، ( ٣ ، ٢ )

∴ ميل المستقيم = -أ/ب = (٢ - أ)/٣

و منها : ب = -٣أ/(٢ - أ) (١)

∴ مساحة △ أ ب و = ١/٢ ب و × أ و = ١/٢ ب × أ

∴ د(أ) = -٣أ/(٢ - أ) × أ = -٣/٢ أ² (٢ - أ)^-١

∴ د'(أ) = -٣ أ (٢ - أ)^-١ - ٣/٢ أ² (٢ - أ)^-٢

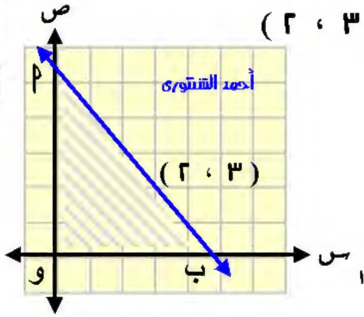
= -٣/٢ أ (٢ - أ)^-٢ (٤ - ٢أ + أ) = ٣ أ (أ - ٤) / ٢ (٢ - أ)²

، د'(أ) = ٠

عندما : ٣ أ (أ - ٤) = ٠

أى عندما : أ = ٠ مرفوض

، أ = ٤




| س | ∞ | ٤ | -∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د'(س) | + + | ٠ | - - |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ |

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

∴ عند : أ = ٤ تكون مساحة △ أ ب حـ أصغر ما يمكن

∴ أ = ٤ وحدة طول ، بالتعويض فى (١) ينتج : ب = ٦ وحدة طول

∴ مساحة △ أ ب و = ١/٢ ب و × أ و = ١/٢ ب × أ

= ١/٢ × ٤ × ٦ = ١٢ وحدة مربعة

## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٨٥

إذا كان محيط قطاع دائرى = ١٢ سم ، أوجد قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن

### الحل

بفرض أن طول نصف قطر دائرة القطاع = نق ، طول قوس القطاع = ل

∵ محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل

∴ ٢ نق + ل = ١٢ ∴ ل = ١٢ - ٢ نق (١)

∵ مساحة القطاع الدائرى = ١/٢ ل نق

∴ مساحة القطاع الدائرى = د(نق) = ١/٢ (١٢ - ٢ نق) نق = ٦ نق - نق²

∴ د'(نق) = ٦ - ٢ نق = -٢ (نق - ٣)

، د''(نق) = -٢ < ٠ لكل قيم نق

، د'(نق) = ٠ عندما : -٢ (نق - ٣) = ٠ أى عندما : نق = ٣

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د''(٣) < ٠

∴ عندما : نق = ٣ سم تكون مساحة القطاع الدائرى أكبر ما يمكن

، من (١) ينتج : ل = ٦ سم ، ∵ هـ = ل/نق

∴ قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن = ٦/٣ = ٢ ء

# حل تمارين ( ٣ – ٤ ) صفحة ٨٦ بالكتاب المدرسى

**(١)** عددان مجموعهما ٣٠ ، و حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ، أوجد العددين

**الحل**

بفرض أن العددان هما : س ، ٣٠ – س

∴ حاصل ضرب العددين = د ( س ) = س ( ٣٠ – س ) = ٣٠ س – س$^{٢}$

∴ د$'$ ( س ) = ٣٠ – ٢ س ، د$''$ ( س ) = – ٢ < ٠ لكل قيم س

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : ٣٠ – ٢ س = ٠ أى عندما : س = ١٥

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( ١٥ ) = – ٢ < ٠

∴ عندما : س = ١٥ يكون حاصل ضرب العددين أكبر ما يمكن

∴ العددان هما : ١٥ ، ١٥

**(٢)** عددان صحيحان موجبان مجموعهما ٥ ، و مجموع مكعب أصغرهما و ضعف مربع الآخر أصغر ما يمكن ، أوجد العددين

**الحل**

بفرض أن العددان هما : س ، ٥ – س

∴ مجموع مكعب العدد الأصغر و ضعف مربع العدد الأكبر = د ( س )

= س$^{٣}$ + ٢ ( ٥ – س )$^{٢}$ = س$^{٣}$ + ٥٠ – ٢٠ س + ٢ س$^{٢}$

و دالة فى س حيث : س ∈ [ ٠ ، ٥ ]

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ – ٢٠ + ٤ س = ( س – ٢ ) ( ٣ س + ١٠ )

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : س = ٢ ∈ [ ٠ ، ٥ ] ، س = – $\frac{١٠}{٣}$ ∉ [ ٠ ، ٥ ]

، ∵ د ( ٠ ) = ٥٠ ، د ( ٢ ) = ٣٦ ، د ( ٥ ) = ١٢٥

∴ يكون مجموع مكعب العدد الأصغر و ضعف مربع العدد الأكبر أصغر ما يمكن

عندما : س = ٢ ∴ العددان هما : ٢ ، ٣

## حل آخر

بفرض أن العددان هما : س ، ٥ – س

∴ مجموع مكعب العدد الأصغر و ضعف مربع العدد الأكبر = د ( س )

= س$^{٣}$ + ٢ ( ٥ – س )$^{٢}$ = س$^{٣}$ + ٥٠ – ٢٠ س + ٢ س$^{٢}$

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ – ٢٠ + ٤ س = ( س – ٢ ) ( ٣ س + ١٠ )

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : س = ٢ ، س = – $\frac{١٠}{٣}$ مرفوض لأن العدد موجب

، ∵ د$''$ ( س ) = ٦ س + ٤

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( ٢ ) = ٦ × ٢ + ٤ = ١٦ > ٠

∴ يكون مجموع مكعب العدد الأصغر و ضعف مربع العدد الأكبر أصغر ما يمكن

عندما : س = ٢ ∴ العددان هما : ٢ ، ٣

## حل ثالث

بفرض أن العددان هما : س ، ٥ – س

∴ مجموع مكعب العدد الأصغر و ضعف مربع العدد الأكبر = د ( س )

= س$^{٣}$ + ٢ ( ٥ – س )$^{٢}$ = س$^{٣}$ + ٥٠ – ٢٠ س + ٢ س$^{٢}$

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ – ٢٠ + ٤ س = ( س – ٢ ) ( ٣ س + ١٠ )

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : س = ٢ ، س = – $\frac{١٠}{٣}$ مرفوض لأن العدد موجب

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

| س | – ∞ | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | – – | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ |

∴ يكون مجموع مكعب العدد الأصغر و ضعف مربع العدد الأكبر أصغر ما يمكن

عندما : س = ٢ ∴ العددان هما : ٢ ، ٣

**(٣) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف إليه معكوسه الضربى كان الناتج أصغر ما يمكن**

الحل

بفرض أن العدد هو : س ∴ معكوسه الضربى = $\frac{١}{س}$ = س$^{-١}$

∴ العدد مضافاً إليه معكوسه الضربى = د ( س ) = س + س$^{-١}$

∴ د$'$ ( س ) = ١ − س$^{-٢}$ = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$ = $\frac{-\,(س^{٢} - ١)}{س^{٢}}$

، د$''$ ( س ) = ٢ س$^{-٣}$ = $\frac{٢}{س^{٣}}$

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : س$^{٢}$ − ١ = ٠

أى عندما : ( س + ١ ) ( س − ١ ) = ٠

أى عندما : س = − ١ مرفوض لأن العدد موجب ، س = ١

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( ١ ) > ٠

∴ عندما : س = ١ يكون العدد مضافاً إليه معكوسه الضربى أصغر ما يمكن

∴ العدد هو : ١

**(٤) أوجد أكبر مساحة من الأرض مستطيلة الشكل يمكن أن تُحاط بسياج طوله ١٢٠ متراً**

الحل

نفرض أن : بعدى قطعة الأرض هما : س ، ص متر




، ∵ طول السياج = ١٢٠ متراً

∴ محيط قطعة الأرض = ٢ س + ٢ ص = ١٢٠

و منها : ص = ٦٠ − س (١)

∵ مساحة قطعة الأرض = د ( س ) = س ص

= س ( ٦٠ − س ) = ٦٠ س − س$^{٢}$

∴ د$'$ ( س ) = ٦٠ − ٢ س ، د$''$ ( س ) = − ٢ < ٠ لكل قيم س

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : ٦٠ − ٢ س = ٠ أى عندما : س = ٣٠

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( ٣٠ ) > ٠

∴ عندما : س = ٣٠ تكون مساحة قطعة الأرض أكبر ما يمكن

، من (١) ينتج : ص = ٣٠ ∴ بعدى قطعة الأرض هما : ٣٠ ، ٣٠ متر

∴ مساحة قطعة الأرض = ٩٠٠ متراً مربعاً

**(٥) قطاع دائرى محيطه ٣٠ و مساحته أكبر ما يمكن أوجد طول نصف قطر دائرته**

الحل

بفرض أن طول نصف قطر دائرة القطاع = نق ، طول قوس القطاع = ل

∵ محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل

∵ ٢ نق + ل = ٣٠ ∴ ل = ٣٠ − ٢ نق (١)

∵ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق

∴ مساحة القطاع الدائرى = د ( نق ) = $\frac{١}{٢}$ ( ٣٠ − ٢ نق ) نق = ١٥ نق − نق$^{٢}$

∴ د$'$ ( نق ) = ١٥ − ٢ نق ، د$''$ ( نق ) = − ٢ < ٠ لكل قيم نق

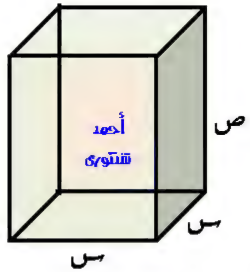
د$'$ ( نق ) = ٠ عندما : ١٥ − ٢ نق = ٠ أى عندما : نق = $\frac{١٥}{٢}$ = ٧,٥

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( ٧,٥ ) > ٠

∴ طول نصف قطر دائرة القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن = ٧,٥ سم

**(٦) علبة على هيئة متوازى مستطيلات ، قاعدتها مربعة الشكل ، إذا كان مجموع جميع أحرفها ٢٤٠ سم ، فأوجد أبعادها و حتى يصير حجمها أكبر ما يمكن**

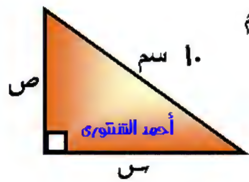
الحل




نفرض أن : أبعاد العلبة هى :
س ، س ، ص متر " القاعدة مربعة "
∵ مجموع جميع أحرف العلبة = ٢٤٠ سم
∴ ٨ س + ٤ ص = ٢٤٠
و منها : ص = ٦٠ − ٢ س (١)
، حجم العلبة = د ( س ) = $\text{س}^{٢}$ ص
= $\text{س}^{٢}$ ( ٦٠ − ٢ س ) = ٦٠ $\text{س}^{٢}$ − ٢ $\text{س}^{٣}$
∴ د/( س ) = ١٢٠ س − ٦ $\text{س}^{٢}$ ، د//( س ) = − ١٢ س
، د/( س ) = ٠ عندما : ١٢٠ س − ٦ $\text{س}^{٢}$ = − ٦ س ( س − ٢٠ ) = ٠
أى عندما : س = ٢٠ اختبار المشتقة الثانية : ∵ د//( ٢٠ ) < ٠
∴ عندما : س = ٢٠ يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن
، من (١) ينتج : ص = ٢٠ ∴ أبعاد العلبة هى : ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم

**(٧) إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية يساوى ١٠ سم ، فأوجد طول كل من ضلعى القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن**

الحل




نفرض أن : طولى ضلعى القائمة هما : س ، ص سم
، ∵ من الشكل المقابل : $\text{س}^{٢}$ + $\text{ص}^{٢}$ = ١٠٠
∴ ص = $\sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}}$ (١)
∵ مساحة المثلث = د ( س ) = ½ س ص
= ½ س $\sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}}$ = ½ س $( ١٠٠ - \text{س}^{٢} )^{\frac{1}{2}}$
∴ د/( س ) = ½ $( ١٠٠ - \text{س}^{٢} )^{\frac{1}{2}}$ + ½ س × ½ $( ١٠٠ - \text{س}^{٢} )^{-\frac{1}{2}}$ ( − ٢ س )
= ½ $( ١٠٠ - \text{س}^{٢} )^{-\frac{1}{2}}$ ( ١٠٠ − $\text{س}^{٢}$ − $\text{س}^{٢}$ )

∴ د/( س ) = − $( ١٠٠ - \text{س}^{٢} )^{-\frac{1}{2}}$ ( $\text{س}^{٢}$ − ٥٠ ) = $\frac{-( \text{س}^{٢} - ٥٠ )}{\sqrt{١٠٠ - \text{س}^{٢}}}$
د/( س ) = ٠ عندما : − ( $\text{س}^{٢}$ − ٥٠ ) = ٠
أى عندما : − ( س + ٥ $\sqrt{٢}$ ) ( س − ٥ $\sqrt{٢}$ ) = ٠
أى عندما : س = − ٥ $\sqrt{٢}$ مرفوض ، س = ٥ $\sqrt{٢}$
، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

| س | ∞ | ٥ $\sqrt{٢}$ | − ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د/( س ) | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ |

عندما : س = ٥ $\sqrt{٢}$
تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن
، من (١) ينتج : ص = ٥ $\sqrt{٢}$
أى أن : طولى ضلعى كل من ضلعى القائمة عندما تصبح مساحة المثلث أكبر ما يمكن هما : ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

**(٨) حقل مفتوح يحدُه من أحد الجوانب نهر مستقيم ، حدد كيفية وضع سياج حول الجوانب الأخرى من قطعة أرض مستطيلة من الحقل بأكبر مساحة ممكنة بواسطة ٨٠٠ متر من السياج ، و ما مساحة هذه الأرض حيئذ ؟**

الحل




نفرض أن : بعدى الحقل هما : س ، ص متر
، ∴ طول السياج = ٨٠٠ متراً
∴ محيطة الحقل = ٢ س + ص = ٨٠٠
و منها : ص = ٨٠٠ − ٢ س (١)
∵ مساحة قطعة الأالأرض = د ( س ) = س ص
= س ( ٨٠٠ − ٢ س ) = ٨٠٠ س − ٢ $\text{س}^{٢}$
∴ د/( س ) = ٨٠٠ − ٤ س = − ٤ ( س − ٢٠٠ )
، د//( س ) = − ٤ < ٠ لكل قيم س

، د/( س ) = ٠ عندما : – ٤ ( س – ٢٠٠ ) = ٠

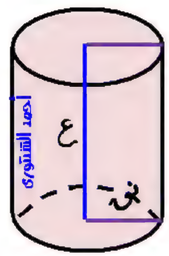
أى عندما : س = ٢٠٠ اختبار المشتقة الثانية : ∵ د//( ٢٠٠ ) < ٠

∴ عندما : س = ٢٠٠ تكون مساحة الحقل أكبر ما يمكن

، من (١) ينتج : ص = ٤٠٠ ∴ بعدى الحقل هما : ٤٠٠ ، ٢٠٠ متر

∴ مساحة قطعة الأرض = ٨٠٠٠٠ متراً مربعاً

**(٩) تُصنع علب اسطوانية الشكل مغلقة لتعبئة المشروبات ، سعة كل منها ك من وحدات الحجم بأقل قدر من المادة ، أوجد ارتفاع العلبة ( ع ) إلى طول نصف قطر قاعدتها ( نق )**




الحل

بفرض أن طول نصف قطر الاسطوانة = نق

، ارتفاع الاسطوانة = ع

∵ سعة الاسطوانة = حجم الاسطوانة = ك وحدة

∴ π نق² ع = ك وحدة و منها : ع = $\frac{ك}{\pi \text{ نق}^2}$ (١)

، المساحة الكلية للاسطوانة تمثل المادة = ٢ π نق ع + ٢ π نق²

∴ المساحة الكلية للاسطوانة تمثل المادة = د( نق ) = ٢ π نق ع + ٢ π نق²

، بالتعويض من (١) ينتج : د( نق ) = ٢ ك نق⁻¹ + ٢ π نق²

∴ د/( نق ) = – ٢ ك نق⁻² + ٤ π نق ، د//( نق ) = ٤ ك نق⁻³ + ٤ π

، د/( نق ) = ٠ عندما : – ٢ ك نق⁻² + ٤ π نق = ٠

أى عندما : ٢ ك نق⁻² = ٤ π نق و منها : ك = ٢ π نق³

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د//( ك ) = ١٢ π > ٠

أى عندما : ك = ٢ π نق³ تكون وحدات الحجم بأقل قدر من المادة

، من (١) ينتج : ع = ٢ نق أى أن : ع : نق = ٢ : ١

**(١٠) ملعب على مستطيل ينتهى بنصفى دائرتين ، إذا كان محيط الملعب ٤٢٠ متراً ، فأوجد أكبر مساحة له**

الحل

نفرض أن : طول المستطيل = ص متر

، عرض المستطيل = طول قطر الدائرة = ٢ س متر

أى أن : طول نصف قطر الدائرة = س متر




∵ محيط الملعب = ٤٢٠ متر

∴ ٢ س π + ٢ ص = ٤٢٠

و منها : ص = ٢١٠ – س π

، مساحة الملعب = د ( س )

= مساحة دائرة + مساحة مستطيل

= π س² + ٢ س ص

∴ د ( س ) = π س² + ٢ س ( ٢١٠ – س π )

= π س² + ٤٢٠ س – ٢ س² π = ٤٢٠ س – س² π

∴ د/( س ) = ٤٢٠ – ٢ س π ، د//( س ) = – ٢ π < ٠ لكل قيم س

بوضع : د/( س ) = ٠ ∴ ٤٢٠ – ٢ س π = ٠ و منها : س = $\frac{٢١٠}{\pi}$

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د//( $\frac{٢١٠}{\pi}$ ) = – ٢ π < ٠

∴ س = $\frac{٢١٠}{\pi}$ تجعل مساحة الملعب أكبر ما يمكن

∴ ص = ٢١٠ – $\frac{٢١٠}{\pi}$ × π = صفر

أى أن : الملعب يكون على شكل دائرة طول نصف قطرها $\frac{٢١٠}{\pi}$ متر

∴ مساحة الملعب = π س² = π × $\frac{٢١٠^2}{\pi^2}$ = $\frac{٤٤١٠٠}{\pi}$ متر مربع

**(١١)** مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠ سم ، أوجد طول كل من ضلعيه الآخرين إذا كان طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن




**الحل**

نفرض أن : طولى ضلعى القائمة هما : س ، ص سم ، طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر = ع سم

، ∵ من الشكل المقابل : $س^٢ + ص^٢ = ٩٠٠$ ∴ $ص = \sqrt{٩٠٠ - س^٢}$ (١)

، $س \times ص = ٣٠ ع$ ∴ $ع = \frac{١}{٣٠} ( س \times ص ) =$

∴ $ع = د(س) = \frac{١}{٣٠} س \sqrt{٩٠٠ - س^٢} = \frac{١}{٣٠} س ( ٩٠٠ - س^٢ )^{\frac{١}{٢}}$

∴ $د'(س) = \frac{١}{٣٠} ( ٩٠٠ - س^٢ )^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٣٠} س \times \frac{١}{٢} ( ٩٠٠ - س^٢ )^{-\frac{١}{٢}} ( -٢س )$

$= \frac{١}{٣٠} ( ٩٠٠ - س^٢ )^{-\frac{١}{٢}} ( ٩٠٠ - س^٢ - س^٢ )$

$= -\frac{١}{١٥} ( ٩٠٠ - س^٢ )^{-\frac{١}{٢}} ( س^٢ - ٤٥٠ )$

$= -\frac{١}{١٥} ( ٩٠٠ - س^٢ )^{-\frac{١}{٢}} ( س + ١٥\sqrt{٢} ) ( س - ١٥\sqrt{٢} )$

، ∵ $د'(س) = ٠$ . عندما : $س = -١٥\sqrt{٢}$ مرفوض ، $س = ١٥\sqrt{٢}$

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

| س | $-\infty$ | $١٥\sqrt{٢}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $د'(س)$ | + + | ٠ | − − |
| سلوك $د(س)$ | ↗ | | ↘ |

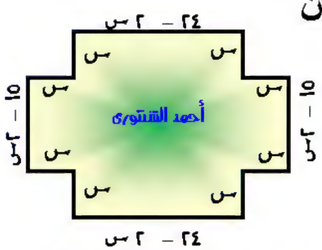
عندما : $س = ١٥\sqrt{٢}$ يكون طول العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على الوتر أكبر ما يمكن

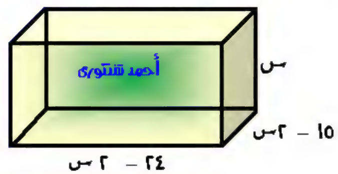
، من (١) ينتج : $ص = ١٥\sqrt{٢}$

أى أن : طولى ضلعى كل من ضلعى القائمة عندما يكون طول الوتر النازل من رأس القائمة على الوتر أكبر يمكن هما : $١٥\sqrt{٢}$ سم ، $١٥\sqrt{٢}$ سم

**(١٢)** قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل بعداه ١٥ سم ، ٢٤ سم قطع من أركانها الأربعة مربعات متطابقة طول كل منها س سم ، ثم ثنيت الأجزاء البارزة لأعلى لتكون علبة بدون غطاء ، أحسب أبعاد العلبة عندما يكون لها أكبر حجم ممكن

**الحل**




نفرض أن : طول ضلع المربع المقطوع هو : س سم

، حجم العلبة = د(س) ∴ أبعاد العلبة هى : س ، ٢٤ − ٢س ، ١٥ − ٢س

∴ $د(س) = س ( ٢٤ - ٢س ) ( ١٥ - ٢س )$

$= ٣٦٠ س - ٧٨ س^٢ + ٤ س^٣$

∴ $د'(س) = ٣٦٠ - ١٥٦ س + ١٢ س^٢$

$= ١٢ ( س^٢ - ١٣ س + ٣٠ )$

$= ١٢ ( س - ٣ ) ( س - ١٠ )$

، $د''(س) = -١٥٦ + ٢٤ س$ ، ∵ $د'(س) = ٠$ . عندما : $س = ٣$

، $س = ١٠$ مرفوض لأن عندها البعد ( ١٥ − ٢س ) يكون $< ٠$ .

اختبار المشتقة الثانية : ∵ $د''(٣) = -٧٢ < ٠$ .

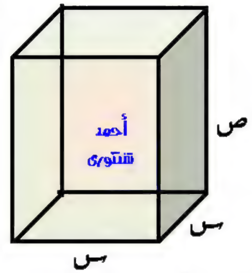
∴ عندما : س = ٣ يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن

∴ أبعاد العلبة هى : ٣ ، ٩ ، ١٨ سم

**(١٣)** خزان مفتوح ، قاعدته مربعة ، و جوانبه رأسية ، يسع كمية معينة من الماء ، أثبت أن تكاليف طلاء الخزان من الداخل بطبقة منتظمة عازلة تكون أقل ما يمكن إذا كان عمقه يساوى نصف طول ضلع قاعدته

**الحل**

نفرض أن : أبعاد الخزان من الداخل هى :
س ، س ، ص متر " القاعدة مربعة "




، سعة الخزان = ل ، ∵ حجم الصندوق = $س^{٢}$ ص

∴ $س^{٢}$ ص = ل ∴ ص = $\frac{ل}{س^{٢}}$ = ل $س^{-٢}$ (١)

∵ المساحة الكلية للخزان من الداخل = ٤ س ص + $س^{٢}$

" الخزان مفتوح " ، بفرض أن : تكاليف دهان المتر الواحد = أ

∴ التكلفة الكلية = ( ٤ س ص + $س^{٢}$ ) × أ

∴ التكلفة الكلية = د ( س ) = أ ( ٤ ل $س^{-١}$ + $س^{٢}$ )

∴ $د^{/}$ ( س ) = أ ( − ٤ ل $س^{-٢}$ + ٢ س ) = − ٢ أ $س^{-٢}$ ( $س^{٣}$ − ٢ ل )

، $د^{/}$ ( س ) = ٠ عندما : $س^{٣}$ − ٢ ل = ٠ أى عندما : س = $\sqrt[٣]{٢ ل}$

، $د^{//}$ ( س ) = أ ( ٨ ل $س^{-٣}$ + ٢ )

اختبار المشتقة الثانية : ∵ $د^{//}$ ( $\sqrt[٣]{٢ ل}$ ) = ٣ > ٠

∴ عندما : س = $\sqrt[٣]{٢ ل}$ تكون التكلفة أقل ما يمكن

من (١) ينتج : ص = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt[٣]{٢ ل}$ = $\frac{١}{٢}$ س

∴ عمق الخزان يساوى نصف طول ضلع قاعدته

## (١٤) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة ( ٠ ، ٥ ) و تقع على المنحنى :

ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٤

**الحل**

نفرض أن : النقطة ( س ، ص ) تقع على المنحنى : ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٤

∴ النقطة هى : ( س ، $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٤ ) (١)

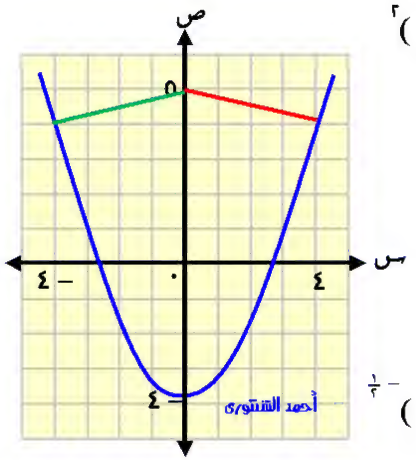
، بفرض أن البعد بين النقطتين : ( ٠ ، ٥ ) ، ( س ، $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٤ ) هو : ف

∴ $ف^{٢}$ = ( س − ٠ )$^{٢}$ + ( $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٤ − ٥ )$^{٢}$

= $س^{٢}$ + ( $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٩ )$^{٢}$

= $س^{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ − ٩ $س^{٢}$ + ٨١

= $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ − ٨ $س^{٢}$ + ٨١




∴ ف = د ( س )

= ( $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ − ٨ $س^{٢}$ + ٨١ )$^{\frac{١}{٢}}$

∴ $د^{/}$ ( س ) = $\frac{١}{٢}$ ( $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ − ٨ $س^{٢}$ + ٨١ )$^{-\frac{١}{٢}}$

× ( $س^{٣}$ − ١٦ س )

= $\frac{١}{٢}$ س ( $س^{٢}$ − ١٦ ) ( $\frac{١}{٤}$ $س^{٤}$ − ٨ $س^{٢}$ + ٨١ )$^{-\frac{١}{٢}}$

، $د^{/}$ ( س ) = ٠ عندما : س ( $س^{٢}$ − ١٦ ) = ٠

أى عندما : س ( س + ٤ ) ( س − ٤ ) = ٠

أى عندما : س = ٠ ، س = − ٤ ، س = ٤

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

| س | − ∞ | | − ٤ | | ٠ | | ٤ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د^{/}$ ( س ) | | − − | ٠ | + + | ٠ | − − | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↘ | ٤ | ↗ | | ↘ | ٤ | ↗ | |

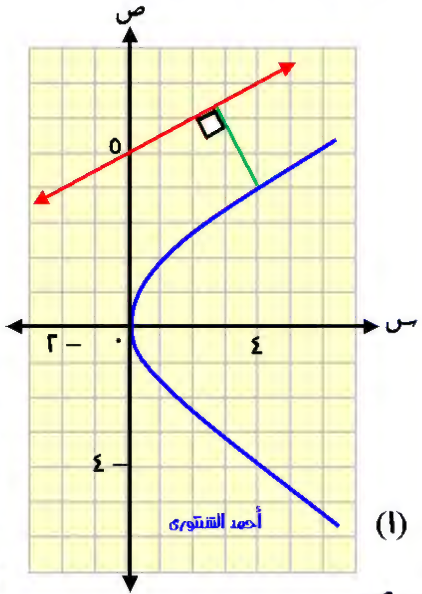
∴ ف = د ( س ) أقرب ما يمكن عندما : س = − ٤ ، س = ٤

، بالتعويض فى (١) ينتج : ( − ٤ ، ٤ ) ، ( ٤ ، ٤ )

∴ أقرب نقطة إلى النقطة ( ٠ ، ٥ ) و تقع على المنحنى : ص = $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ − ٤

هى : ( − ٤ ، ٤ ) ، ( ٤ ، ٤ )

**(١٥)** أوجد أقصر بعد بين المستقيم : س − ٢ ص + ١٠ = ٠ .
و المنحنى : ص$^٢$ = ٤ س




**الحل**

نفرض أن : النقطة ( س ، ص )
تقع على المنحنى : ص$^٢$ = ٤ س
∴ س = $\frac{١}{٤}$ ص$^٢$
∴ النقطة هى : ( س ، $\frac{١}{٤}$ ص$^٢$ )
، بفرض أن البعد بين النقطتين المستقيم : س − ٢ ص + ١٠ = ٠ ، المنحنى :
ص$^٢$ = ٤ س هو : ف
∴ ف = د ( ص ) = $\frac{| \frac{١}{٤} ص^٢ − ٢ ص + ١٠ |}{\sqrt{١ + ٤}}$ (١)
∵ | $\frac{١}{٤}$ ص$^٢$ − ٢ ص + ١٠ | موجبة لجميع قيم ص
∴ ف = د ( ص ) = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ( $\frac{١}{٤}$ ص$^٢$ − ٢ ص + ١٠ )
∴ د$'$ ( ص ) = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ( $\frac{١}{٢}$ ص − ٢ ) ، د$''$ ( ص ) = $\frac{١}{٢\sqrt{٥}}$
، عندما : د$'$ ( ص ) = ٠ فإن : ص = ٤
اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( ٤ ) = $\frac{١}{٢\sqrt{٥}}$ > ٠ .
∴ عندما : س = ٤ يكون البعد بين المستقيم و المنحنى أقصر بعد
من (١) ينتج : ف = $\frac{٦}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{٦\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول

**(١٦)** ا ب حـ مثلث حيث ا$'$ ، ب$'$ ثابتان ، أوجد قياس الزاوية المحصورة بينهما و التى تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن




**الحل**

∵ مساحة المثلث = د ( س ) = $\frac{١}{٢}$ ا$'$ ب$'$ حا س
∴ د$'$ ( س ) = $\frac{١}{٢}$ ا$'$ ب$'$ حتا س ، د$''$ ( س ) = − $\frac{١}{٢}$ ا$'$ ب$'$ حا س
، بوضع : د$'$ ( س ) = ٠ ∴ حتا س = ٠ ∴ س = ٩٠°
اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( ٩٠° ) = − $\frac{١}{٢}$ ا$'$ ب$'$ < ٠ .
∴ عندما : س = ٩٠° تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن

**(١٧)** تعطى شدة التيار " ت " ( بالأمبير ) فى دائرة للتيار المتردد عند أى لحظة " ن " ( ثانية ) بالعلاقة : ت = ٢ حتا ن + ٢ حا ن
ما أقصى قيمة للتيار فى هذه الدائرة

**الحل**

∵ ت = د ( ن ) = ٢ حتا ن + ٢ حا ن
∴ د$'$ ( ن ) = − ٢ حا ن + ٢ حتا ن ، د$''$ ( ن ) = − ٢ حتا ن − ٢ حا ن
، بوضع : د$'$ ( ن ) = ٠ ∴ − ٢ حا ن + ٢ حتا ن = ٠
، منها : ظا ن = ١ ∴ ن = $\frac{١}{٤}\pi$ ، ن = $\frac{٥}{٤}\pi$
اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( $\frac{١}{٤}\pi$ ) = $\frac{−٤}{\sqrt{٢}}$ < ٠ .
، د$''$ ( $\frac{٥}{٤}\pi$ ) = $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ > ٠ .
∴ عندما : ن = $\frac{١}{٤}\pi$ تكون قيمة التيار أكبر ما يمكن
∴ ت = ٢ حتا $\frac{١}{٤}\pi$ + ٢ حا $\frac{١}{٤}\pi$ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ أمبير

**(١٨)** ينمو حجم مزرعة بكتيريا موضوعة فى وسط غذائى طبقاً للعلاقة :

$د(ن) = ٢٠٠٠ + \frac{٥٠٠٠ ن}{١٠٠ + ن^{٢}}$ حيث الزمن ( ن ) مقيس بالساعات

عين القيمة العظمى لحجم المزرعة

**الحل**

$\because د(ن) = ٢٠٠٠ + \frac{٥٠٠٠ ن}{١٠٠ + ن^{٢}} = ٢٠٠٠ + ٥٠٠٠ ن (١٠٠ + ن^{٢})^{-١}$

$\therefore د'(ن) = ٥٠٠٠ (١٠٠ + ن^{٢})^{-١} - ١٠٠٠٠ ن^{٢} (١٠٠ + ن^{٢})^{-٢}$

$= ٥٠٠٠ (١٠٠ + ن^{٢})^{-٢} (١٠٠ + ن^{٢} - ٢ ن^{٢})$

$= -٥٠٠٠ (١٠٠ + ن^{٢})^{-٢} (ن^{٢} - ١٠٠)$

$= -٥٠٠٠ (١٠٠ + ن^{٢})^{-٢} (ن - ١٠)(ن + ١٠)$

، بوضع : $د'(ن) = ٠$ $\therefore (ن - ١٠)(ن + ١٠) = ٠$

$\therefore ن = ١٠$ ، $ن = -١٠$ مرفوض

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :
القيمة العظمى لحجم المزرعة تكون عندما : ن = ١٠ ساعات

| س | $-\infty$ | ١٠ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة د'(س) | + + | ٠ | − − |
| سلوك د(س) | ↗ | ٢٢٥٠ | ↘ |

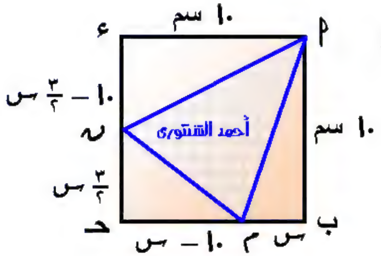
$\therefore$ حجم المزرعة $= د(١٠) = ٢٠٠٠ + ٢٥٠ = ٢٢٥٠$

**(١٩)** أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، م $\in$ ب حـ بحيث ب م = س سم ، ن $\in$ حـ ء بحيث حـ ن $= \frac{٣}{٢}$ س

أوجد قيمة س التى تجعل مساحة △ أ م ن أصغر ما يمكن

**الحل**

مساحة △ أ م ن = مساحة المربع أ ب حـ ء − ( مساحة △ أ ب م + مساحة △ أ ء ن + مساحة △ م حـ ن )




$\therefore$ مساحة △ أ م ن $= د(س) = ١٠٠ - \left( \frac{١}{٢} \times ١٠ \times س + \frac{١}{٢} \times ١٠ \times (١٠ - \frac{٣}{٢} س) + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٢} س \times (١٠ - س) \right)$

$\therefore د(س) = \frac{٣}{٤} س^{٢} - ٥ س + ٥٠$

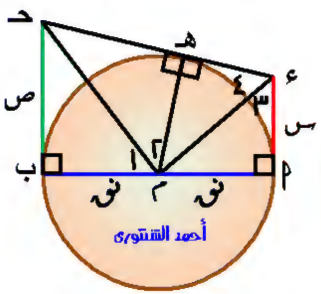
$\therefore د'(س) = \frac{٣}{٢} س - ٥$ ، $د''(س) = \frac{٣}{٢}$

بوضع : $د'(س) = ٠$ $\therefore \frac{٣}{٢} س - ٥ = ٠$ و منها : $س = \frac{١٠}{٣}$

اختبار المشتقة الثانية : $\because د''(\frac{١٠}{٣}) = \frac{٣}{٢} > ٠$ $\therefore$ عندما : $س = \frac{١٠}{٣}$ سم

تكون مساحة △ أ م ن أصغر ما يمكن

**(٢٠)** $\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة طول نصف قطرها نق ، رُسم مماسان للدائرة عند كل من أ ، ب من النقطة هـ تقع على الدائرة ، رُسم مماس آخر للدائرة قطع المماسين السابقين فى ء ، حـ على الترتيب
أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف أ ب حـ ء تساوى ٢ $نق^{٢}$ وحدة مربعة




**الحل**

من هندسة الشكل :

الشكل أ ء هـ م رباعى دائرى ،

$\therefore$ ق( ∠٣ ) = ق( ∠٤ ) ،

الشكل ب حـ هـ م رباعى دائرى

$\therefore$ ق( ∠١ ) = ق( ∠٢ ) = ،

ق( ∠١ ) + ق( ∠٢ ) = ق( ∠٣ ) + ق( ∠٤ )

$\therefore$ ق( ∠٣ ) = ق( ∠١ ) $\therefore$ △ أ م ء ~ △ ب حـ م

، ينتج : $\frac{نق}{ص} = \frac{س}{نق}$ $\therefore ص = \frac{نق^{٢}}{س} = نق^{٢} س^{-١}$ (١)

، مساحة شبه المنحرف ٩ ب حـ ء = $\frac{1}{2}$ ( س + ص ) × ٢ نو

= نو ( س + ص )

∴ مساحة شبه المنحرف ٩ ب حـ ء = د ( س ) = نو ( س + نو$^{2}$ س$^{-1}$ )

∴ د ( س ) = نو س + نو$^{3}$ س$^{-1}$

∴ د$'$ ( س ) = نو − نو$^{3}$ س$^{-2}$ = نو س$^{-2}$ ( س$^{2}$ − نو$^{2}$ )

، د$''$ ( س ) = نو$^{3}$ س$^{-3}$

، بوضع : د$'$ ( س ) = ٠ ∴ س$^{2}$ − نو$^{2}$ = ٠

أى أن : س$^{2}$ = نو$^{2}$ ∴ س = نو

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$''$ ( نو ) = ٢ > ٠

∴ عندما : س = نو وحدة طول

تكون مساحة شبه المنحرف ٩ ب حـ ء أصغر ما يمكن

من (١) ينتج : ص = نو وحدة طول

∴ مساحة شبه المنحرف ٩ ب حـ ء = نو ( نو + نو ) = ٢ نو$^{2}$ وحدة مربعة

## حل تمارين عامة صفحة ٩٠ بالكتاب المدرسى

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان د : [ −٢ ، ٤ ] ← ح ، د ( س ) = س$^{3}$ − ٣ س

فإن : عدد النقط الحرجة للدالة د يساوى ....

(٩) ٠ (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) ٣

الحل

∵ د ( س ) = س$^{3}$ − ٣ س دالة متصلة على ح

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{2}$ − ٣ = ٣ ( س + ١ ) ( س − ١ )

∴ للدالة د نقط حرجة عند : س = −١ ، س = ١

∴ عدد النقط الحرجة للدالة د يساوى ٢

(٢) يكون للدالة د قيمة صغرى محلية إذا كانت د ( س ) تساوى ....

(٩) ٢ س − ١ (ب) س$^{2}$ + ١

(حـ) س$^{3}$ (ء) − س$^{3}$

الحل

∵ د ( س ) = س$^{2}$ + ١ دالة متصلة على ح

∴ د$'$ ( س ) = ٢ س ، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : س = ٠

، ∵ عندما : س > ٠ فإن : د$'$ ( ٠ ) > ٠

، عندما : س < ٠ فإن : د$'$ ( ٠ ) < ٠

∴ يكون للدالة د ( س ) = س$^{2}$ + ١ قيمة صغرى محلية عندما : س = ٠

لاحظ : د ( س ) = ٢ س − ١ دالة خطية ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية

∵ د ( س ) = س$^{3}$ ∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{2}$

، د$'$ ( س ) = ٠ عندما : س = ٠

، ∵ عندما : س < ٠ فإن : د$'$( ٠ ) < ٠ .

، عندما : س > ٠ فإن : د$'$( ٠ ) < ٠ .

∴ لا يكون للدالة د ( س ) = س$^{3}$
قيمة عظمى محلية أو صغرى عندما : س = ٠ .

∵ د ( س ) = − س$^{3}$ ∴ د$'$( س ) = − ٣ س$^{2}$

، د$'$( س ) = ٠ عندما : س = ٠ .

، ∵ عندما : س < ٠ فإن : د$'$( ٠ ) > ٠ .

، عندما : س > ٠ فإن : د$'$( ٠ ) > ٠ .

∴ لا يكون للدالة د ( س ) = − س$^{3}$
قيمة عظمى محلية أو صغرى عندما : س = ٠ .

**(٣)** منحنى الدالة د محدباً لأسفل فى ح إذا كان د ( س ) تساوى ....

(أ) ٣ − س$^{2}$ (ب) ٣ − س$^{3}$

(حـ) ٣ − س$^{4}$ (ء) ٣ + س$^{4}$

الحل

∵ د ( س ) = ٣ + س$^{4}$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين على ح

∴ د$'$( س ) = ٤ س$^{3}$ ، د$'$( س ) = ٠ عندما : س = ٠ .

، د$''$( س ) = ١٢ س$^{2}$ > ٠ لكل قيم س ∈ ح

∴ يكون للدالة د ( س ) = = ٣ + س$^{4}$ يكون محدباً لأسفل فى ح

لاحظ : منحنيات الدوال الأخرى محدبة لأعلى فى ح " حاول بنفسك "

**(٤)** إذ كان : لمنحنى الدالة د نقطة انقلاب عند : س = ٢ حيث :

د ( س ) = س$^{3}$ + ك س$^{2}$ + ٤ فإن : قيمة ك تساوى ....

(أ) − ٦ (ب) − ٣ (حـ) ٣ (ء) ٦

الحل

∵ د ( س ) = س$^{3}$ + ك س$^{2}$ + ٤

∴ د$'$( س ) = ٣ س$^{2}$ + ٢ ك س ، د$''$( س ) = ٦ س + ٢ ك

، لمنحنى الدالة د نقطة انقلاب عند : س = ٢ ∴ د$''$( ٠ ) = ٠ .

∴ ١٢ + ٢ ك = ٠ . و منها : ك = − ٦

**(٥)** يكون للدالة د قيمة عظمى محلية إذا كانت د ( س ) تساوى ....

(أ) س$^{2}$ − ٢ (ب) س$^{3}$ + ١

(حـ) س$^{3}$ + ٣ س (ء) س$^{4}$ − ٢ س$^{2}$

الحل

∵ د ( س ) = س$^{4}$ − ٢ س$^{2}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د$'$( س ) = ٤ س$^{3}$ − ٤ س = ٤ س ( س + ١ ) ( س − ١ )

، د$''$( س ) = ١٢ س$^{2}$ − ٤ ، د$'$( س ) = ٠ .

عندما : س = − ١ ، س = ٠ ، س = ١

، ∵ د$''$( ٠ ) = − ٤ < ٠ .

∴ يكون للدالة د ( س ) = س$^{4}$ − ٢ س$^{2}$ قيمة عظمى محلية عند : س = ٠ .

لاحظ : لمنحنى الدالة الأولى قيمة صغرى محلية ، و الدالتين الأخريين ليس لهما قيم عظمى محلية أو صغرى محلية " حاول بنفسك "

حدد فترات تزايد و تناقص الدالة د فى كل مما يأتى :

**(٦)** د ( س ) = ( س − ٣ )$^{2}$

الحل

∵ د ( س ) = ( س − ٣ )$^{2}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د$'$( س ) = ٢ ( س − ٣ ) بوضع : د$'$( س ) = ٠ يكون : س = ٣

ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٣ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↘ | | ↗ |

د متناقصة على ] −∞ ، ٣ [ ، د متزايدة على ] ٣ ، ∞ [

**(٧)** د(س) = ٢ س$^{٣}$ − س$^{٢}$

الحل

∵ د(س) = ٢ س$^{٣}$ − س$^{٢}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د′(س) = ٦ س$^{٢}$ − ٢ س = ٢ س ( ٣ س − ١ )

بوضع : د′(س) = ٠ يكون : س = ٠ ، س = $\frac{١}{٣}$

ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٠ | | $\frac{١}{٣}$ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | ٠ | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ | | ↗ |

د متزايدة على ] −∞ ، ٠ [ ، د متناقصة على ] ٠ ، $\frac{١}{٣}$ [ ،

د متزايدة على ] $\frac{١}{٣}$ ، ∞ [

**(٨)** د(س) = ( س + ٤ )$^{٣}$

الحل

∵ د(س) = ( س + ٤ )$^{٣}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د′(س) = ٣ ( س + ٤ )$^{٢}$ بوضع : د′(س) = ٠ يكون : س = −٤

ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | −٤ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↗ |

د متزايدة على ] −∞ ، ∞ [

**(٩)** د(س) = ٥ + ٤ س − س$^{٢}$

الحل

∵ د(س) = ٥ + ٤ س − س$^{٢}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د′(س) = ٤ − ٢ س = − ٢ ( س − ٢ )

بوضع : د′(س) = ٠ يكون : س = ٢

ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | ٠ | − − |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ |

د متزايدة على ] −∞ ، ٢ [ ، د متناقصة على ] ٢ ، ∞ [

**(١٠)** د(س) = س$^{٢}$ ( س − ٢ )

الحل

∵ د(س) = س$^{٢}$ ( س − ٢ ) = س$^{٣}$ − ٢ س$^{٢}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د′(س) = ٣ س$^{٢}$ − ٤ س = س ( ٣ س − ٤ )

بوضع : د′(س) = ٠ يكون : س = ٠ ، س = $\frac{٤}{٣}$

ببحث إشارة د′(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٠ | | $\frac{٤}{٣}$ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | + + | ٠ | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ | | ↗ |

د متزايدة على ]− ∞ ، ٠[ ، د متناقصة على ]٠ ، $\frac{٤}{٣}$[ ،
د متزايدة على ]$\frac{٤}{٣}$ ، ∞[

**(١١)** د ( س ) = $\text{س}^{٤}$ − ٤ $\text{س}^{٣}$

الحل

∵ د ( س ) = $\text{س}^{٤}$ − ٤ $\text{س}^{٣}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د′( س ) = ٤ $\text{س}^{٣}$ − ١٢ $\text{س}^{٢}$ = ٤ $\text{س}^{٢}$ ( س − ٣ )

بوضع : د′( س ) = ٠ يكون : س = ٠ ، س = ٣

ببحث إشارة د′( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | − ∞ | ٠ | | ٣ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′( س ) | − − | ٠ | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↘ | | ↗ |

د متناقصة على ]− ∞ ، ٣[ ، د متزايدة على ]٣ ، ∞[

**(١٢)** د ( س ) = ١ + $\frac{١}{\text{س}}$

الحل

∵ د ( س ) = ١ + $\frac{١}{\text{س}}$ = ١ + $\text{س}^{-١}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح − { ٠ }

∴ د′( س ) = − $\text{س}^{-٢}$ = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ ≠ ٠

، ∵ د′( س ) غير معرفة عندما : س = ٠ ∉ ح − { ٠ }

∴ نبحث إشارة د′( س ) كما يلى :

∵ عندما : س = − ١ يكون : د′( س ) = ١ > ٠

∴ د متناقصة على ]− ∞ ، ٠[ ،

∵ عندما : س = ١ يكون : د′( س ) = ١ > ٠

∴ د متناقصة على ]٠ ، ∞[

، الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | − ∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′( س ) | − − | غير معرفة | − − |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↘ |

**(١٣)** د ( س ) = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$

الحل

∵ د ( س ) = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح − { − ٢ }

∴ د′( س ) = $\frac{(\text{س} + ٢)(١) - \text{س} \times ١}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ = $\frac{٣}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$ ≠ ٠

، ∵ د′( س ) غير معرفة عندما : س = − ٢ ∉ ح − { − ٢ }

∴ نبحث إشارة د′( س ) كما يلى :

∵ عندما : س = − ٣ يكون : د′( س ) = ٣ < ٠

∴ د متزايدة على ]− ∞ ، − ٢[ ،

∵ عندما : س = − ١ يكون : د′( س ) = ٣ < ٠

∴ د متزايدة على ]− ٢ ، ∞[ ، الجدول التالى يوضح ذلك :

| س | − ∞ | − ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′( س ) | + + | غير معرفة | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↗ |

د متزايدة على كل من : ]− ∞ ، − ٢[ ، ]− ٢ ، ∞[

**(١٤)** د ( س ) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$

الحل

∵ د ( س ) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ = $(\text{س} - ١)^{\frac{١}{٣}}$ دالة قابلة للاشتقاق على ح

∴ د′( س ) = $\frac{١}{٣}(\text{س} - ٢)^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{(\text{س} - ١)^{٢}}}$ ≠ ٠

∴ د متزايدة على كل من ] – ∞ ، ١ [ ، ] ١ ، ∞ [

| س | – ∞ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د/ ( س ) | + + | غير موجودة | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↗ |

حدد فترات التحدب لأسفل و التحدب لأعلى و نقط الانقلاب ( إن وجدت ) لكل من :

**(١٥)** د ( س ) = ( س – ١ )٢

الحل

∵ د ( س ) = ( س – ١ )٢ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على ح

∴ د/ ( س ) = ٢ ( س – ١ ) ، د// ( س ) = ٢

، ∵ د// ( س ) > ٠ لكل س ∈ ح

∴ المنحنى محدب لأسفل لكل س ∈ ح

و لا توجد نقط انقلاب

و الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | – ∞ ∞ |
|---|---|
| إشارة د// | + + |
| تحدب منحنى د | لأسفل |

**(١٦)** د ( س ) = س٣ – ٣ س٢

الحل

∵ د ( س ) = س٣ – ٣ س٢ ، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ د/ ( س ) = ٣ س٢ – ٦ س ،

د// ( س ) = ٦ س – ٦ = ٦ ( س – ١ )

بوضع : د// ( س ) = ٠ يكون : س = ١

ببحث إشارة د// ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د// ( س ) | – – | ٠ | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | – ٢ | لأسفل |

منحنى الدالة محدب لأعلى فى ] – ∞ ، ١ [ ، محدب لأسفل فى ] ١ ، ∞ [ ، و النقطة ( ١ ، – ٢ ) نقطة انقلاب

**(١٧)** د ( س ) = س٣ – ٦ س٢ + ٩

الحل

∵ د ( س ) = س٣ – ٦ س٢ + ٩ ، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ د/ ( س ) = ٣ س٢ – ١٢ س ،

د// ( س ) = ٦ س – ١٢ = ٦ ( س – ٢ )

بوضع : د// ( س ) = ٠ يكون : س = ٢

ببحث إشارة د// ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د// ( س ) | – – | ٠ | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | – ٧ | لأسفل |

منحنى الدالة محدب لأعلى فى ] – ∞ ، ٢ [ ، محدب لأسفل فى ] ٢ ، ∞ [ ، و النقطة ( ٢ ، – ٧ ) نقطة انقلاب

**(١٨)** د ( س ) = س٣ – ١٢ س + ٧

الحل

∵ د ( س ) = س٣ – ١٢ س + ٧ ، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح

∴ د/ ( س ) = ٣ س٢ – ١٢ س ، د// ( س ) = ٦ س

بوضع : د// ( س ) = ٠ يكون : س = ٠

ببحث إشارة د// ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | – ∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د// ( س ) | – – | ٠ | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | ٧ | لأسفل |

منحنى الدالة محدب لأعلى فى ] −∞ ، ٠ [ ، محدب لأسفل فى ] ٠ ، ∞ [
، و النقطة ( ٠ ، ٧ ) نقطة انقلاب

**(١٩)** د ( س ) = ٦ س$^{٣}$ − س$^{٤}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٦ س$^{٣}$ − س$^{٤}$ ، د متصلة و قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح
∴ د$'$ ( س ) = ١٨ س$^{٢}$ − ٤ س$^{٣}$ ،
د$''$ ( س ) = ٣٦ س − ١٢ س$^{٢}$ = ١٢ س ( ٣ − س )
بوضع : د$''$ ( س ) = ٠ يكون : س = ٠ ، س = ٣
ببحث إشارة د$''$ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٠ | | ٣ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$''$ ( س ) | − − | ٠ | + + | ٠ | − − |
| سلوك د ( س ) | لأعلى | ٠ | لأسفل | ٨١ | لأعلى |

منحنى الدالة محدب لأعلى فى كل من : ] −∞ ، ٠ [ ، ] ٣ ، ∞ [
، و محدب لأسفل فى ] ٠ ، ٣ [
، و النقط ( ٠ ، ٠ ) ، ( ٣ ، ٨١ ) نقط انقلاب

**(٢٠)** د ( س ) = س$^{٢}$ − $\frac{٨}{س}$

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٢}$ − $\frac{٨}{س}$ = س$^{٢}$ − ٨ س$^{-١}$
، د متصلة قابلة للاشتقاق على ح − { ٠ }
∴ د$'$ ( س ) = ٢ س − ٨ س$^{-٢}$
، د$''$ ( س ) = ٢ − ١٦ س$^{-٣}$ = − ٢ س$^{-٣}$ ( س$^{٣}$ − ٨ ) ≠ ٠ .
بوضع : د$''$ ( س ) = ٠ يكون : س = ٢

، د$''$ ( س ) غير معرفة عندما : س = ٠ ∉ ح − { ٠ }
ببحث إشارة د$''$ ( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٠ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$''$ ( س ) | + + | غير معرفة | − − | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | لأسفل | | لأعلى | ٠ | لأسفل | |

منحنى الدالة محدب لأسفل فى كل من : ] −∞ ، ٠ [ ، ] ٢ ، ∞ [
، و محدب لأسفل فى ] ٠ ، ٢ [ ، و النقطة ( ٢ ، ٠ ) نقطة انقلاب

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة إن وجدت فى كل مما يأتى :

**(٢١)** د ( س ) = ٤ − ٦ س − س$^{٢}$

**الحل**

∵ د ( س ) = ٤ − ٦ س − س$^{٢}$ ، د كثيرة حدود فهى متصلة لكل س ∈ ح
∴ د$'$ ( س ) = − ٦ − ٢ س = − ٢ ( س + ٣ ) ، د$''$ ( س ) = − ٢
للدالة نقط حرجة عندما : د$'$ ( س ) = ٠ أى عندما : س = − ٣
عندما : س = − ٣ يكون : د$''$ ( − ٣ ) = − ٢ < ٠ .
∴ د ( − ٣ ) = ١٣ قيمة عظمى محلية

**(٢٢)** د ( س ) = ٢ س$^{٣}$ − ٣ س$^{٢}$ + ٧

**الحل**

∵ د ( س ) = ٢ س$^{٣}$ − ٣ س$^{٢}$ + ٧
، د كثيرة حدود فهى متصلة لكل س ∈ ح
∴ د$'$ ( س ) = ٦ س$^{٢}$ − ٦ س = ٦ س ( س − ١ )
، د$''$ ( س ) = ١٢ س − ٦ للدالة نقط حرجة عندما : د$'$ ( س ) = ٠
أى عندما : س = ٠ ، س = ١

عندما : س = ٠ يكون : د″( ٠ ) = − ٦ < ٠

∴ د ( ٠ ) = ٧ قيمة عظمى محلية

عندما : س = ١ يكون : د″( ١ ) = ٦ > ٠

∴ د ( ١ ) = ٦ قيمة صغرى محلية

**(٢٣)** د ( س ) = س ( س − ٢ )$^{٢}$

**الحل**

∵ د ( س ) = س ( س − ٢ )$^{٢}$ = س$^{٣}$ − ٤ س$^{٢}$ + ٤ س

، د كثيرة حدود فهى متصلة لكل س ∈ ح

∴ د′( س ) = ٣ س$^{٢}$ − ٨ س + ٤ = ( ٣ س − ٢ ) ( س − ٢ )

، د″( س ) = ٦ س − ٨ للدالة نقط حرجة عندما : د′( س ) = ٠

أى عندما : س = ٢/٣ ، س = ٢

عندما : س = ٢/٣ يكون : د″( ٢/٣ ) = − ٤ < ٠

∴ د ( ٢/٣ ) = ٣٢/٢٧ قيمة عظمى محلية

عندما : س = ٢ يكون : د″( ٢ ) = ٤ > ٠

∴ د ( ٢ ) = ٠ قيمة صغرى محلية

**(٢٤)** د ( س ) = س$^{٤}$ − ٨ س$^{٢}$ + ٨

**الحل**

∵ د ( س ) = س$^{٤}$ − ٨ س$^{٢}$ + ٨

، د كثيرة حدود فهى متصلة لكل س ∈ ح

∴ د′( س ) = ٤ س$^{٣}$ − ١٦ س = ٤ س ( س + ٢ ) ( س − ٢ )

، د″( س ) = ١٢ س$^{٢}$ − ١٦ للدالة نقط حرجة عندما : د′( س ) = ٠

أى عندما : س = − ٢ ، س = ٠ ، س = ٢

عندما : س = − ٢ يكون : د″( − ٢ ) = ٣٢ > ٠

∴ د ( − ٢ ) = − ٨ قيمة صغرى محلية

عندما : س = ٠ يكون : د″( ٠ ) = − ١٦ < ٠

∴ د ( ٠ ) = ٨ قيمة عظمى محلية

عندما : س = ٢ يكون : د″( ٢ ) = ٣٢ > ٠

∴ د ( ٢ ) = − ٨ قيمة عظمى محلية

**(٢٥)** د ( س ) = ( س$^{٢}$ − ١ ) / ( س$^{٢}$ + ١ )

**الحل**

∵ د ( س ) = ( س$^{٢}$ − ١ ) / ( س$^{٢}$ + ١ ) = ( س$^{٢}$ − ١ ) ( س$^{٢}$ + ١ )$^{-١}$

، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د′( س ) = ٢ س ( س$^{٢}$ + ١ )$^{-١}$ − ٢ س ( س$^{٢}$ − ١ ) ( س$^{٢}$ + ١ )$^{-٢}$

= ٢ س ( س$^{٢}$ + ١ )$^{-٢}$ ( س$^{٢}$ + ١ − س$^{٢}$ + ١ )

= ٤ س ( س$^{٢}$ + ١ )$^{-٢}$ = ٤ س / ( س$^{٢}$ + ١ )$^{٢}$

د′( س ) = ٠ عندما : ٤ س = ٠ أى عندما : س = ٠

ببحث إشارة د′( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | − ∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′( س ) | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | − ١ | ↗ |

د ( ٠ ) = − ١ قيمة صغرى محلية

**(٢٦)** د ( س ) = ( س$^{٢}$ − ٣ ) / ( س − ٢ )

**الحل**

$\because$ د$(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣}{\text{س} - ٢} = (\text{س}^{٢} - ٣)(\text{س} - ٢)^{-١}$

، د متصلة لكل س $\in$ ح $- \{٢\}$

$\therefore$ د$'(\text{س}) = ٢\text{س}(\text{س} - ٢)^{-١} - (\text{س}^{٢} - ٣)(\text{س} - ٢)^{-٢}$

$= (\text{س} - ٢)^{-٢}\,(٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - \text{س}^{٢} + ٣)$

$= (\text{س} - ٢)^{-٢}\,(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣)$

$= (\text{س} - ٢)^{-٢}\,(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣)$

$= \dfrac{(\text{س} - ١)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

د$'(\text{س}) = ٠$ عندما : س $= ١$ ، س $= ٣$

، د$'(\text{س})$ غير معرفة عندما : س $= ٢ \notin$ ح $- \{٢\}$

ببحث إشارة د$''(\text{س})$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | ١ | | ٢ | | ٣ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'(\text{س})$ | + + | ٠ | − − | غير معرفة | − − | ٠ | + + |
| سلوك د$(\text{س})$ | ↗ | ٢ | ↘ | | ↘ | ٦ | ↗ |

د$(١) = ٢$ قيمة عظمى محلية ، د$(٣) = ٦$ قيمة صغرى محلية

**(٢٧)** د$(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٩}$

الحل

$\because$ د$(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٩} = (\text{س} - ٤)(\text{س}^{٢} + ٩)^{-١}$

، د متصلة لكل س $\in$ ح

$\therefore$ د$'(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ٩)^{-١} - ٢\text{س}(\text{س} - ٤)(\text{س}^{٢} + ٩)^{-٢}$

$= -\,(\text{س}^{٢} + ٩)^{-٢}\,(-\text{س}^{٢} - ٩ + ٢\text{س}^{٢} - ٨\text{س})$

$= (\text{س}^{٢} + ٩)^{-٢}\,(\text{س}^{٢} - ٨\text{س} - ٩)$

$= (\text{س} - ٢)^{-٢}\,(\text{س} + ١)(\text{س} - ٩)$

$= \dfrac{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٣)}{(\text{س}^{٢} + ٩)^{٢}}$

د$'(\text{س}) = ٠$ عندما : س $= -١$ ، س $= ٩$

ببحث إشارة د$''(\text{س})$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | $-١$ | | ٩ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'(\text{س})$ | + + | ٠ | − − | ٠ | + + |
| سلوك د$(\text{س})$ | ↗ | $\frac{١}{١٨}$ | ↘ | $-\frac{١}{٢}$ | ↗ |

د$(-١) = -\frac{١}{٢}$ قيمة عظمى محلية ، د$(٩) = \frac{١}{١٨}$ قيمة صغرى محلية

**(٢٨)** د$(\text{س}) = \sqrt[٣]{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

الحل

$\because$ د$(\text{س}) = \sqrt[٣]{(\text{س} - ٢)^{٢}} = (\text{س} - ٢)^{\frac{٢}{٣}}$ ، د متصلة لكل س $\in$ ح

$\therefore$ د$'(\text{س}) = \frac{٢}{٣}(\text{س} - ٢)^{-\frac{١}{٣}} = \dfrac{٢}{٣\sqrt[٣]{\text{س} - ٢}}$

$\because$ ، د$'(\text{س}) \neq ٠$ ، غير موجودة عند : س $= ٢$

ببحث إشارة د$''(\text{س})$ فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | $-\infty$ | ٢ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$'(\text{س})$ | − − | غير موجودة | + + |
| سلوك د$(\text{س})$ | ↘ | ٠ | ↗ |

د$(٢) = ٠$ قيمة صغرى محلية

**(٢٩)** د ( س ) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$

**الحل**

∵ د ( س ) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$ = $( س^{٢} - ٤ )^{\frac{١}{٣}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$( س ) = $\frac{١}{٣}( س^{٢} - ٤ )^{-\frac{٢}{٣}}$ × ٢ س = $\frac{٢ س}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}}$

، ∵ د$'$( س ) = ٠　　عندما : س = ٠ .

، د$'$( س ) غير موجودة عند : س = ٢ ، س = − ٢

ببحث إشارة د$'$( س ) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | −٢ | | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | − − | غير موجودة | − − | | + + | غير موجودة | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↘ | (−١,٦) | ↗ | | ↗ |

د ( ٠ ) = $\sqrt[٣]{− ٤}$ = − ١,٦　　قيمة صغرى محلية

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د على الفترة المعطاة لكل مما يأتى :

**(٣٠)** د ( س ) = $س^{٣}$ − ٩　　[ ٠ ، ٢ ]

**الحل**

∵ د ( س ) = $س^{٣}$ − ٩ ، د متصلة لكل س ∈ [ ٠ ، ٢ ]

∴ د$'$( س ) = ٣ $س^{٢}$ ، عندما : د$'$( س ) = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [ ٠ ، ٢ ]

∴ توجد نقطة حرجة للدالة هى : د ( ٠ ) = − ٩ ، ∵ د ( ٢ ) = − ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = − ١ ، قيمة صغرى مطلقة = − ٩

**(٣١)** د ( س ) = $س^{٣}$ − ١٢ س + ١٦　　[ − ٣ ، ٥ ]

**الحل**

∵ د ( س ) = $س^{٣}$ − ١٢ س + ١٦ ، د متصلة لكل س ∈ [ − ٣ ، ٥ ]

∴ د$'$( س ) = ٣ $س^{٢}$ − ١٢ = ٣ ( س − ٢ ) ( س + ٢ )

، عندما : د$'$( س ) = ٠ .　　∴ س = ٢ ∈ [ − ٣ ، ٥ ]

، س = − ٢ ∈ [ − ٣ ، ٥ ]　∴ توجد نقطتان حرجتان للدالة هما :

د ( − ٢ ) = ٣٢　　، د ( ٢ ) = ٠ .

، ∵ د ( − ٣ ) = ٢٥　، د ( ٥ ) = ٨١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٨١　، قيمة صغرى مطلقة = صفر

**(٣٢)** د ( س ) = $س^{٤}$ + ٢　　[ − ١ ، ٢ ]

**الحل**

∵ د ( س ) = $س^{٤}$ + ٢ ، د متصلة لكل س ∈ [ − ١ ، ٢ ]

∴ د$'$( س ) = ٤ $س^{٣}$ ، عندما : د$'$( س ) = ٠ . ∴ س = ٠ ∈ [ − ١ ، ٢ ]

∴ توجد نقطة حرجة للدالة هى : د ( ٠ ) = ٢

، ∵ د ( − ١ ) = ٣ ، د ( ٢ ) = ١٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣　، قيمة صغرى مطلقة = ٢

**(٣٣)** د ( س ) = ٢ $س^{٤}$ − $س^{٢}$ + ١　　[ − ١ ، ١ ]

**الحل**

∵ د ( س ) = ٢ $س^{٤}$ − $س^{٢}$ + ١ ، د متصلة لكل س ∈ [ − ١ ، ١ ]

∴ د$'$( س ) = ٨ $س^{٣}$ − ٢ س = ٢ س ( ٢ س − ١ ) ( ٢ س + ١ )

، عندما : د$'$( س ) = ٠ .　　∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∈ [ − ١ ، ١ ]

، س = − $\frac{١}{٢}$ ∈ [ − ١ ، ١ ] ، س = ٠ ∈ [ − ١ ، ١ ]

∴ توجد ثلاث نقط حرجة للدالة هى : د ( − $\frac{١}{٢}$ ) = $\frac{٧}{٨}$ ، د ( $\frac{١}{٢}$ ) = $\frac{٧}{٨}$

، د ( ٠ ) = ١　　، ∵ د ( − ١ ) = ٢ ، د ( ١ ) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢　، قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٧}{٨}$

**(٣٤)** د ( س ) = س ( س$^{٢}$ − ١٢ )　　[ −١ ، ٤ ]

الحل

∵ د ( س ) = س ( س$^{٢}$ − ١٢ ) = س$^{٣}$ − ١٢ س

، د متصلة لكل س ∈ [ −١ ، ٤ ]

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ − ١٢ = ٣ ( س − ٢ ) ( س + ٢ )

، عندما : د$'$ ( س ) = ٠　　∴ س = ٢ ∈ [ −١ ، ٤ ]

، س = −٢ ∉ [ −١ ، ٤ ] مرفوض　∴ توجد نقطة حرجة للدالة هى :

د ( ٢ ) = −١٦　　، ∵ د ( −١ ) = ١١ ، د ( ٤ ) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦　، قيمة صغرى مطلقة = −١٦

**(٣٥)** د ( س ) = ( س − ١ ) ( س − ٢ )$^{٢}$　　[ ٠ ، ٥ ]

الحل

∵ د ( س ) = ( س − ١ ) ( س − ٢ )$^{٢}$ = س$^{٣}$ − ٥ س$^{٢}$ + ٨ س − ٤

، د متصلة لكل س ∈ [ ٠ ، ٥ ]

∴ د$'$ ( س ) = ٣ س$^{٢}$ − ١٠ س + ٨ = ( ٣ س − ٢ ) ( س − ٢ )

، عندما : د$'$ ( س ) = ٠　　∴ س = $\frac{٢}{٣}$ ∈ [ ٠ ، ٥ ]

، س = ٢ ∈ [ ٠ ، ٥ ]　∴ توجد نقطتان حرجتان للدالة هما :

د ( $\frac{٢}{٣}$ ) = −$\frac{١٦}{٢٧}$ ، د ( ٢ ) = ٠ ، ∵ د ( ٠ ) = −٤ ، د ( ٥ ) = ٣٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٦　، قيمة صغرى مطلقة = −٤

**(٣٦)** د ( س ) = { س$^{٣}$ − ٣ س$^{٢}$ عندما س ≤ ٠ ؛ س$^{٢}$ − ٢ س عندما س > ٠ }　　[ −٣ ، ٣ ]

الحل

∵ الدالة د متعددة التعريف مجالها ح

، د ( ٠$^{+}$ ) = د ( ٠$^{-}$ ) = د ( ٠ ) = ٠　∴ الدالة د متصلة عند : س = ٠

، ∵ د$'$ ( ٠$^{+}$ ) = نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) $\frac{د ( ٠ + هـ ) − د ( ٠ )}{هـ}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) $\frac{( ٠ + هـ )^{٣} − ٣ ( ٠ + هـ )^{٢} − ٠}{هـ}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{+}$) ( هـ$^{٢}$ − ٣ هـ ) = صفر

، ∵ د$'$ ( ٠$^{-}$ ) = نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) $\frac{د ( ٠ + هـ ) − د ( ٠ )}{هـ}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) $\frac{( ٠ + هـ )^{٢} − ٢ ( ٠ + هـ ) − ٠}{هـ}$

= نهـا (هـ ← ٠$^{-}$) ( هـ − ٢ ) = −٢

∴ د$'$ ( ٠$^{+}$ ) ≠ د$'$ ( ٠$^{-}$ )　∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : س = ٠

∴ د$'$ ( س ) = { ٣ س$^{٢}$ − ٦ س عندما س < ٠ ؛ غير موجودة عندما س = ٠ ؛ ٢ س − ٢ عندما س > ٠ }

بوضع : د$'$ ( س ) = ٠　يكون :

عندما : س < ٠　فإن : ٣ س$^{٢}$ − ٦ س = ٣ س ( س − ٢ ) = ٠

∴ س = ٠ ∉ ] −∞ ، ٠ [　، س = ٢ ∉ ] −∞ ، ٠ [ مرفوضان

عندما : س > ٠　فإن : ٢ س − ٢ = ٢ ( س − ١ ) = ٠

∴ س = ١ ∉ ] ٠ ، ∞ [　　∴ للدالة نقط حرجة هى :

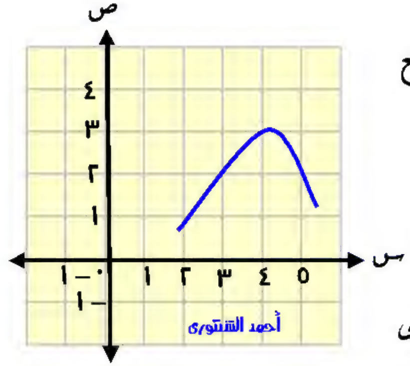
د ( ٢ ) = −١　، ∵ د ( −٣ ) = −٥٤ ، د ( ٣ ) = ٣

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣　، قيمة صغرى مطلقة = −٥٤

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص المعطاة فى كل مما يأتى :

**(٣٧)** د ( ٤ ) = ٣ ، د/ ( ٤ ) = ٠ .
، د// ( س ) > ٠ لكل س ∈ ح

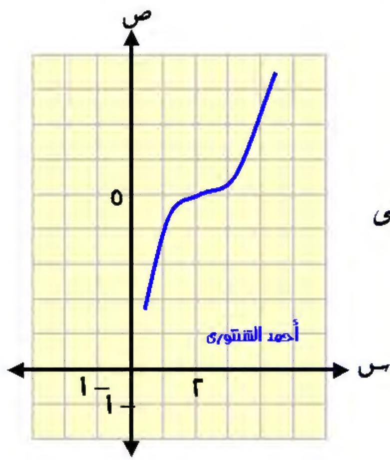
**الحل**




∵ د ( ٤ ) = ٣
∴ المنحنى يمر بالنقطة ( ٤ ، ٣ )
، ∵ د/ ( ٤ ) = ٠ .
∴ المماس للمنحنى عند النقطة ( ٤ ، ٣ ) أفقى
، ∵ د// ( س ) > ٠ . لكل س ∈ ح
∴ المنحنى محدب لأسفل لكل س ∈ ح

**(٣٨)** د ( ٢ ) = ٥ ، د/ ( ٢ ) = ٠ . ، د// ( س ) > ٠ .
عندما : س > ٢ ، د// ( س ) < ٠ . عندما : س < ٢

**الحل**

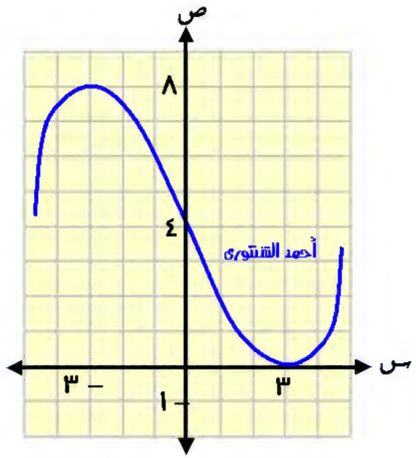



∵ د ( ٢ ) = ٥
∴ المنحنى يمر بالنقطة ( ٢ ، ٥ )
، ∵ د/ ( ٢ ) = ٠ .
∴ المماس للمنحنى عند النقطة ( ٢ ، ٥ ) أفقى
، ∵ د// ( س ) > ٠ . عندما : س > ٢
∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] – ∞ ، ٢ [
، ∵ د/ ( س ) < ٠ . عندما : س < ٢
∴ المنحنى محدب لأعلى فى ] ٢ ، ∞ [

**(٣٩)** د ( – ٣ ) = ٨ ، د ( ٠ ) = ٤ ، د ( ٣ ) = ٠ .
، د/ ( س ) < ٠ . عندما : س > – ٣ ، عندما : س < ٣
، د// ( س ) < ٠ . عندما : س > ٠ .
، د// ( س ) > ٠ . عندما : س < ٠ .

**الحل**

∵ د ( – ٣ ) = ٨ ، د ( ٠ ) = ٤
، د ( ٣ ) = ٠ . ∴ المنحنى يمر بالنقط
( – ٣ ، ٨ ) ، ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٣ ، ٠ )
، ∵ د/ ( س ) < ٠ . عندما : س > – ٣
، عندما : س < ٣
∴ المنحنى متزايد على ] – ٣ ، ٣ [
، ∵ د// ( س ) < ٠ . عندما : س > ٠ .
∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] – ∞ ، ٠ . [
، ∵ د/ ( س ) > ٠ . لكل س < ٠ .
∴ المنحنى محدب لأعلى فى ] ٠ . ، ∞ [




**(٤٠)** د ( ٠ ) = ٣ ، د/ ( ٢ ) = د ( – ٢ ) = ٠ .
، د/ ( س ) > ٠ . عندما : – ٢ > س > ٢
، د// ( س ) > ٠ . عندما : س > ٠ .
، د// ( س ) < ٠ . عندما : س < ٠ .

**الحل**

∵ د ( ٠ ) = ٣ ∴ المنحنى يمر بالنقطة ( ٠ ، ٣ )
، ∵ د/ ( ٢ ) = د ( – ٢ ) = ٠ . ∴ للمنحنى نقط حرجة عند س = ٢ ،
س = – ٢ و عند هاتين النقطتين المماس // محور السينات

، ∵ د/( س ) > ٠ عندما : −٢ < س < ٢

∴ المنحنى متناقص على ]−٢ ، ٢[

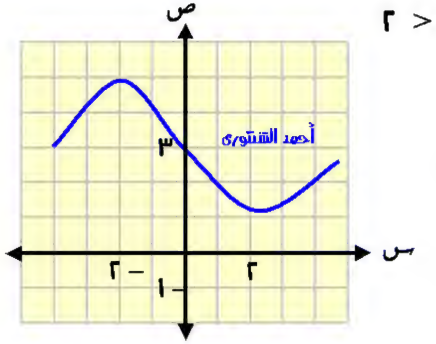
، ∵ د//( س ) > ٠ عندما : س < ٠

∴ المنحنى محدب لأعلى فى ]−∞ ، ٠[

، ∵ د/( س ) < ٠ لكل س > ٠

∴ المنحنى محدب لأسفل فى ]٠ ، ∞[

، النقطة ( ٠ ، ٣ ) نقطة إنقلاب




ارسم الشكل العام لكل من المنحنيات التالية مبيناً عليها القيم القصوى المحلية و نقط الانقلاب إن وجدت :

**(٤١)** د ( س ) = ٤ − س٢

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، زوجية أى متماثلة حول محور الصادات

∵ د ( س ) = ٤ − س٢ ∴ د/( س ) = −٢ س ، د//( س ) = −٢

للدالة نقط حرجة عندما : د/( س ) = −٢ س = ٠

أى عندما : س = ٠ ، و تكون د متزايدة فى ]−∞ ، ٠[ ، متناقصة فى ]٠ ، ∞[ ، ( ٠ ، ٤ ) نقطة قيمة عظمى محلية

، د//( س ) < ٠ فى ]−∞ ، ∞[ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، لاحظ الجدول التالى :

| س | −∞ | ٠ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د/( س ) | + + | ٠ | − − |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ |
| إشارة د//( س ) | − − | | |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | | |
| ص | | ٤ (قيمة عظمى محلية) | |

بعض النقط الاضافية :

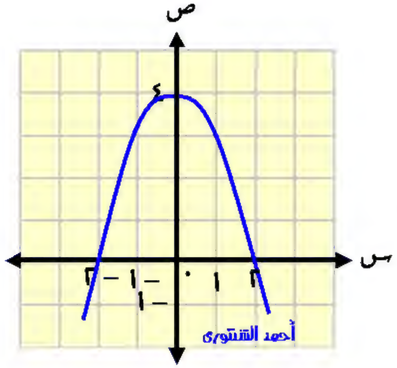
بوضع : د ( س ) = ٤ − س٢ = ٠

∴ ( س + ٢ ) ( س − ٢ ) = ٠

∴ س = −٢ ، س = ٢

، عندما : س = ١ فإن : د ( س ) = ٣

، عندما : س = −١ فإن : د ( س ) = ٣




**(٤٢)** د ( س ) = س٢ − ٤ س + ٣

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د ( س ) = س٢ − ٤ س + ٣

∴ د/( س ) = ٢ س − ٤ = ٢ ( س − ٢ ) ، د//( س ) = ٢

للدالة نقط حرجة عندما : د/( س ) = ٢ ( س − ٢ ) = ٠

أى عندما : س = ٢ ، و تكون د متناقصة فى ]−∞ ، ٢[

، و متزايدة فى ]٢ ، ∞[ ، ( ٢ ، −١ ) نقطة قيمة صغرى محلية

، د//( س ) > ٠ فى ]−∞ ، ∞[ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، لاحظ الجدول التالى :

| س | −∞ | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د/( س ) | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ |
| إشارة د//( س ) | + + | | |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | |
| ص | | −١ (قيمة صغرى محلية) | |

بعض النقط الاضافية :

بوضع : $د(س) = س^2 - 4س + 3 = 0$

$\therefore (س - 1)(س - 3) = 0$

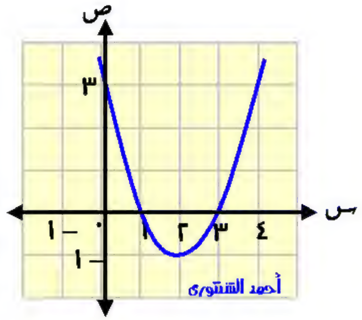
$\therefore س = 1$ ، $س = 3$

، عندما : $س = 1$ فإن : $د(س) = 0$

، عندما : $س = 3$ فإن : $د(س) = 0$

، عندما : $س = 0$ فإن : $د(س) = 3$

، عندما : $س = 4$ فإن : $د(س) = 3$



**(٤٣)** $د(س) = س(س + 3)^2$

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

$\because د(س) = س(س + 3)^2 = س^3 + 6س^2 + 9س$

$\therefore د'(س) = 3س^2 + 12س + 9 = 3(س + 1)(س + 3)$

، $د''(س) = 6س + 12 = 6(س + 2)$

للدالة نقط حرجة عندما : $د'(س) = 3(س + 1)(س + 3) = 0$

أى عندما : $س = -1$ ، $س = -3$

، و تكون د متناقصة فى $]-3 ، -1[$

، و متزايدة فى كل من : $]-\infty ، -1[$ ، $]-3 ، \infty[$ ،

$(-1 ، -4)$ نقطة قيمة صغرى محلية ، $(-3 ، 0)$ نقطة قيمة عظمى محلية

، $د''(س) = 6(س + 2) = 0$ أى عندما : $س = -2$

، $د''(س) < 0$ فى $]-\infty ، -2[$

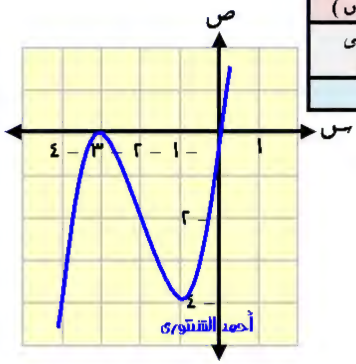
و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، $د''(س) > 0$ فى $]-2 ، \infty[$

و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة $(-2 ، -2)$ نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | $\infty$ | $-1$ | | $-2$ | | $-3$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د'(س)$ | + + | 0 | − − | | − − | 0 | + + |
| سلوك $د(س)$ | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة $د''(س)$ | + + | | + + | 0 | − − | | − − |
| تحدب منحنى $د(س)$ | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | | لأعلى |
| ص | | $-4$ | | $-2$ | | 0 | |
| | | قيمة صغرى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة عظمى محلية | |



بعض النقط الاضافية :

، عندما : $س = -4$ فإن : $د(س) = -4$

، عندما : $س = 0$ فإن : $د(س) = 0$

**(٤٤)** $د(س) = \frac{1}{3}س^3 - 4س + \frac{1}{3}$

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

$\because د(س) = \frac{1}{3}س^3 - 4س + \frac{1}{3}$

$\therefore د'(س) = س^2 - 4 = (س + 2)(س - 2)$ ، $د''(س) = 2س$

للدالة نقط حرجة عندما : $د'(س) = (س + 2)(س - 2) = 0$

أى عندما : $س = -2$ ، $س = 2$ ، و تكون د متناقصة فى $]-2 ، 2[$

، و متزايدة فى $]-\infty ، -2[$ ، $]2 ، \infty[$

، $(-2 ، \frac{17}{3})$ نقطة قيمة عظمى محلية

، $(2 ، -5)$ نقطة قيمة صغرى محلية

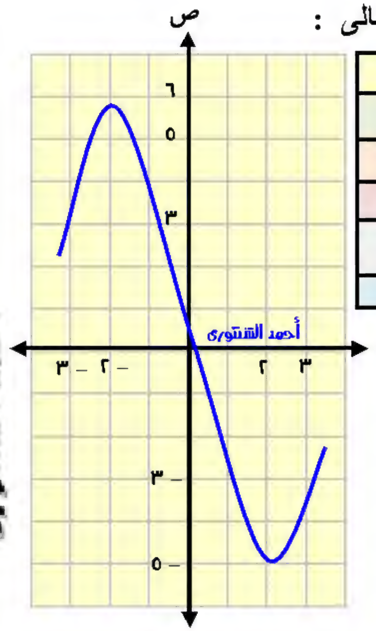
، $د''(س) = 2س = 0$ أى عندما : $س = 0$

، د$^{''}$( س ) < ٠ فى ] −∞ ، ٠ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، د$^{''}$( س ) > ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، $\frac{١}{٣}$ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | ∞− | ٢− | | ٠ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$^{'}$( س ) | + + | ٠ | − − | | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د$^{''}$( س ) | − − | | − − | ٠ | + + | | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | $\frac{١٧}{٣}$ | | $\frac{١}{٣}$ | | ٥− | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = −٣ فإن : د ( س ) = $\frac{١٠}{٣}$

، عندما : س = ٣ فإن : د ( س ) = − $\frac{١٠}{٣}$

**(٤٥)** د ( س ) = ٢ س$^{٣}$ − ٩ س$^{٢}$ + ١٢ س − ٢

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د ( س ) = ٢ س$^{٣}$ − ٩ س$^{٢}$ + ١٢ س − ٢

∴ د$^{'}$( س ) = ٦ س$^{٢}$ − ١٨ س + ١٢ = ٦ ( س − ١ ) ( س − ٢ )

، د$^{''}$( س ) = ١٢ س − ١٨ = ٦ ( ٢ س − ٣ )

للدالة نقط حرجة عندما : د$^{'}$( س ) = ٦ ( س − ١ ) ( س − ٢ ) = ٠

أى عندما : س = ١ ، س = ٢ ، و تكون د متناقصة فى ] ١ ، ٢ [



، و متزايدة فى ] −∞ ، ١ [ ، ] ٢ ، ∞ [

، ( ١ ، ٣ ) نقطة قيمة عظمى محلية ، ( ٢ ، ٢ ) نقطة قيمة صغرى محلية

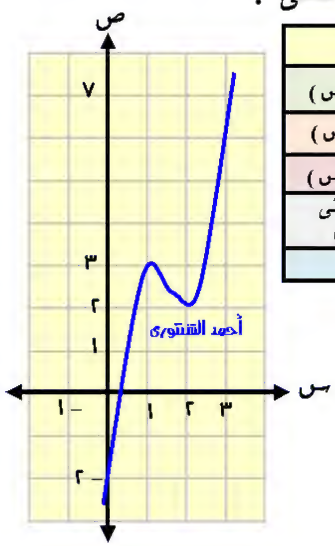
، د$^{''}$( س ) = ٦ ( ٢ س − ٣ ) = ٠ أى عندما : س = $\frac{٣}{٢}$

، د$^{''}$( س ) < ٠ فى ] −∞ ، $\frac{٣}{٢}$ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، د$^{''}$( س ) > ٠ فى ] $\frac{٣}{٢}$ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | ∞− | ١ | | $\frac{٣}{٢}$ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$^{'}$( س ) | + + | ٠ | − − | | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د$^{''}$( س ) | − − | | − − | ٠ | + + | | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | ٣ | | $\frac{٥}{٢}$ | | ٢ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = ٠ فإن : د ( س ) = −٢

، عندما : س = ٣ فإن : د ( س ) = ٧

**(٤٦)** د ( س ) = ٥ + ٣ س − س$^{٣}$

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د ( س ) = ٥ + ٣ س − س$^{٣}$

∴ د$^{'}$( س ) = ٣ − ٣ س$^{٢}$ = −٣ ( س − ١ ) ( س + ١ )

، د$^{''}$( س ) = −٦ س

للدالة نقط حرجة عندما : د$'$( س ) = – ٣ ( س – ١ ) ( س + ١ ) = ٠ .

أى عندما : س = ١ ، س = – ١ ، و تكون د متزايدة فى ] – ١ ، ١ [

، و متناقصة فى ] – ∞ ، – ١ [ ، ] ١ ، ∞ [

، ( – ١ ، ٣ ) نقطة قيمة صغرى محلية ، ( ١ ، ٧ ) نقطة قيمة عظمى محلية

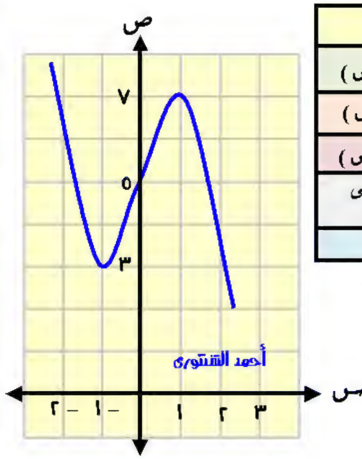
، د$''$( س ) = – ٦ س = ٠ أى عندما : س = ٠ .

، د$''$( س ) > ٠ فى ] – ∞ ، ٠ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، د$''$( س ) < ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ٥ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | – ∞ | (– ١) | | (٠) | | (١) | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$( س ) | – – | (٠) | + + | | + + | (٠) | – – |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |
| إشارة د$''$( س ) | + + | | + + | (٠) | – – | | – – |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | | لأعلى |
| ص | | (٣) | | (٥) | | (٧) | |
| | | قيمة صغرى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة عظمى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

، عندما : س = ٢ فإن : د ( س ) = ٣

، عندما : س = – ٢ فإن : د ( س ) = ٧

**(٤٧)** عين قيم ؟ ، ب ، حـ ، ء للمنحنى :

ص = ؟ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ء بحيث تكون له قيمة عظمى محلية عند ( ٠ ، ٦ ) و قيمة صغرى محلية عند ( ١ ، ٥ )

ثم أرسم المنحنى

**الحل**

∵ ص = ؟ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ء

∴ ص$'$ = ٣ ؟ س$^{٢}$ + ٢ ب س + حـ

، ∵ للمنحنى قيمة عظمى محلية عند ( ٠ ، ٦ )

∴ ص = ٦ عندما : س = ٠ . ∴ ء = ٦

، ص$'$ = ٠ عندما : س = ٠ . ∴ حـ = ٠ .

، ∵ للمنحنى قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٥) ∴ ص = ٥ عندما : س = ١ .

∴ ؟ + ب + ٦ = ٥ ∴ ؟ + ب = – ١ (١)

، ص$'$ = ٠ عندما : س = ١ . ∴ ٣ ؟ + ٢ ب = ٠ (٢)

بضرب (١) × ( – ٢ ) و جمعها مع (٢) ينتج : ؟ = ٢

، بالتعويض فى (١) ينتج : ب = – ٣

∴ ص = ٢ س$^{٣}$ – ٣ س$^{٢}$ + ٦

∴ ص$'$ = ٦ س$^{٢}$ – ٦ س = ٦ س ( س – ١ )

، ص$''$ = ١٢ س – ٦ = ٦ ( ٢ س – ١ )

، ∵ للمنحنى قيمة عظمى محلية عند ( ٠ ، ٦ )

، قيمة صغرى محلية عند ( ١ ، ٥ )

∴ المنحنى متزايد فى ] ٠ ، ١ [ ، و متناقص فى ] – ∞ ، ٠ [ ، ] ١ ، ∞ [

و بوضع : ص$''$ = ٠ ∴ ٦ ( ٢ س – ١ ) = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

، ص$''$ < ٠ فى ] – ∞ ، $\frac{١}{٢}$ [ و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة

، ص$''$ > ٠ فى ] $\frac{١}{٢}$ ، ∞ [ و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١١}{٢}$ ) نقطة انقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | ∞ | ١ | | ½ | | ٠ | −∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$^{/}$( س ) | + + | ٠ | − − | | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د$^{//}$( س ) | + + | | + + | ٠ | − − | | − − |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | | | لأعلى | | |
| ص | | ٥ | | $\frac{١١}{٢}$ | | ٦ | |
| | | قيمة صغرى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة عظمى محلية | |

بعض النقط الاضافية :

، عندما : س = ٢ فإن : ص = ١٠

، عندما : س = −١ فإن : ص = ١




**(٤٨)** سلك طوله ٢٠ متراً يراد تشكيله على هيئة مستطيل ما هى أبعاد المستطيل التى تجعل المساحة أكبر ما يمكن ؟

**الحل**

نفرض أن : بعدى المستطيل هما : س ، ص متر ، ∵ طول السلك = ٢٠ متراً

∴ محيط المستطيل = ٢ س + ٢ ص = ٢٠

و منها : ص = ١٠ − س  (١)




∵ مساحة المستطيل = د ( س ) = س ص

= س ( ١٠ − س ) = ١٠ س − س$^{٢}$

∴ د$^{/}$( س ) = ١٠ − ٢ س ، د$^{//}$( س ) = −٢

، د$^{/}$( س ) = ٠ عندما : ١٠ − ٢ س = ٠ أى عندما : س = ٥

اختبار المشتقة الثانية : ∵ د$^{//}$( ٥ ) = −٢ < ٠

∴ عندما : س = ٥ تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن

، من (١) ينتج : ص = ٥ ∴ بعدى المستطيل هما : ٥ ، ٥ متر

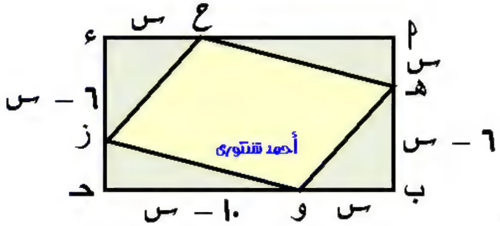
**(٤٩)** فى الشكل المقابل :

ﻫ ب حـ ء مستطيل

**(ﻫ)** أثبت أن : الشكل هـ و ز ح متوازى أضلاع مساحته

م = ٢ س$^{٢}$ − ١٦ س + ٦٠

**(ب)** أوجد أصغر قيمة ممكنة للمساحة م




**الحل**

من هندسة الشكل نجد : ﻫ ح = ١٠ − س ، ز حـ = س

∴ ﻫ ب = ١٠ وحدة طول ، ب حـ = ٦ وحدة طول

، △ ﻫ ح هـ ≡ △ حـ و ز ∴ ح هـ = و ز

، △ ب هـ و ≡ △ ء ز ح ∴ هـ و = ز ح

∴ عندما : الشكل هـ و ز ح متوازى أضلاع

**(ﻫ)** ∵ مساحة متوازى الأضلاع هـ و ز ح = م = مساحة المستطيل ﻫ ب حـ ء − ٢ مساحة △ ﻫ ح هـ − ٢ مساحة △ ب هـ و

∴ مساحة متوازى الأضلاع هـ و ز ح = ١٠ × ٦

− ٢ × ½ س × ( ١٠ − س ) − ٢ × ½ س × ( ٦ − س )

∴ مساحة متوازى الأضلاع هـ و ز ح = م = ٢ س$^{٢}$ − ١٦ س + ٦٠

∴ د ( س ) = ٢ س$^{٢}$ − ١٦ س + ٦٠

**(ب)** ∵ مساحة متوازى الأضلاع هـ و ز ح = م =

د ( س ) = ٢ س$^{٢}$ − ١٦ س + ٦٠

، د كثيرة حدود فهى متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$^{/}$( س ) = ٤ س$^{٢}$ − ١٦ س = ٤ س ( س − ٤ )

، د$^{//}$( س ) = ٨ س − ١٦ ، للدالة نقط حرجة عندما : د$^{/}$( س ) = ٠

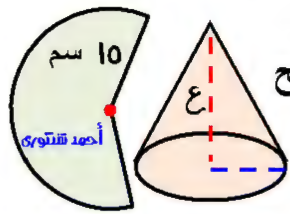
أى عندما : س = ٤ ، س = ٠ مرفوض

، باستخدام اختبار المشتقة الثانية نجد : عندما : س = ٤

يكون : $د^{//}(٠) = ١٦ > ٠$ ∴ $د(٤) = ٢٨$ قيمة صغرى محلية

∴ أصغر قيمة ممكنة للمساحة م = ٢٨ وحدة مربعة

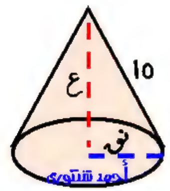
**(٥٠)** قطعة من الورق على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٥ سم طويت لتشكل سطح مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع سم بين أن حجم المخروط ح $سم^{٣}$ يعطى بالعلاقة :




$$ح = \frac{١}{٣} \pi ع ( ٢٢٥ - ع^{٢} )$$

ثم أوجد أكبر حجم ممكن لهذا المخروط

الحل




من هندسة الشكل نجد : $نق^{٢} = ٢٢٥ - ع^{٢}$

، ∵ حجم المخروط = $ح = \frac{١}{٣} \pi نق^{٢} ع$

∴ حجم المخروط يعطى من العلاقة : $ح = \frac{١}{٣} \pi ع ( ٢٢٥ - ع^{٢} )$

، ∵ $ح = د(نق) = \frac{١}{٣} \pi ع ( ٢٢٥ - ع^{٢} ) = \frac{١}{٣} \pi ( ٢٢٥ ع - ع^{٣} )$

∴ $د^{/}(نق) = \frac{١}{٣} \pi ( ٢٢٥ - ٣ ع^{٢} )$ ، $د^{//}(نق) = -٢ \pi ع$

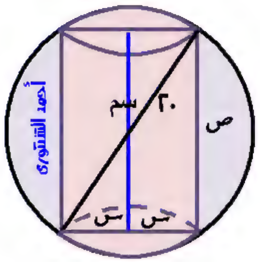
، ∵ $د^{/}(نق) = ٠$ عندما : $٢٢٥ - ٣ ع^{٢} = ٠$ أى عندما : $ع = ٥\sqrt{٣}$

، باستخدام اختبار المشتقة الثانية نجد : عندما : $ع = ٥\sqrt{٣}$ يكون :

$د^{//}(نق) = -١٥٠ \pi < ٠$ ∴ $د(٥\sqrt{٣}) = ٢٥٠\sqrt{٣} \pi$ قيمة عظمى محلية

∴ أكبر حجم ممكن للمخروط = $٢٥٠\sqrt{٣} \pi$ $سم^{٣}$

**(٥١)** أوجد ارتفاع اسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل كرة مفرغة طول نصف قطرها من الداخل ١٠ سم ، عندما تكون المساحة الجانبية للاسطوانة أكبر ما يمكن




الحل

بفرض أن طول نصف قطر الاسطوانة = س

، ارتفاع الاسطوانة = ص

من هندسة الشكل نجد : $ص^{٢} = ٤٠٠ - ٤ س^{٢}$

∴ $ص = \sqrt{٤٠٠ - س^{٢}} = ( ٤٠٠ - س^{٢} )^{\frac{١}{٢}}$ (١)

، ∵ المساحة الجنبية للاسطوانة = $٢ \pi س ص$

∴ المساحة الجنبية للاسطوانة = $د(س) = ٢ \pi س ( ٤٠٠ - س^{٢} )^{\frac{١}{٢}}$

∴ $د^{/}(س) = ٢ \pi ( ٤٠٠ - س^{٢} )^{\frac{١}{٢}} + \pi س ( ٤٠٠ - س^{٢} )^{-\frac{١}{٢}} ( -٢ س )$

$= ٢ \pi ( ٤٠٠ - س^{٢} )^{-\frac{١}{٢}} ( ٤٠٠ - س^{٢} - س^{٢} )$

$= -٤ \pi ( ٤٠٠ - س^{٢} )^{-\frac{١}{٢}} ( س^{٢} - ٢٠٠ )$

$= -٤ \pi ( ٤٠٠ - س^{٢} )^{-\frac{١}{٢}} ( س + ١٠\sqrt{٢} ) ( س - ١٠\sqrt{٢} )$

، ∵ $د^{/}(س) = ٠$ عندما : $س = -١٠\sqrt{٢}$ مرفوض ، $س = ١٠\sqrt{٢}$

، من اختبار المشتقة الأولى للتزايد و التناقص كما بالجدول نجد :

| س | $-\infty$ | | $١٠\sqrt{٢}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د^{/}(س)$ | + | + | ٠ | − | − |
| سلوك د(س) | ↗ | | | | ↘ |

عندما : $س = ١٠\sqrt{٢}$

يكون طول نصف قطر الاسطوانة أكبر ما يمكن ، من (١) ينتج : ص = ارتفاع الاسطوانة = $١٠\sqrt{٢}$ سم

**(٥٢)** أثبت أنه لجميع قيم س ∈ ح تتحقق المتباينة :

$$\frac{س}{أ س^{٢} + ب} \le \frac{١}{٢\sqrt{أ ب}}$$ حيث : أ > ٠ ، ب > ٠

**الحل**

نفرض أن : د ( س ) = $\frac{\text{س}}{\text{أ س}^2 + \text{ب}}$ = س ( أ س² + ب )$^{-1}$

∴ د′( س ) = ( أ س² + ب )$^{-1}$ − س ( أ س² + ب )$^{-2}$ ( ٢ أ س )

= ( أ س² + ب )$^{-2}$ ( أ س² + ب − ٢ أ س² )

= ( أ س² + ب )$^{-2}$ ( ب − أ س² ) ٢ أ س

، د″( س ) = − ٢ ( أ س² + ب )$^{-3}$ ( ٢ أ س ) ( أ س² + ب )$^{-2}$

= − ٢ أ س ( أ س² + ب )$^{-3}$ ( ٢ س + أ س² + ب )

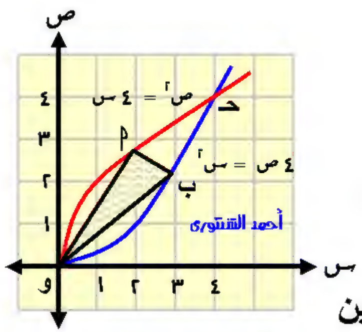
، ∵ د′( س ) = ٠ 　عندما : س = $\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{أ}}}$ 　حيث : أ > ٠ ، ب > ٠ .

، د″( $\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{أ}}}$ ) < ٠ 　∴ د ( س ) قيمة عظمى

، د ( $\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{أ}}}$ ) = $\frac{\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{أ}}}}{\text{أ} \times \frac{\text{ب}}{\text{أ}} + \text{ب}}$ = $\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\text{٢ ب} \sqrt{\text{أ}}}$ = $\frac{1}{2\sqrt{\text{أ ب}}}$

∴ $\frac{\text{س}}{\text{أ س}^2 + \text{ب}}$ ≤ $\frac{1}{2\sqrt{\text{أ ب}}}$ لجميع قيم س ∈ ح 　حيث : أ > ٠ ، ب > ٠ .

**(٥٣)** لتكن حـ نقطة تقاطع المنحنيين :
ص² = ٤ س ، س² = ٤ ص ،
النقطة أ تقع على المنحنى :
ص² = ٤ س ، احداثيها السينى ٢ ،
النقطة ب ( س ، ص ) تقع على
المنحنى : ٤ ص = س² بين النقطتين
و ، حـ ، أوجد أكبر مساحة للمثلث و أ ب




**الحل**

∵ معادلة المنحنى الأول هى : ص² = ٤ س ،

معادلة المنحنى الثانى هى : ٤ ص = س² 　بالتربيع ينتج : ١٦ ص² = س⁴

بالتعويض فى معادلة المنحنى الأول ينتج : ١٦ × ٤ س = س⁴

و منها : س ( س³ − ٦٤ ) 　∴ س = ٠ ، أ، س = ٤

∴ المنحنيان يتقاطعان فى النقطتين : و ( ٠ ، ٠ ) ، حـ ( ٤ ، ٤ )

، ∵ النقطة أ تقع على المنحنى : ص² = ٤ س ، احداثيها السينى ٢

∴ ص² = ٨ و منها : ص = ٢ $\sqrt{2}$ 　∴ أ ( ٢ ، ٢ $\sqrt{2}$ )

، ∵ النقطة ب ( س ، ص ) تقع على المنحنى : ٤ ص = س²

∴ ص = ¼ س² 　أى أن : ب ( س ، ¼ س² )

∴ مساحة △ و أ ب = ½ $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٢\sqrt{2} & ١ \\ \text{س} & \frac{1}{4}\text{س}^2 & ١ \end{vmatrix}$ = ½ × | ½ س² − ٢ $\sqrt{2}$ س |

∴ مساحة △ و أ ب = د ( س ) = $\sqrt{2}$ س − ¼ س²

∴ د′( س ) = $\sqrt{2}$ − ½ س ، د″( س ) = − ½

، ∵ د′( س ) = ٠ 　عندما : $\sqrt{2}$ − ½ س = ٠ .

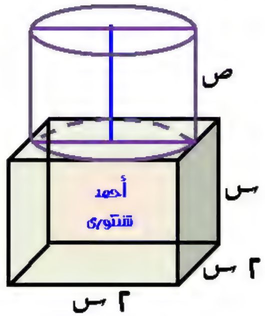
أى عندما : س = ٢ $\sqrt{2}$ ، ∵ د″( ٢ $\sqrt{2}$ ) = − ½ < ٠ . قيمة عظمى

∴ مساحة △ و أ ب تكون أكبر ما يمكن عندما : س = ٢ $\sqrt{2}$

∴ مساحة △ و أ ب = $\sqrt{2}$ × ٢ $\sqrt{2}$ − ¼ × ( ٢ $\sqrt{2}$ )²

= ٤ − ٢ = ٢ وحدة مربعة

(٥٤) خزان مغطى للمياه مكون من متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢ س ، و ارتفاعه س ، يعلوه اسطوانة دائرية قائمة طول قطرها ٢ س ، و ارتفاعها ص ، إذا كان حجم الخزان الكلى ٢٧ متراً مكعباً فاحسب قيمة س التى تجعل مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن




الحل

∵ حجم الخزان الكلى = ٢٧ متراً مكعباً

∴ ٢ س × ٢ س × س + π س$^2$ ص = ٢٧

∴ ٤ س$^3$ + π س$^2$ ص = ٢٧

و منها : ص = $\frac{٢٧ - ٤ س^3}{\pi س^2}$

، ∵ مساحة الخزان السطحية = ٤ × ٢ س × س + ٢ × ٤ س$^2$ + ٢ π س ص

∴ مساحة الخزان السطحية = د ( س ) = ١٦ س$^2$ + ٢ π س × $\frac{٢٧ - ٤ س^3}{\pi س^2}$

= ١٦ س$^2$ + ٥٤ س$^{-1}$ - ٨ س$^2$ = ٨ س$^2$ + ٥٤ س$^{-1}$

∴ د$'$( س ) = ١٦ س - ٥٤ س$^{-2}$ ، د$''$( س ) = ١٦ + ١٠٨ س$^{-3}$

، ∵ د$'$( س ) = ٠ عندما : ١٦ س - ٥٤ س$^{-2}$ = ٠

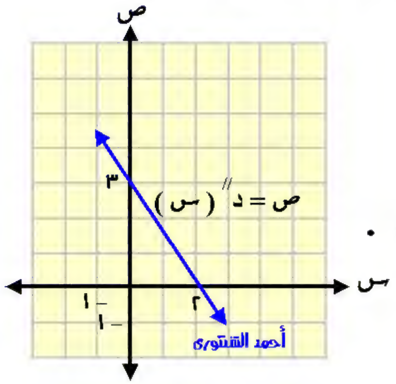
أى عندما : ٢ س$^{-2}$ ( ٨ س$^3$ - ٢٧ ) = ٠ و منها : س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ د$''$( $\frac{٣}{٢}$ ) = ٤٨ > ٠ قيمة صغرى

∴ قيمة س التى مساحة الخزان السطحية أقل ما يمكن هى : $\frac{٣}{٢}$ متر

## حل تمارين اختبار تراكمى صفحة ٩٣ بالكتاب المدرسى

(١) يبين الشكل المقابل منحنى د$'$( س ) للدالة د ، أكمل :




( أ ) منحنى د محدب لأعلى عندما :
س ∋ ....

( ب ) منحنى د له نقطة انقلاب عند :
س = ....

( حـ ) إذا كان : د$'$( -١ ) = د$'$( ٥ ) = ٠ .
فإنه يوجد للدالة د قيمة عظمى محلية عند : س = ....

( ء ) د متناقصة لكل س ∋ ....

الحل

( أ ) ∵ د$''$( س ) > ٠ عندما : س ∋ ] ٢ ، ∞ [

∴ منحنى د محدب لأعلى عندما : س ∋ ] ٢ ، ∞ [

( ب ) ∵ د$''$( س ) > ٠ عندما : س ∋ ] ٢ ، ∞ [

∴ منحنى د محدب لأعلى عندما : س ∋ ] ٢ ، ∞ [

، ∵ د$''$( س ) < ٠ عندما : س ∋ ] -∞ ، ٢ [

∴ منحنى د محدب لأسفل عندما : س ∋ ] -∞ ، ٢ [

∴ منحنى د له نقطة انقلاب عند : س = ٢

( حـ ) ∵ د$'$( ٥ ) = ٠ ، منحنى د محدب لأعلى عندما : س ∋ ] ٢ ، ∞ [

∴ يوجد للدالة د قيمة عظمى عند : س = ٥

( ء ) ∵ د$'$( ٥ ) = ٠ ، منحنى د محدب لأعلى عندما : س ∋ ] ٢ ، ∞ [

، د$'$( -١ ) = ٠ ، منحنى د محدب لأسفل عندما : س ∋ ] -∞ ، ٢ [

∴ د متناقصة لكل س ∋ ] -∞ ، -١ ] ، [ ٥ ، ∞ [

**(٢)** إذا كان : د/(س) = أ س + ب حيث : أ < ٠ .

**(أ)** أبحث وجود قيمة قصوى للدالة د مبيناً نوعها إن وجدت

**(ب)** حدد فترات تزايد و تناقص الدالة د عندما :

أ = −٢ ، ب = ٥

**الحل**

**(أ)** ∵ د/(س) = أ س + ب حيث : أ < ٠ .

∴ د//(س) = أ حيث : أ < ٠ .

، ∵ د/(س) = ٠ عندما : س = $\frac{-ب}{أ}$

∴ للدالة د قيمة عظمى محلية عندما : س = $\frac{-ب}{أ}$

**(ب)** عندما : أ = −٢ ، ب = ٥ ∴ د/(س) = −٢ س + ٥

∴ د/(س) = ٠ عندما : س = $\frac{٥}{٢}$

| س | −∞ | | $\frac{٥}{٢}$ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/(س) | | + + | ٠ | − − | |
| سلوك د(س) | | ↗ | | ↘ | |

∴ د(س) متزايدة على ]−∞ ، $\frac{٥}{٢}$[ ، و متناقصة على ]$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[

**(٣)** حدد النقط الحرجة و فترات التزايد و التناقص للدالة د حيث : د(س) = $\sqrt[٣]{(س^٢ - ١)^٢}$

**الحل**

∵ د(س) = $\sqrt[٣]{(س^٢ - ١)^٢}$ = $(س^٢ - ١)^{\frac{٢}{٣}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د/(س) = $\frac{٢}{٣}(س^٢ - ١)^{-\frac{١}{٣}}$ × ٢ س = $\frac{٤ س}{٣\sqrt[٣]{س^٢ - ١}}$

، ∵ د/(س) = ٠ عندما : س = ٠ .

، د/(س) غير معرفة عند : س = ١ ، س = −١

ببحث إشارة د/(س) فى كل فترة كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | −١ | | ٠ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/(س) | | − − | غير معرفة | + + | | − − | غير معرفة | + + | |
| سلوك د(س) | | ↘ | ٠ | ↗ | ١ | ↘ | ٠ | ↗ | |

∴ النقط الحرجة للدالة د هى : (−١ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٠)

، د متناقصة على ]−∞ ، −١] ، [٠ ، ١]

، متزايدة على [−١ ، ٠] ، [١ ، ∞[

**(٤)** إذا كان : د(س) = س³ − ٦ س² + ١٢ س ، ابحث وجود نقط حرجة للدالة د و حدد فترات التحدب إلى أعلى و فترات التحدب إلى أسفل و نقط الانقلاب إن وجدت ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى د

**الحل**

الدالة د كثيرة حدود مجالها ح ، ليست زوجية و ليست فردية

∵ د(س) = س³ − ٦ س² + ١٢ س

∴ د/(س) = ٣ س² − ١٢ س + ١٢ = ٣ (س − ٢)²

، د//(س) = ٦ س − ١٢ = ٦ (س − ٢)

للدالة نقط حرجة عندما : د/(س) = ٦ (س − ٢)² = ٠ .

أى عندما : س = ٢

أى أن النقطة الحرجة للدالة هى : (٢ ، ٨)

، د متزايدة على ح

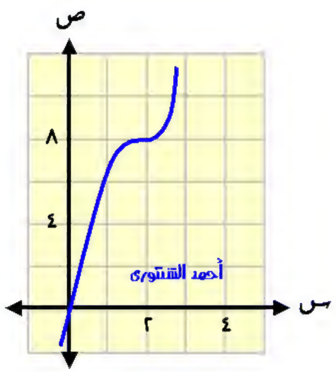
، و لا توجد نقط لقيم عظمى أو صغرى محلية

، د//(س) = ٠ .

عندما : س = ٢

| س | −∞ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/(س) | | + + | ٠ | + + | |
| سلوك د(س) | | ↗ | | ↗ | |
| إشارة د//(س) | | − − | | + + | |
| تحدب منحنى د(س) | | لأعلى | | لأسفل | |
| ص | | | ٨ | | |
| | | | نقطة انقلاب | | |

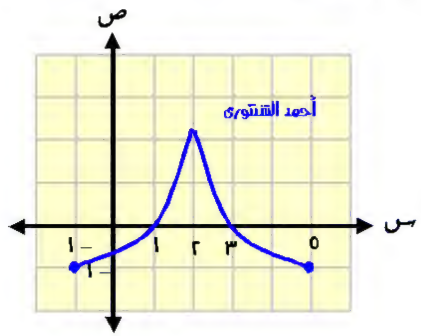
، د$^{//}$ ( س ) < ٠ فى ] – ∞ ، ٢ [
و يكون المنحنى محدباً لأعلى فى هذه الفترة
، د$^{//}$ ( س ) > ٠ فى ] ٢ ، ∞ [
و يكون المنحنى محدباً لأسفل فى هذه الفترة
، النقطة ( ٢ ، ٨ ) نقطة انقلاب
بعض النقط الاضافية :
عندما : س = ٠ فإن : د ( س ) = ٠
عندما : س = ١ فإن : د ( س ) = ٧




(٥) ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د حيث : ص = د ( س )
إذا كان : د متصلة و مجالها ] – ١ ، ٥ [ ،
د ( ١ ) = د ( ٣ ) = ٠ ، د$^{/}$ ( ٢ ) غير موجودة
، د$^{/}$ ( س ) > ٠ عندما : س < ٢ ، د$^{/}$ ( س ) < ٠
عندما : س > ٢ ، د$^{//}$ ( س ) > ٠ عندما : س ≠ ٢

الحـــل

∵ د ( ١ ) = د ( ٣ ) = ٠ ∴ المنحنى يمر بالنقطتين : ( ١ ، ٠ ) ، ( ٣ ، ٠ )
، ∵ د$^{/}$ ( ٢ ) غير موجودة
∴ لا يوجد مماس للدالة عند : س = ٢
، ∵ د$^{/}$ ( س ) > ٠ عندما : س < ٢
∴ المنحنى متزايد على ] – ∞ ، ٢ [
، ∵ د$^{/}$ ( س ) < ٠ عندما : س > ٢
∴ المنحنى متناقص على ] ٢ ، ∞ [
، ∵ د$^{//}$ ( س ) > ٠ عندما : س ≠ ٢
∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] – ١ ، ٥ [ – { ٢ }




(٦) إذا كانت : د قابلة للاشتقاق على ح ،

$$د(س) = \begin{cases} ٢ س^٢ + ٢ س + ب & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٣ س - س^٢ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$

(٢) أوجد قيم الثابتين ٢ ، ب
(ب) حدد فترات التحدب لأعلى و التحدب لأسفل و نقط الانقلاب إن وجدت

الحـــل

∵ الدالة د قابلة للاشتقاق على ح ∴ الدالة د متصلة على ح
∴ الدالة د متصلة عند : س = ١ ∴ د ( ١$^{+}$ ) = د ( ١$^{-}$ ) = د ( ١ )
∴ ٢ + ٢ + ب = ٣ – ١ و منها : ٢ = – ب (١)
، ∵ د$^{/}$ ( ١$^{+}$ ) = د$^{/}$ ( ١$^{-}$ ) ∴ ٤ + ٢ = ٣ – ٢
∴ ٢ = – ٣ ، بالتعويض فى (١) ينتج : ب = ٣

$$∴ د(س) = \begin{cases} ٢ س^٢ - ٣ س + ٣ & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٣ س - س^٢ & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$

$$، د^{/}(س) = \begin{cases} ٤ س - ٣ & \text{عندما } س \geq ١ \\ ٣ - ٢ س & \text{عندما } س < ١ \end{cases}$$

$$، ∵ د^{//}(٠^{+}) = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{د^{/}(١ + هـ) - د^{/}(١)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠^{+}} \frac{٤(١ + هـ) - ٣ - ١}{هـ} = ٤$$

$$، ∵ د^{//}(٠^{-}) = \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{د^{/}(١ + هـ) - د^{/}(١)}{هـ}$$

$$= \text{نهـا}_{هـ \leftarrow ٠^{-}} \frac{٣ - ٢(١ + هـ) - ١}{هـ} = - ٢$$

∴ د″(١⁺) ≠ د″(١⁻) ∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند : س = ١

∴ د″(س) = { ٤ عندما س > ١ ، غير موجودة عندما س = ١ ، −٢ عندما س < ١ }

∴ لا يوجد مماس للدالة د′(س) عند : س = ١

ببحث إشارة د″(س) في كل فترة كما بالجدول المقابل نجد : منحنى الدالة محدب لأعلى في ]−∞ ، ١[ ، محدب لأسفل في ]١ ، ∞[ ، و لا توجد نقط انقلاب

| س | −∞ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د″(س) | − − | غير موجودة | + + |
| تحدب منحنى د(س) | لأعلى | | لأسفل |

**(٧)** من مجموعة كل الأزواج المرتبة (س ، ص) للأعداد الصحيحة غير السالبة و التي مجموع مسقطيها ٥ ، أوجد الزوج المرتب الذي يجعل حاصل ضرب مربع المسقط الأول و مكعب المسقط الثاني أكبر ما يمكن

**الحل**

∵ س + ص = ٥ ∴ ص = ٥ − س (١)

، ∵ حاصل ضرب مربع المسقط الأول × مكعب المسقط الثاني = س² × ص³

∴ حاصل ضرب مربع المسقط الأول × مكعب المسقط الثاني = د(س)

= س² (٥ − س)³

∴ د′(س) = ٢س (٥ − س)³ + ٣س² (٥ − س)² × (−١)

= س (٥ − س)² (١٠ − ٢س − ٣س)

= ٥س (٥ − س)² (٢ − س)

، د′(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢ ، س = ٥

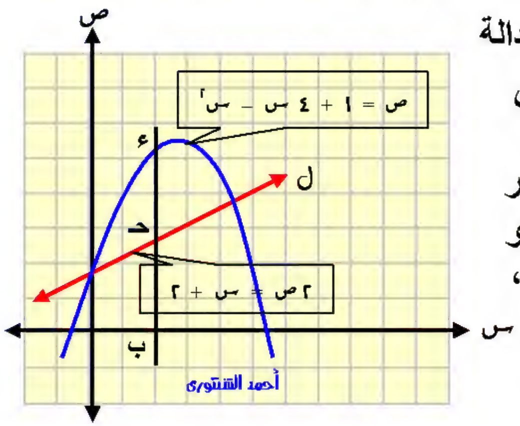
ببحث إشارة د′(س) في كل فترة كما بالجدول التالي نجد :

| س | ٠ | | ٢ | | ٥ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | ٠ | + + | ٠ | − − | ٠ | − − |
| سلوك د(س) | | ↗ | | ↘ | | ↘ |

∴ عند س = ٢ يكون حاصل الضرب أكبر ما يمكن

و من (١) ينتج : ص = ٣ ∴ العددان هما : ٢ ، ٣

**(٨)** يبين الشكل المقابل منحنى الدالة د ، و المستقيم ل ، إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ يوازي محور الصادات و يقطع الجزء الموجب لمحور السينات ، و المستقيم ل ، و منحنى د في النقط ب ، حـ ، ء على الترتيب ، فأوجد احداثي النقطة ب التي تجعل حـ ء أكبر ما يمكن




**الحل**

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ // محور الصادات ، ب تقع على محور السينات ، حـ تقع على المستقيم ل ، ء تقع على منحنى الدالة د

∴ نفرض أن : احداثيات النقط هي : ب(س ، ٠) ، حـ(س ، $\frac{١}{٢}$س + ١) ، ء(س ، ١ + ٤س − س²)

∴ حـ ء = د(س) = (١ + ٤س − س²) − ($\frac{١}{٢}$س + ١) = $\frac{٧}{٢}$س − س²

∴ د′(س) = $\frac{٧}{٢}$ − ٢س ، د″(س) = −٢

، د′(س) = ٠ عندما : س = $\frac{٧}{٤}$ ، ∵ د″($\frac{٧}{٤}$) = −٢ < ٠

∴ عندما : س = $\frac{٧}{٤}$ تكون : حـ ء أكبر ما يمكن ∴ احداثي ب هي : ($\frac{٧}{٤}$ ، ٠)

# اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

## الاختبار الأول

**[١]** اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(٣)** منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٣ - ٣س^٢ + ٢$ محدب لأعلى عندما س ∈ ....

(أ) ]−∞ ، ٠[　　　(ب) ]−∞ ، ١[

(حـ) ]١ ، ٣[　　　(ء) ]١ ، ∞[

**الحل**

∵ د(س) = $س^٣ - ٣س^٢ + ٢$　　∴ د′(س) = $٣س^٢ - ٦س$

، د″(س) = ٦س − ٦ = ٦ ( س − ١ )

، د″(س) = ٠　عندما : س = ١

ببحث إشارة د″( س ) فى كل فترة كما بالجدول المقابل ينتج : المنحنى محدب لأعلى فى ]−∞ ، ١[

| س | −∞ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د″( س ) | | − − | ١ | + + | |
| تحدب منحنى د ( س ) | | لأعلى | | لأسفل | |

**[٤] (أ)** حدد فترات التزايد و التناقص للدالة د حيث :

د(س) = س + ٢ حاس　،　٠ < س < ٢π

**الحل**

∵ د(س) = س + ٢ حاس　　∴ د′(س) = ١ + ٢ حتاس

بوضع د′(س) = ٠　　يكون : حتاس = $-\frac{١}{٢}$

∴ د′(س) = ٠　عندما : س = $\frac{٢}{٣}π$　،　س = $\frac{٤}{٣}π$

ببحث إشارة د′( س ) كما يلى :

∵ عندما : س = $\frac{١}{٢}π$ ∈ ]٠ ، $\frac{٢}{٣}π$[ يكون :

د′(س) = ١ + ٢ حتا $\frac{١}{٢}π$ = ١ > ٠　∴ د متزايدة على ]٠ ، $\frac{٢}{٣}π$[

، ∵ عندما : س = π ∈ ]$\frac{٢}{٣}π$ ، $\frac{٤}{٣}π$[ يكون :

د′(س) = ١ + ٢ حتا π = −١ < ٠　∴ د متناقصة على ]$\frac{٢}{٣}π$ ، $\frac{٤}{٣}π$[

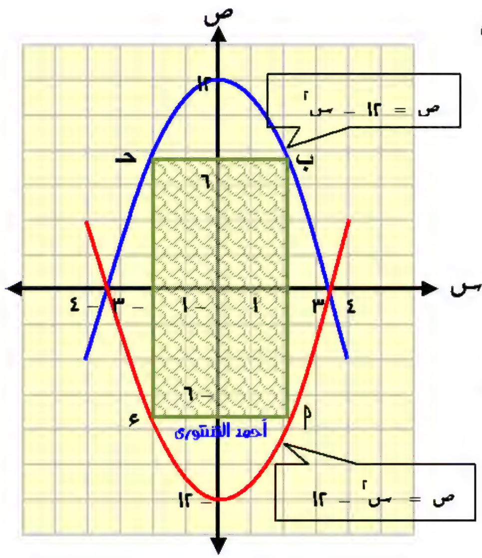
، ∵ عندما : س = $\frac{٣}{٢}π$ ∈ ]$\frac{٤}{٣}π$ ، ٢π[ يكون :

د′(س) = ١ + ٢ حتا $\frac{٣}{٢}π$ = ١ > ٠　∴ د متزايدة على ]$\frac{٤}{٣}π$ ، ٢π[

و الجدول المقابل يوضح ذلك : د متزايدة على ]٠ ، $\frac{٢}{٣}π$[ ، ]$\frac{٤}{٣}π$ ، ٢π[ ، متناقصة على ]$\frac{٢}{٣}π$ ، $\frac{٤}{٣}π$[

| س | ٠ | | $\frac{٢}{٣}π$ | | $\frac{٤}{٣}π$ | | ٢π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′( س ) | | + + | ٠ | − − | ٠ | + + | |
| سلوك د ( س ) | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

**(ب)** رسم مستطيل بحيث يقع رأسان متجاوران منه على المنحنى : ص = $س^٢ - ١٢$ و الرأسان الآخران على المنحنى : ص = $١٢ - س^٢$ أحسب أكبر مساحة لهذا المستطيل




**الحل**

بفرض أن : أء = ٢س　وحدة طول

و من هندسة الشكل نجد :

أ ( س ، $س^٢ - ١٢$ ) ،

ب ( س ، $١٢ - س^٢$ )

∴ ﻫ ب = ١٢ – س٢ – س٢ + ١٢ = ٢٤ – ٢ س٢

∴ مساحة المستطيل م = ﻫ ء × ﻫ ب = ٢ س ( ٢٤ – ٢ س٢ )

أى أن : م = د(س) = ٤٨ س – ٤ س٣

∴ د/(س) = ٤٨ – ١٢ س٢ = – ١٢ (س٢ – ٤ ) ، د//(س) = – ٢٤ س

عند د/(س) = ٠ ∴ س = ٢ ، س = – ٢ مرفوض

، ∵ د//( ٢ ) = – ٤٨ < ٠ ∴ عند س = ٢ تكون المساحة أكبر ما يمكن

∴ م = ٤٨ × ٢ – ٤ × ٨ = ٦٤ وحدة مربعة

[٥] (ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د

الذى يحقق الخواص التالية :

د ( ١ ) = د ( ٥ ) = ٠ ، د ( ٢ ) = – ٣ ،

د//(س) < ٠ لكل س ≠ ٠ ، د/(س) < ٠

لكل س < ٢ ، د/(س) > ٠ لكل س > ٢

الحل

∵ د ( ١ ) = د ( ٥ ) = ٠ ، د ( ٢ ) = – ٣

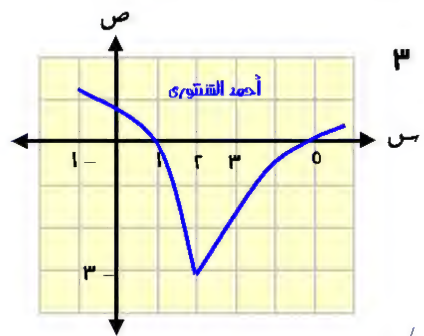
∴ المنحنى يمر بالنقط ( ١ ، ٠ ) ،

( ٥ ، ٠ ) ، ( ٢ ، –٣ )

∵ د//(س) < ٠ لكل س ≠ ٠ .

∴ المنحنى محدب لأعلى فى

] – ∞ ، ٢ [ ، ] ٢ ، ∞ [




∵ د/(س) < ٠ لكل س < ٢ ، د/(س) > ٠ لكل س > ٢

∴ ( ٢ ، –٣ ) نقطة صغرى محلية

، د (س) متناقصة على ] – ∞ ، ٢ [ ، د (س) متزايدة على ] ٢ ، ∞ [

## الاختبار الثانى

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٣) أكبر قيمة للمقدار : ٨ س – س٢ حيث س ∈ ح هى ....

(ﻫ) ٨ (ب) ١٦ (ﺣ) ٣٢ (ء) ٦٤

الحل

بفرض أن : د (س) = ٨ س – س٢ ∴ د/(س) = ٨ – ٢ س

، د//(س) = – ٢ عندما : د/(س) = ٠ فإن : س = ٤

، ∵ د//(٤) = – ٢ < ٠ ∴ عند س = ٤ يكون للمقدار أكبر قيمة

∴ أكبر قيمة للمقدار = د(٤) = ٣٢ – ١٦ = ١٦

[٣] (ب) أوجد القيم القصوى للدالة د فى الفترة [ – ١ ، ١ ]

حيث : د (س) = ٢ س٣ + ٦ س٢ + ٥

الحل

∵ د (س) = ٢ س٣ + ٦ س٢ + ٥

∴ د/(س) = ٦ س٢ + ١٢ س = ٦ س ( س + ٢ ) نضع : د/(س) = ٠

∴ س = ٠ ∈ [–١ ، ١] ، س = – ٢ ∉ [–١ ، ١] " مرفوض "

∴ د(٠) = ٥ ، د(–١) = ٩ ، د(١) = ١٣

∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٣ ، القيمة الصغرى المطلقة = ٥

[٤] (ﻫ) إذا كانت : د (س) = { ٢ س + س٢ عندما س < ٠ ، ٢ س – س٢ عندما س ≥ ٠ }

أوجد : (ا) القيم العظمى و الصغرى المحلية للدلة د

الحل

(ا) ∵ الدالة د متعددة التعريف مجالها ح

، د$(٠^{+})$ = د$(٠^{-})$ = د(٠) = ٠

∴ الدالة د متصلة عند : س = ٠ .

، ∵ د$'(٠^{+})$ = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{٢(٠ + هـ) + (٠ + هـ)^{٢} - ٠}{هـ}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ (هـ + ٢) = ٢

، ∵ د$'(٠^{-})$ = نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ $\frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ $\frac{٢(٠ + هـ) - (٠ + هـ)^{٢} - ٠}{هـ}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ (هـ + ٢) = ٢

∴ د$'(٠)^{+}$ = د$'(٠)^{-}$ = ٢

∴ د$'$(س) = { ٢ + ٢س عندما س > ٠ . ، ٢ عندما س = ٠ . ، ٢ − ٢س عندما س < ٠ . }  بوضع : د$'$(س) = ٠ .

∴ ٢ + ٢س = ٠ عندما س > ٠ . و منها : س = −١

، ٢ − ٢س = ٠ عندما س < ٠ . و منها : س = ١

∴ (١ ، ١) ، (−١ ، −١) نقطتان حرجتان من الجدول التالى :

| س | −∞ | | −١ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$(س) | − − | | ٠ | + + | ٠ | − − | |
| سلوك د(س) | ↘ | | −١ | ↗ | ١ | ↘ | |

د(١) = ١ قيمة عظمى محلية ، د(−١) = −١ قيمة صغرى محلية

[٥] (ب) إذا كان للدالة د حيث د(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س نقطة إنقلاب عند (٢ ، ٢) فأوجد قيمتى الثابتين أ ، ب ثم إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة

الحل

∵ د(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س ∴ د$'$(س) = ٣ س$^{٢}$ + ٢ أ س + ب

، د$''$(س) = ٦ س + ٢ أ ، ∵ (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب للدالة

∴ د$''$(٢) = ٠ ∴ ١٢ + ٢ أ = ٠ و منها : أ = −٦

، المنحنى للدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٢) ∴ د(٢) = ٢

∴ ٨ − ٢٤ + ٢ ب = ٢ و منها : ب = ٩

∴ د(س) = س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٩ س

∴ د$'$(س) = ٣ س$^{٢}$ − ١٢ س + ٩ = ٣ (س − ٣)(س − ١)

، د$''$(س) = ٦ س − ١٢ = ٦ (س − ٢)

عندما : د$'$(س) = ٠ فإن : س = ٣ ، س = ١

∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٣ ، س = ١

و تكون الدالة متزايدة فى ]٣ ، ∞[ ، وفى ]−∞ ، ١[

و متناقصة فى ]١ ، ٣[

، (١ ، ٤) نقطة قيمة عظمى محلية ، (٣ ، ٠) نقطة قيمة صغرى محلية

، عندما : د$''$(س) = ٠ فإن : س = ٢

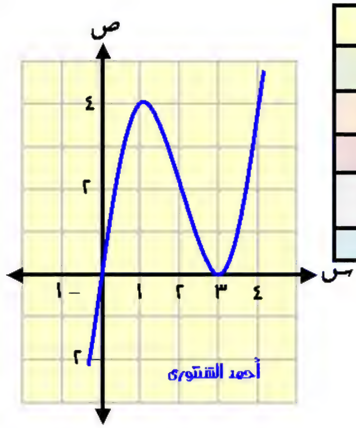
، ∵ د$''$(س) < ٠ فى ]−∞ ، ٢[ يكون المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د$''$(س) > ٠ فى ]٢ ، ∞[ يكون المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب

، لاحظ الجدول التالى :

| س | −∞ | ١ | | ٢ | | ٣ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ ( س ) | + + | · | − − | | − − | · | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د$''$ ( س ) | − − | | − − | · | + + | | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | ٤ | | ٢ | | · | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = ٤ فإن : د ( س ) = ٤

## الاختبار الثالث

[٢] (ب) إذا كانت د (س) = $\sqrt[3]{(س - ٤)^2}$ فأوجد فترات التحدب إلى أعلى و إلى أسفل و نقط الأنقلاب ( إن وجدت ) لمنحنى الدالة د

الحلـــ

∵ د ( س ) = $\sqrt[3]{(س - ٤)^2}$ = $( س - ٤ )^{\frac{٢}{٣}}$ ، د متصلة لكل س ∈ ح

∴ د$'$ ( س ) = $\frac{٢}{٣}( س - ٤ )^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣\sqrt[3]{س - ٤}}$

، د$'$ ( س ) ≠ ٠ ، غير معرفة عند : س = ٤

، د$''$ (س) = $-\frac{٢}{٩}( س - ٤ )^{-\frac{٤}{٣}}$ = $\frac{-٢}{٩\sqrt[3]{(س - ٤)^4}}$

، د$''$ (س) غير معرفة عندما : س = ٤

و بدراسة اشارة د$''$ (س) كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | ٤ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$''$ ( س ) | − − | غير معرفة | − − |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | · | لأعلى |

منحنى الدالة د محدب لأعلى لكل س ∈ ح − { ٤ }

أى على : ] ٤ ، ∞ [ ، ] −∞ ، ٤ [ و لا توجد نقط إنقلاب

[٣] (ب) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث

د (س) = $س^٤ - ٤ س^٣$ على الفترة [ ٠ ، ٤ ]

الحلـــ

∵ د (س) = $س^٤ - ٤ س^٣$

∴ د$'$(س) = $٤ س^٣ - ١٢ س^٢$ = $٤ س^٢ ( س - ٣ )$

نضع : د$'$(س) = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [ ٠ ، ٤ ]

، س = ٣ ∈ [ ٠ ، ٤ ]

∵ د ( ٠ ) = ٠ ، د ( ٣ ) = −٢٧ ، د ( ٤ ) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = صفر ، القيمة الصغرى المطلقة = −٢٧

[٥] (ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص التالية : د ( ٠ ) = ٣ ، د$'$( ٢ ) = د$'$( −٢ ) = ٠ ،

د$'$(س) < ٠ عندما : −٢ < س < ٢ ، د$''$(س) < ٠

عندما : س > ٠ ، د$''$(س) > ٠ عندما : س < ٠ .

الحلـــ

∵ د ( ٠ ) = ٣ ∴ المنحنى يمر بالنقط ( ٠ ، ٣ )

، ∵ د$'$( ٢ ) = د$'$( −٢ ) = ٠

∴ للمنحنى نقط حرجة عند س = ٢ ، س = −٢

و عند هاتين النقطتين المماس // محور السينات

، ∵ د/(س) > ٠ عندما : −٢ < س < ٢

∴ د(س) تزايدية فى ]−٢ ، ٢[

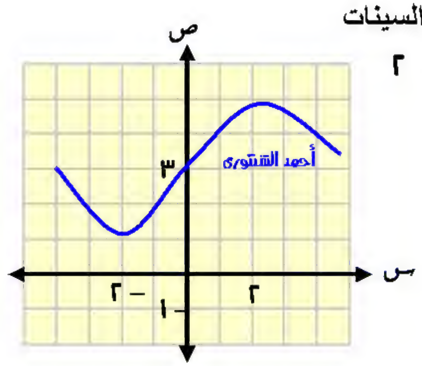
، ∵ د//(س) > ٠ عندما س < ٠

∴ المنحنى محدب لأعلى فى ]٠ ، ∞[

، ∵ د//(س) < ٠ عندما س > ٠

∴ المنحنى محدب لأسفل فى ]−∞ ، ٠[

، النقطة ( ٠ ، ٣ ) نقطة إنقلاب




## الاختبار الرابع

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) منحنى الدالة د حيث د(س) = ( س − ٢ ) هـ^س يكون محدباً لأسفل على الفترة ....

(أ) ]−∞ ، ∞[ (ب) ]−١ ، ٢[

(حـ) ]٠ ، ٢[ (ء) ]٠ ، ∞[

الحل

∵ د(س) = ( س − ٢ ) هـ^س

∴ د/(س) = هـ^س + ( س − ٢ ) هـ^س = هـ^س ( ١ + س − ٢ )

= هـ^س ( س − ١ )

، د//(س) = هـ^س ( س − ١ ) + هـ^س = هـ^س ( س − ١ + ١ ) = س هـ^س

، ∵ عندما : س = ١ ∈ ]٠ ، ∞[ يكون :

د//(س) = ١ × هـ = ٢,٧ > ٠ .

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل فى ]٠ ، ∞[

لاحظ :

∵ عندما : س = −١ ∈ ]−∞ ، ٠[ يكون :

د//(س) = ( −١ ) × هـ^{−١} = −٠,٣٤ > ٠ .

، الجدول التالى يوضح ذلك :

| س | ∞ | ٠ | −∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د//(س) | + + | ٠ | − − |
| تحدب منحنى د(س) | لأسفل | | لأعلى |

[٣] (ب) إذا كان منحنى للدالة د حيث :

د(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء له قيمة عظمى محلية عند ( ٢ ، ٤ ) و له نقطة إنقلاب عند ( ١ ، ٢ ) أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ د(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء

∴ د/(س) = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س + حـ ، د//(س) = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ ( ١ ، ٢ ) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة

∴ د//(١) = ٠ ∴ ٦ أ + ٢ ب = ٠ و منها : ب = −٣ أ (١)

، ∵ ( ٢ ، ٤ ) نقطة قيمة عظمى محلية لمنحنى الدالة

∴ د/(٢) = ٠ ∴ ١٢ أ + ٤ ب + حـ = ٠ ، بالتعويض من (١) ينتج :

١٢ أ − ١٢ أ + حـ = ٠ و منها : حـ = ٠ (٢)

، ∵ المنحنى للدالة يمر بالنقطة ( ١ ، ٢ ) ∴ د(١) = ٢

∴ أ + ب + حـ + ء = ٢ ، بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

∴ أ − ٣ أ + ء = ٢ ∴ −٢ أ + ء = ٢ (٣)

، ∵ المنحنى للدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٤)　　∴ د(٢) = ٤

∴ ٣ أ + ٤ ب + ٢ حـ + ء = ٤　　، بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

∴ ٨ أ − ١٢ أ + ء = ٤　　∴ −٤ أ + ء = ٤　　(٤)

، بطرح (٤) من (٣) ينتج : ٢ أ = −٢　　∴ أ = −١

، بالتعويض فى (١) ينتج : ب = ٣

، بالتعويض فى (٣) ينتج : ٢ + ء = ٢　　و منها : ء = ٠ .

∴ د(س) = − $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$

[٤] (ب) ارسم منحنى الدالة المتصلة د الذى يحقق الخواص التالية :

د(٤) = ٢ د(٣) = ٤ ، د(٢) = ٠ .

د′(س) < ٠ . عندما : س > ٤ أو < ٢ ،

د″(س) < ٠ . عندما : س > ٣ ،

د″(س) > ٠ . عندما : س < ٣

الحل

∵ د(٤) = ٤　　∴ المنحنى يمر بالنقط (٤ ، ٤)

، ∵ ٢ د(٣) = ٤　　∴ د(٣) = ٢　　∴ المنحنى يمر بالنقط (٣ ، ٢)

، ∵ د(٢) = ٠　　∴ المنحنى يمر بالنقط (٢ ، ٠)

، ∵ د′(س) < ٠ . عندما : س > ٤ أو س < ٢

∴ د(س) تناقصية فى ]−∞ ، ٢[ ، ]٤ ، ∞[

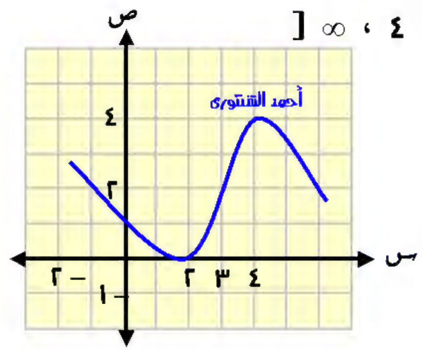
، ∵ د″(س) < ٠ . عندما س > ٣

∴ المنحنى محدب لأعلى فى ]٣ ، ∞[

، ∵ د″(س) > ٠ . عندما س < ٣

∴ المنحنى محدب لأسفل فى ]−∞ ، ٣[

، النقطة (٣ ، ٢) نقطة إنقلاب



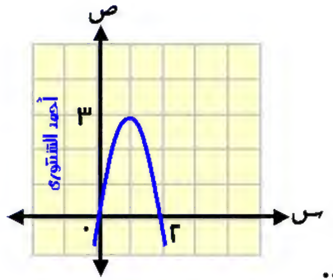

## الاختبار الخامس

[أ] يوضح الشكل المقابل :

منحنى د′(س) للدالة د حيث :

د(س) = أ $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$

، أ ، ب ثابتان أكمل




(١) الدالة متناقصة لكل س ∈ ....

(٢) لمنحنى د نقطة حرجة عند س ∈ ....

(٣) منحنى د محدب لأعلى على الفترة ....

(٤) توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = ....

(٥) د(١) = ....

الحل

∵ د(س) = أ $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$　　∴ د′(س) = ٣ أ $س^{٢}$ + ٢ ب س

، ∵ منحنى د′(س) يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، ٠)

∴ ٣ أ + ٢ ب = ٣　　، ١٢ أ + ٤ ب = ٠　　و بحل المعادلتين ينتج :

أ = −١　　، ب = ٣

∴ د(س) = − $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$

، د′(س) = −٣ $س^{٢}$ + ٦ س = −٣ س ( س − ٢ )

، د″(س) = −٦ س + ٦ = −٦ ( س − ١ )

(١) ∵ د′(س) < ٠ . عندما : س > ٠ أو < ٢

∴ الدالة متناقصة لكل س ∈ ]−∞ ، ٠[　، س ∈ ]٢ ، ∞[

(٢) ∵ د′(س) = ٠ . عندما : س = ٠　، س = ٢

∴ لمنحنى د نقطة حرجة عند س ∈ {٠ ، ٢}

(٣) ∵ د$^{//}$(س) > ٠ عندما : س > ١

∴ منحنى د محدب لأعلى على الفترة ] ١ ، ∞ [

(٤) ∵ د$^{/}$(س) > ٠ عندما : س > ٠ ، د$^{/}$(س) < ٠ عندما : س < ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = ٠ " لاحظ : د$^{//}$(٠) > ٠ "

(٥) د(١) = ٢

**[٢] (ب)** للدالة د حيث د(س) = س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٩ س − ١

**(١)** عين فترات التزايد و التناقص للدالة د

**(٢)** أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [ ٠ ، ٢ ]

الحل

∵ د(س) = س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٩ س − ١

∴ د$^{/}$(س) = ٣ س$^{٢}$ − ١٢ س + ٩ = ٣ ( س$^{٢}$ − ٤ س + ٣ )

= ٣ ( س − ١ ) ( س − ٣ )

، د$^{/}$(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٣

**(١)** و بدراسة اشارة د$^{/}$(س) كما بالجدول التالى نجد :

| س | −∞ | | ١ | | ٣ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$^{/}$( س ) | + | + | ٠ | − − | ٠ | + | + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | | ↘ | | ↗ | |

∴ الدالة متزايدة فى كل من : ]−∞ ، ١[ ، ]٣ ، ∞[

، متناقصة على ]١ ، ٣[

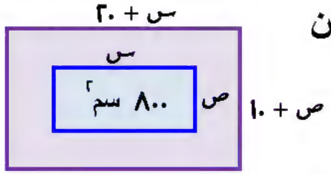
**(٢)** ∵ د (س) = ٠ عندما : س = ١ ∈ [٠ ، ٢] ،

س = ٣ ∉ [٠ ، ٢]

، ∵ د( ٠ ) = −١ ، د( ١ ) = ٣ ، د( ٢ ) = ١

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٣ ، القيمة الصغرى المطلقة = −١

**[٤] (ب)** يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم$^{٢}$ من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى و السفلى ١٠ سم ، كل من الهامشين الجانبيين ٥ سم ، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن




الحل

نفرض أن : بعدا المادة المطبوعة هما س سم ، ص سم

∴ بعدا الملصق هما : س + ٢٠ سم ، ص + ١٠ سم ،

س ص = ٨٠٠ سم$^{٢}$ ومنها : ص = $\frac{٨٠٠}{س}$

∴ مساحة الملصق م = د(س) = ( س + ٢٠ ) ( ص + ١٠ )

∴ د(س) = ( س + ٢٠ ) ( $\frac{٨٠٠}{س}$ + ١٠ ) = ١٠ س + $\frac{١٦٠٠٠}{س}$ + ١٠٠٠

∴ د$^{/}$(س) = ١٠ − $\frac{١٦٠٠٠}{س^{٢}}$ ، د$^{//}$(س) = $\frac{٣٢٠٠٠}{س^{٣}}$

، د$^{/}$(س) = ٠ عندما : ١٠ س$^{٢}$ = ١٦٠٠٠ ومنها : س = ٤٠

، ∵ د$^{//}$(٤٠) > ٠ ∴ س = ٤٠ تجعل مساحة الملصق أصغر ما يمكن

∴ ص = ٢٠ و تكون أبعاد الملصق هى :

٤٠ + ٢٠ = ٦٠ سم ، ٢٠ + ١٠ = ٣٠ سم

**[٥] (ب)** إذا كان د(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س + ٤ حيث أ ، ب ثابتان أوجد قيمتى أ ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، و نقطة إنقلاب عند س = ١ ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د

الحل

∵ د(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س + ٤

∴ د$'$(س) = ٣ س$^{٢}$ + ٢ أ س + ب ، د$''$(س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ عند س = ١ توجد نقطة إنقلاب ∴ د$''$(١) = ٠

∴ ٠ = ٦ + ٢ أ و منها : أ = −٣

، ∵ عند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية ∴ د$'$(٢) = ٠

∴ ٠ = ٦ + ٢ × ( −٣ ) × ٢ + ب و منها : ب = ٠

∴ د(س) = س$^{٣}$ − ٣ س$^{٢}$ + ٤

∴ د$'$(س) = ٣ س$^{٢}$ − ٦ س = ٣ س ( س − ٢ )

∴ د$'$(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢

∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٠ ، س = ٢

و تكون الدالة متزايدة فى كل من : ] ٢ ، ∞ [ ، ] −∞ ، ٠ [

و متناقصة فى ] ٠ ، ٢ [

، ( ٠ ، ٤ ) نقطة قيمة عظمى محلية ، ( ٢ ، ٠ ) نقطة قيمة صغرى محلية

، د$''$(س) = ٦ س − ٦ = ٦ ( س − ١ ) أى عندما : س = ١

، ∵ د$''$(س) < ٠ فى ] −∞ ، ١ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د$''$(س) > ٠ فى ] ١ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ١ ، ٢ ) نقطة إنقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | −∞ | | ٠ | | ١ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$(س) | | + + | ٠ | − − | | − − | ٠ | + + | |
| سلوك د(س) | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |
| إشارة د$''$(س) | | − − | | − − | ٠ | + + | | + + | |
| تحدب منحنى د(س) | | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل | |
| ص | | | ٤ | | ٢ | | ٠ | | |
| | | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | | |

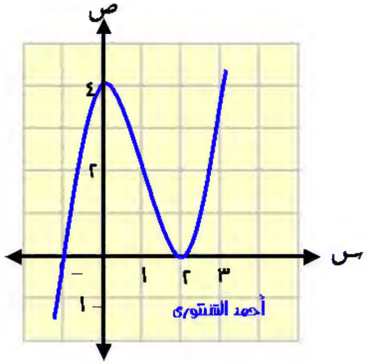
بعض النقط الاضافية :

عندما : س = −١

فإن : د(س) = ٠

عندما : س = ٣

فإن : د(س) = ٤






## الاختبار السادس

[١] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(١) القيمة العظمى المحلية للدالة أكبر من القيمة الصغرى المحلية

(أ) (ب)

**الحل**

(١) (ب) ، التصحيح : القيمة العظمى المطلقة للدالة أكبر من القيمة الصغرى المطلقة

(٦) إذا كانت ( أ ، د(أ) ) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة د فإن د$''$(أ) = صفر

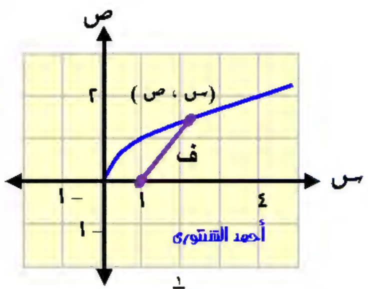
(أ) (ب)

**الحل**

(٦) (ب) ، التصحيح : إذا كانت ( أ ، د(أ) ) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة فإن د$''$(أ) = صفر أو د$''$(أ) غير موجودة

[٣] (ب) إذا كانت ف بعد النقطة ( ١ ، ٠ ) عن النقطة ( س ، ص ) الواقعة على المنحنى ص = $\sqrt{س}$ فأوجد إحداثى النقطة ( س ، ص ) التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن

الحل




ف$^{2}$ = (س − ١)$^{2}$ + (ص − ٠)$^{2}$

= س$^{2}$ − ٢ س + ١ + ص$^{2}$

، ∵ ص = $\sqrt{\text{س}}$ ∴ ص$^{2}$ = س

∴ ف$^{2}$ = س$^{2}$ − ٢ س + ١ + س

= س$^{2}$ − س + ١ ∴ ف = د(س) = (س$^{2}$ − س + ١)$^{\frac{1}{2}}$

، د′(س) = $\frac{1}{2}$ (س$^{2}$ − س + ١)$^{-\frac{1}{2}}$ ( ٢ س − ١ ) بوضع د′(س) = ٠

∴ س = $\frac{1}{2}$

، ∵ بدراسة اشارة د′(س) كما بالجدول المقابل نجد : عند س = $\frac{1}{2}$ تكون ف أصغر ما يمكن ، و عندها ص = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

| س | −∞ | $\frac{1}{2}$ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د′( س ) | − − | ٠ | + + |
| سلوك د ( س ) | ↘ | | ↗ |

∴ إحداثى النقطة التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن هى ( $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ )

[٤] (أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث :

د(س) = | س | (س − ٤) فى الفترة [ −١ ، ٣ ]

الحل

د(س) متعددة التعريف مجاها فى الفترة [ −١ ، ٣ ]

د(س) = { س$^{2}$ − ٤ س عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ −س$^{2}$ + ٤ س عندما −١ ≤ س < ٠ }

∵ د(٠$^{+}$) = د(٠$^{-}$) = د(٠) = ٠

∴ متصلة عند س = ٠ أى متصلة على فى الفترة [ −١ ، ٣ ]

، ∵ د′(٠$^{+}$) = نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{\text{د}(٠ + \text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{(٠ + \text{هـ})^{2} - ٤(٠ + \text{هـ}) - ٠}{\text{هـ}}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{+}}$ ( هـ − ٤ ) = −٤

، ∵ د′(٠$^{-}$) = نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ $\frac{\text{د}(٠ + \text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ $\frac{-(٠ + \text{هـ})^{2} + ٤(٠ + \text{هـ}) - ٠}{\text{هـ}}$

= نهـا$_{هـ \to ٠^{-}}$ ( −هـ + ٤ ) = ٤

∴ د′(٠$^{+}$) ≠ د′(٠$^{-}$) ∴ د′(٠) غير موجودة

∴ د′(س) = { ٢ س − ٤ عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ غير موجودة عندما س = ٠ ؛ −٢ س + ٤ عندما −١ ≤ س < ٠ }

بوضع : د′(س) = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ عندما س > ٠ و منها : س = ٢ ∈ [ −١ ، ٣ ]

، −٢ س − ٤ = ٠ عندما س < ٠ و منها : س = −٢ ∉ [ −١ ، ٣ ]

، ∵ د(−١) = −٥ ، د(٢) = −٤ ، د(٣) = −٣ ، د(٠) = ٠

القيمة العظمى المطلقة = ٠ ، القيمة الصغرى المطلقة = −٥

(ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند أى نقطة عليه يساوى ٦ س$^{2}$ + ب س ، و كان د(٠) = ٥ ، د(٢) = −٣ أوجد قيمة الثابت ب ثم أرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ∫ ( ٦ س$^{٢}$ + ب س ) ء س ∴ ص = ٢ س$^{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ ب س$^{٢}$ + ث

، ∵ د ( . ) = ٥ ∴ ٥ = ث

، ∵ د ( ٢ ) = – ٣ ∴ – ٣ = ١٦ + ٢ ب + ٥ ، و منها : ب = – ١٢

∴ ص = د (س) = ٢ س$^{٣}$ – ٦ س$^{٢}$ + ٥

∴ د$^{/}$ (س) = ٦ س$^{٢}$ – ١٢ س = ٦ س ( س – ٢ )

∴ د$^{/}$ (س) = . عندما : س = . ، س = ٢ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متزايدة فى كل من : ] ٢ ، ∞ [ ، ] – ∞ ، . [

و متناقصة فى ] . ، ٢ [ ، د$^{//}$ (س) = ١٢ س – ١٢ = ١٢ ( س – ١ )

، ( . ، ٥ ) نقطة قيمة عظمى محلية ، ( ٢ ، – ٣ ) نقطة قيمة صغرى محلية

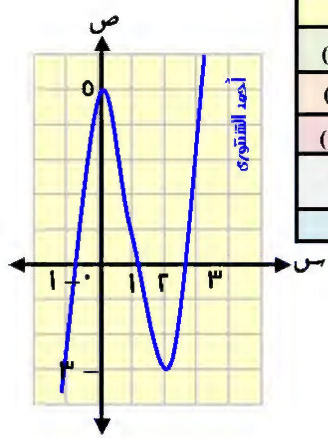
، ∵ د$^{//}$ (س) = . عندما : س = ١

، ∵ د$^{//}$ (س) < . فى ] – ∞ ، ١ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د$^{//}$ (س) > . فى ] ١ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ١ ، ١ ) نقطة إنقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | – ∞ | . | | ١ | | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$^{/}$ ( س ) | + + | . | – – | | – – | . | + + |
| سلوك د ( س ) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د$^{//}$ ( س ) | – – | | – – | . | + + | | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | ٥ | | ١ | | – ٣ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = – ٤ فإن : د ( س ) = – ٤

، عندما : س = . فإن : د ( س ) = .

## الاختبار السابع

[١] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(٢) للدالة د : د(س) = س$^{٣}$ – ٣ س + ١ نقطة إنقلاب هى ( . ، ١ ) (أ) (ب)

الحل

(٢) (أ) لأن : ∵ د(س) = س$^{٣}$ – ٣ س + ١

∴ د$^{/}$ (س) = ٣ س$^{٢}$ – ٣ ، د$^{//}$ (س) = ٦ س

، ∵ د$^{//}$ (س) = . عندما : س = . ∴ (.) = ١

، ∵ د$^{//}$ (س) < . عندما س < . ، د$^{//}$ (س) > . عندما س > .

∴ النقطة ( . ، ١ ) نقطة إنقلاب

[٣] (أ) عين فترات التحدب لأعلى و فترات التحدب لأسفل و نقط الإنقلاب ( إن وجدت ) لمنحنى الدالة د حيث :

د (س) = ( س – ١ )$^{٤}$ + ٣

الحل

∵ د (س) = ( س – ١ )$^{٤}$ + ٣ ∴ د$^{/}$ (س) = ٤ ( س – ١ )$^{٣}$

، د$^{//}$ (س) = ١٢ ( س – ١ )$^{٢}$ ، بوضع : د$^{//}$ (س) = . ∴ س = ١

، و بدراسة اشارة د$^{//}$ (س) كما بالجدول المقابل نجد : منحنى الدالة د محدب لأسفل لكل س ∈ ح و لا توجد نقط إنقلاب

| س | – ∞ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$^{//}$ ( س ) | + + | . | + + |
| تحدب منحنى د ( س ) | لأسفل | | لأسفل |

[٤] (ب) ملعب على شكل مستطيل ينتهى ضلعان متقابلان منه بنصفى دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ متراً فإثبت أن مساحة سطح الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة ، و أوجد طول نصف قطرها

**الحل**

نفرض أن : طول المستطيل = ص متر

، عرض المستطيل = طول قطر الدائرة = ٢ س متر

أى أن : طول نصف قطر الدائرة = س متر




∵ محيط الملعب = ٤٠٠ متر

∴ ٢ س $\pi$ + ٢ ص = ٤٠٠

و منها : ص = ٢٠٠ − س $\pi$

، مساحة الملعب = د(س)

= مساحة دائرة + مساحة مستطيل

= $\pi$ $س^{٢}$ + ٢ س ص

∴ د(س) = $\pi$ $س^{٢}$ + س ( ٤٠٠ − ٢ س $\pi$ )

= $\pi$ $س^{٢}$ + ٤٠٠ س − ٢ $س^{٢}$ $\pi$ = ٤٠٠ س − $س^{٢}$ $\pi$

∴ $د^{/}$(س) = ٤٠٠ − ٢ س $\pi$ ، $د^{//}$(س) = − ٢ $\pi$

بوضع : $د^{/}$(س) = ٠ ∴ ٤٠٠ − ٢ س $\pi$ و منها : س = $\frac{٢٠٠}{\pi}$

، ∵ $د^{//}$( $\frac{٢٠٠}{\pi}$ ) < ٠ ∴ س = $\frac{٢٠٠}{\pi}$ تجعل مساحة الملعب أكبر ما يمكن

∴ ص = ٢٠٠ − $\frac{٢٠٠}{\pi}$ × $\pi$ = صفر

أى أن : الملعب يكون على شكل دائرة طول نصف قطرها $\frac{٢٠٠}{\pi}$ متر

[٥] (أ) إذا كانت : د(س) = $س^{٣}$ − ٣ س + ٣ أوجد :

أولاً : القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [ ٠ ، ٢ ]

**الحل**

أولاً : ∵ د(س) = $س^{٣}$ − ٣ س + ٣

∴ $د^{/}$(س) = ٣ $س^{٢}$ − ٣ = ٣ ( س + ١ ) ( س − ١ )

نضع : $د^{/}$(س) = ٠ ∴ س = ١ ∈ [ ٠ ، ٢ ]

، س = − ١ ∉ [ ٠ ، ٢ ]

، ∵ د( ٠ ) = ٣ ، د( ١ ) = ١ ، د( ٢ ) = ٥

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٥

، القيمة الصغرى المطلقة = ١



## الاختبار الثامن

[١] اكمل ما يلى :

(٣) للدالة د : د(س) = $س^{٣}$ − ٣ س − ١ نقطة إنقلاب هى ....

**الحل**

(٣) ∵ د(س) = $س^{٣}$ − ٣ س − ١ ∴ $د^{/}$(س) = ٣ $س^{٢}$ − ٣

، $د^{//}$(س) = ٦ س ، ∵ $د^{//}$(س) = ٠ عندما : س = ٠ ∴ د(٠) = − ١

، ∵ $د^{//}$(س) < ٠ عندما س < ٠ ، $د^{//}$(س) > ٠ عندما س > ٠

∴ النقطة ( ٠ ، − ١ ) نقطة إنقلاب

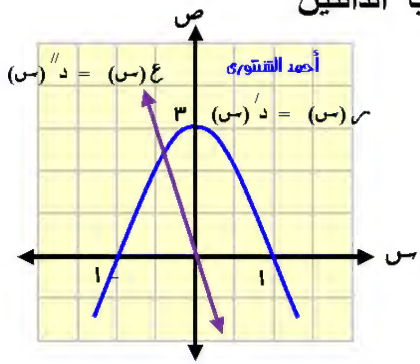
**[٣] (ب)** يوضح الشكل المقابل : منحنيا الدالتين م ، ع حيث :

م (س) = د/ (س)

، ع (س) = د// (س) ،

د دالة كثيرة حدود فى المتغير س ،

ارسم الشكل العام لمنحنى د علماً بأنه يمر بالنقطتين ( -١ ، ٠ ) ، ( ١ ، ٤ )




الحل

∵ د (س) دالة كثيرة حدود ، د// (س) دالة من الدرجة الأولى كما بالشكل

، د/ (س) دالة من الدرجة الثانية كما بالشكل

∴ د (س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

بفرض أن : د (س) = أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ء

∴ د/ (س) = ٣ أ س$^{٢}$ + ٢ ب س + حـ ، د// (س) = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ منحنى د// (س) يمر بالنقطة ( ٠ ، ٠ ) ∴ د// (٠) = ٠

∴ ٠ = ٠ + ٢ ب و منها : ب = ٠

، ∵ منحنى د/ (س) يمر بالنقط ( ٠ ، ٣ ) ، ( ١ ، ٠ )

∴ د/ (٠) = ٣ ، د/ (١) = ٠

∴ ٣ = ٠ + ٠ + حـ و منها : حـ = ٣ ، ٠ = ٣ أ + ٢ ب + حـ

، ∵ حـ = ٣ ، ب = ٠ ∴ أ = -١

، ∵ منحنى د (س) يمر بالنقطة ( -١ ، ٠ ) د (-١) = ٠

∴ ٠ = - أ + ب - حـ + ء و منها : ء = ٢

∴ د (س) = - س$^{٣}$ + ٣ س + ٢

∴ د/ (س) = -٣ س$^{٢}$ + ٣ = -٣ ( س - ١ ) ( س + ١ )

∴ د/ (س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = -١ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متناقصة فى كل من : ] ١ ، ∞ [ ، ] -∞ ، -١ [

و متزايدة فى ] -١ ، ١ [

، ( ١ ، ٤ ) نقطة قيمة عظمى محلية ، ( -١ ، ٠ ) نقطة قيمة صغرى محلية

، د// (س) = -٦ س ، ∵ د// (س) = ٠ عندما : س = ٠

، ∵ د// (س) > ٠ فى ] -∞ ، ٠ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، ∵ د// (س) < ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ٢ ) نقطة إنقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | -∞ | -١ | | ٠ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ (س) | - - | ٠ | + + | | + + | ٠ | - - |
| سلوك د (س) | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |
| إشارة د// (س) | + + | | + + | ٠ | - - | | - - |
| تحدب منحنى د (س) | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | | لأعلى |
| ص | | ٠ | | ٢ | | ٤ | |
| | | قيمة صغرى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة عظمى محلية | |

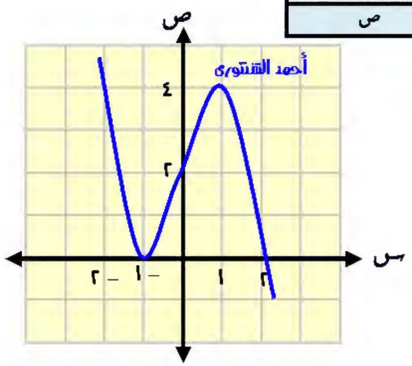
بعض النقط الاضافية :

عندما : س = -٢

فإن : د ( س ) = ٤

، عندما : س = ٢

فإن : د ( س ) = ٠




**[٤] (أ)** عين القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [ ٠ ، ٢ ]

حيث : د (س) = ٣ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

الحل

∵ د(س) = ٣ √(٤ − س$^2$) = ٣ ( ٤ − س$^2$ )$^{\frac{1}{2}}$

∴ د$'$(س) = ٣ × $\frac{1}{2}$ × ( −٢ س ) ( ٤ − س$^2$ )$^{-\frac{1}{2}}$ = ٣ س ÷ √(٤ − س$^2$)

، ∵ د$'$(س) = ٠ عندما : س = ٠ ∈ [ ٠ ، ٢ ]

، د$'$(س) غير موجودة عند : ٤ − س$^2$ = ٠ أى عند : س = ٢ ∈ [ ٠ ، ٢ ]

، س = −٢ ∉ [ ٠ ، ٢ ] " مرفوض " ، ∵ د(٠) = ٦ ، د(٢) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٦ ، القيمة الصغرى المطلقة = ٠ .

**[٥] (أ)** رسم فى نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هى قطر نصف الدائرة ، طول قاعدته الصغرى يساوى طول كل من ساقيه يساوى مقدار ثابت عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل

نفرض أن :

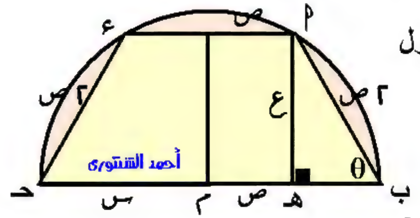
طول قاعدة شبه المنحرف الصغرى = طول ساقيه = ٢ ص وحدة طول ،

طول قاعدة شبه المنحرف الكبرى =

طول قطر نصف الدائرة = ٢ س وحدة طول

، قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف = θ

من هندسة الشكل : ب هـ = س − ص ،




ع$^2$ = ٤ ص$^2$ − (س − ص)$^2$

= ٤ ص$^2$ − ( س$^2$ − ٢ س ص + ص$^2$ )

= ٤ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص − ص$^2$ = ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص

∴ ع = ( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص )$^{\frac{1}{2}}$

، مساحة شبه المنحرف = د(س) = $\frac{1}{2}$ × ( ٢ س + ٢ ص ) × ع

∴ د(س) = ( س + ص ) ( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص )$^{\frac{1}{2}}$

∴ د$'$(س) = ١ × ( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص )$^{\frac{1}{2}}$ +

$\frac{1}{2}$ ( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص )$^{-\frac{1}{2}}$ ( −٢ س + ٢ ص ) ( س + ص )

∴ د$'$(س) = ( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص )$^{-\frac{1}{2}}$ ( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص

+ ص$^2$ − س$^2$ ) =

∴ د$'$(س) = ( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص )$^{-\frac{1}{2}}$ ( ٤ ص$^2$ + ٢ س ص − ٢ س$^2$ )

= ( ٤ ص$^2$ + ٢ س ص − ٢ س$^2$ ) ÷ √( ٣ ص$^2$ − س$^2$ + ٢ س ص )

د$'$(س) = ٠ عندما : ٤ ص$^2$ + ٢ س ص − ٢ س$^2$ = ٠ .

∴ ٢ ( ٢ ص − س ) ( ص + س ) = ٠ .

و منها : س = ٢ ص أو : س = − ص مرفوض " يصبح : ب هـ = ٠ "

، ∵ د$'$(س) > ٠ عندما : س < ٢ ص ، د$'$(س) < ٠ عندما : س > ٢ ص

∴ س = ٢ ص تجعل مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن

و عندها يكون : ب هـ = ص وحدة طول ، حتا θ = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = $\frac{1}{3}$ π

## الاختبار التاسع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

**[١]** اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(٢)** منحنى الدالة د محدباً لأسفل على ح إذا كان د(س) يساوى ....

(أ) ٢ − س$^2$   (ب) ٢ + س$^3$   (حـ) ٢ − س$^4$   (ء) ٢ + س$^4$

**الحل**

(ء) $٢ + س^٤$ لأن : ∵ د(س) = $٢ + س^٤$ ∴ د'(س) = $٤ س^٣$

، د''(س) = $١٢ س^٢$ ، د''(س) > ٠ لكل س ∈ ح

∴ منحنى الدالة د محدباً لأسفل على ح " إدرس الدوال الأخرى بنفسك "

**(٣)** إذا كان لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٣ + ك س^٢ + ٤$ ، ك ∈ ح نقطة إنقلاب عند س = ٢ فإن ك = ....

(أ) −٦ (ب) −٣ (جـ) ٦ (ء) ٩

**الحل**

∵ د(س) = $س^٣ + ك س^٢ + ٤$ ∴ د'(س) = $٣ س^٢ + ٢ ك س$

، د''(س) = ٦ س + ٢ ك ، ∵ نقطة إنقلاب عند س = ٢

عندما : د''(٢) = ٠ ∴ ١٢ + ٢ ك = ٠ و منها : ك = −٦

**[٤](ب)** إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة ( س ، ص ) على المنحنى هو ٣ ( $س^٢$ − ١ ) أوجد القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية لمنحنى الدالة د و نقط الإنقلاب إن وجدت ، علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة ( −٢ ، −١ ) ، ثم أرسم شكلاً عاماً لهذا المنحنى

**الحل**

∵ د'(س) = ٣ ( $س^٢$ − ١ ) = $٣ س^٢ − ٣$

∴ د(س) = ∫ ( $٣ س^٢ − ٣$ ) ء س = $س^٣ − ٣ س + ث$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( −٢ ، −١ ) ∴ د(−٢) = −١

∴ −١ = −٨ + ٦ + ث و منها : ث = ١

∴ د(س) = $س^٣ − ٣ س + ١$

، د'(س) = $٣ س^٢ − ٣$ = ٣ ( $س^٢$ − ١ ) = ٣ ( س − ١ ) ( س + ١ )

∴ د'(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = −١ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متزايدة فى كل من : ] ١ ، ∞ [ ، ] −∞ ، −١ [

و متناقصة فى ] −١ ، ١ [ ،

( ١ ، −١ ) نقطة قيمة صغرى محلية ، ( −١ ، ٣ ) نقطة قيمة عظمى محلية

، د''(س) = ٦ س ، ∵ د''(س) = ٠ عندما : س = ٠ .

، ∵ د''(س) < ٠ فى ] −∞ ، ٠ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د''(س) > ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ١ ) نقطة إنقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | −∞ | −١ | | ٠ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د'(س) | + + | ٠ | − − | | − − | ٠ | + + |
| سلوك د(س) | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د''(س) | − − | | − − | ٠ | + + | | + + |
| تحدب منحنى د(س) | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل |
| ص | | ٣ | | ١ | | −١ | |
| | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | |

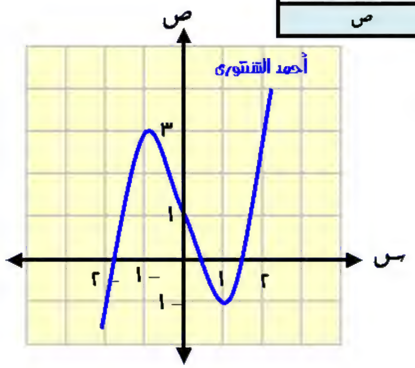
بعض النقط الاضافية :

عندما : س = −٢

فإن : د(س) = −١

، عندما : س = ٢

فإن : د(س) = ٣



## الاختبار العاشر

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اكمل ما يلى :

(٣) إذا كان للدالة د : د(س) = ك $س^{٣}$ + ٩ $س^{٢}$ ، نقطة إنقلاب عند س = −١ فإن ك = ....

الحل

(٣) ∵ د(س) = ك $س^{٣}$ + ٩ $س^{٢}$ ∴ $د'$(س) = ٣ ك $س^{٢}$ + ١٨ س

، $د''$(س) = ٦ ك س + ١٨

، ∵ للمنحنى نقطة إنقلاب عندما : س = −١

∴ $د''$(−١) = ٠ ∴ −٦ ك + ١٨ = ٠ ∴ ك = ٣

[٣] (أ) أبحث تحدب منحنى الدالة د حيث د(س) = | $س^{٣}$ − ١ | موضحاً نقط الإنقلاب إن وجدت

الحل

د(س) = { $س^{٣}$ − ١ عندما س ≥ ١ ، −$س^{٣}$ + ١ عندما س < ١ }

∵ د($١^{+}$) = د($١^{-}$) = د(١) = ٠ .

∴ د(س) متعددة التعريف مجالها ح و متصلة عند س = ٠ أى متصلة على ح

، ∵ $د'$($٠^{+}$) = نهـا (هـ ← $٠^{+}$) $\frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

= نهـا (هـ ← $٠^{+}$) $\frac{(١ + هـ)^{٣} - ١ - ٠}{هـ}$ = ٣

، ∵ $د'$($٠^{-}$) = نهـا (هـ ← $٠^{-}$) $\frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$

= نهـا (هـ ← $٠^{-}$) $\frac{-(١ + هـ)^{٣} + ١ - ٠}{هـ}$ = −٣

∴ $د'$($١^{+}$) ≠ $د'$($١^{-}$) ∴ $د'$(١) غير موجودة

∴ $د'$(س) = { ٣ $س^{٢}$ عندما س > ١ ، غير موجودة عندما س = ١ ، −٣ $س^{٢}$ عندما س < ١ }

، $د''$(س) = { ٦ س عندما س > ١ ، غير موجودة عندما س = ١ ، −٦ س عندما س < ١ }

، ∵ $د''$(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، $د''$(س) غير موجودة عندما : س = ١

، بدراسة اشارة $د''$(س) < ٠ نجد : المنحنى محدب لأعلى فى ] ٠ ، ١ [

المنحنى محدب لأسفل فى كل من : ] −∞ ، ٠ [ ، ] ١ ، ∞ [

، ∵ $د'$(١) غير موجودة أى لا يوجد مماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، ٠)

∴ النقطة (١ ، ٠) ليست نقطة إنقلاب

| س | −∞ | ٠ | | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د''$(س) | + + | ٠ | − − | غير موجودة | + + |
| تحدب منحنى د (س) | لأسفل | | لأعلى | | لأسفل |

[٥] (أ) إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند نقطة عليه (س ، ص) هو ٦ (١ − ٢ س) و كان للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١ و للدالة قيمة صغرى محلية تساوى ٤

أولاً : أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند س = −١

ثانياً : ارسم شكلاً عاماً للمنحنى موضحاً القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الإنقلاب إن وجدت

الحل

∵ د″(س) = ٦ ( ١ − ٢ س ) = ٦ − ١٢ س

∴ د′(س) = ∫ ( ٦ − ١٢ س ) ء س = ٦ س − ٦ س$^2$ + ث

، ∵ للمنحنى نقطة حرجة عند : س = ١

∴ د′( ١ ) = ٠   ∴ ٠ = ٦ − ٦ + ث   و منها : ث = ٠

∴ د′(س) = ٦ س − ٦ س$^2$ = ٦ س ( ١ − س )

، د′(س) = ٠   عندما : س = ٠ ، س = ١

، ∵ د″( ٠ ) > ٠ عندما : س = ٠ ، توجد قيمة صغرى محلية = ٤

∴ المنحنى يمر بالنقطة ( ٠ ، ٤ )

∴ د(س) = ∫ ( ٦ س − ٦ س$^2$ ) ء س = ٣ س$^2$ − ٢ س$^3$ + ث′

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( ٠ ، ٤ )   ∴ د ( ٠ ) = ٤

∴ ٤ = ٠ − ٠ + ث′   و منها : ث′ = ٤

∴ د(س) = ٣ س$^2$ − ٢ س$^3$ + ٤

، د′(س) = ٦ س − ٦ س$^2$ = − ٦ س ( س − ١ )

أولاً : ميل المماس = د′( − ١ ) = − ١٢   ∴ ميل العمودى = $\frac{1}{12}$

، د ( ١ ) = ٩   ∴ معادلة العمودى عند النقطة ( − ١ ، ٩ ) هى :

ص − ٩ = $\frac{1}{12}$ ( س + ١ )   أى : س − ١٢ ص + ١٠٩ = ٠

ثانياً : د′(س) = ٠   عندما : س = ٠ ، س = ١

، و الدالة متناقصة فى كل من : ] ١ ، ∞ [ ، ] − ∞ ، − ١ [

و متزايدة فى ] ٠ ، ١ [   ، د″(س) = ٦ − ١٢ س

( ١ ، ٥ ) نقطة قيمة عظمى محلية ، ( ٠ ، ٤ ) نقطة قيمة صغرى محلية

، ∵ د″( ٠ ) > ٠   ∴ د ( ١ ) = ٤ قيمة صغرى محلية

، ∵ د″( ١ ) < ٠   ∴ د ( ١ ) = ٥ قيمة عظمى محلية

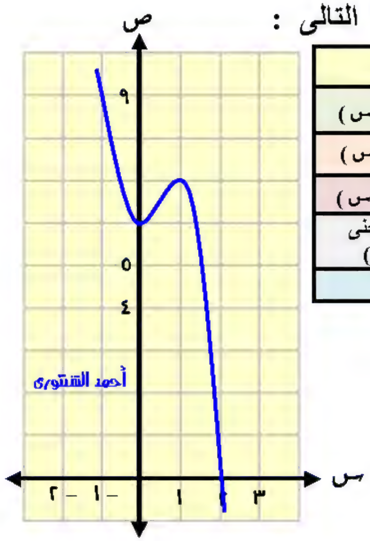
، ∵ د″(س) = ٠ عندما : س = $\frac{1}{2}$

، ∵ د″(س) > ٠ فى ] − ∞ ، $\frac{1}{2}$ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، ∵ د″(س) < ٠ فى ] $\frac{1}{2}$ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة ( $\frac{1}{2}$ ، $\frac{9}{2}$ ) نقطة إنقلاب ، لاحظ الجدول التالى :

| س | − ∞ | | ٠ | | $\frac{1}{2}$ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′(س) | | + + | ٠ | | − − | | ٠ | + + | |
| سلوك د(س) | | ↗ | | | ↘ | | | ↗ | |
| إشارة د″(س) | | | − − | | ٠ | | + + | | |
| تحدب منحنى د(س) | | | لأعلى | | | | لأسفل | | |
| ص | | | ٤ | | $\frac{9}{2}$ | | ٥ | | |
| | | | قيمة عظمى محلية | | نقطة انقلاب | | قيمة صغرى محلية | | |




بعض النقط الاضافية :

عندما : س = − ٤   فإن : د ( س ) = − ٤

، عندما : س = ٠   فإن : د ( س ) = ٠

# المتميز

# فى

# الرياضيات البحتة

# التفاضل و التكامل

الجزء النظرى

و

حلول التمارين

الوحدة الرابعة

| لو_م \| س \| | نهـــا س ← ∞ | ء ص / ء س | ∫ |
|---|---|---|---|

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

## إعداد : أحمد الشنتورى

٢٠١٧ / ٢٠١٨

## الوحدة الرابعة .... التكامل المحدد و تطبيقاته

### ٤ – ١ طرق التكامل

تذكر ما يلى :

[١] المشتقة العكسية للدالة :

يقال أن : الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت :

ت/ ( س ) = د ( س ) لكل س فى مجال د

أى أن : الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د فى فترة ف إذا كان :

$\frac{ء}{ء س}$ ت ( س ) = د ( س ) لكل س ∈ ف

و عند إضافة أى ثابت ( الثابت الاختيارى ) للمشتقة العكسية ت تمثل المشتقة العكسية عندئذ بمجموعة المنحنيات :

ص = د ( س ) + ث ( ث يعرف بالثابت الاختيارى )

التى تختلف عن بعضها فى الثابت ث و يكون ميل المماس لأى منها متساوى لذلك فهى منحنيات متوازية ، و تسمى مجموعة المشتقات العكسية بالتكامل المحدد

[٢] التكامل المحدد :

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل المحدد لهذه الدالة

و يرمز لها بالرمز : ∫ د (س) ء س

و يقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س

و يكون : ∫ د (س) ء س = ت ( س ) + ث

حيث : ث ثابت اختيارى

[٣] خواص التكامل المحدد :

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإن :

(١) ∫ ك د ( س ) ء س = ك ∫ د (س) ء س

حيث : ك ثابت حقيقى ≠ ٠ .

(٢) ∫ [ د ( س ) ± ر ( س ) ] ء س =

ك ∫ د ( س ) ء س ± ∫ ر ( س ) ء س

[٤] جدول بعض الدوال الأصلية المقابلة :

| د ( س ) | دالة أصلية مقابلة | د ( س ) | دالة أصلية مقابلة |
|---|---|---|---|
| $س^{ن}$ | $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ | $أ^{س}$ | $أ^{س} \frac{1}{لو_{هـ} أ}$ |
| $\frac{1}{س}$ | لو$_{هـ}$ \| س \| | حا س | – حتا س |
| $هـ^{س}$ | $هـ^{س}$ | حتا س | حا س |
| | | قا$^2$ س | طا س |

ملاحظات :

(١) للدالة : د (س) = $س^{ن}$ يكون : ن عدد نسبى ≠ – ١

(٢) للدالة : د (س) = $\frac{1}{س}$ = $س^{-1}$ يكون : س ≠ ٠ .

(٣) للدالة : د (س) = $أ^{س}$ يكون : أ > ٠ ، أ ≠ ١

(٤) للدالة : د (س) = قا$^2$ س يكون : ن ∈ ص ،

ن ≠ $\frac{1}{2}$ ( ٢ن + ١ ) π

(٥) من الجدول السابق يمكن استنتاج جدول للتكاملات الأساسية ( الصور القياسية ) كما يمكن تعميم هذا الجدول حيث فى جدول التعميم ( الصور العامة ) يكون : ع = د (س) دالة قابلة للأشتقاق فى فترة ف كما يلى :

## جدول بعض التكاملات القياسية ( الصور القياسية ) :

| | |
|---|---|
| $\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، ن عدد نسبى $\neq -1$ | |
| $\int \frac{1}{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{س} \rvert + \text{ث}$ ، $\text{س} \neq 0$ | |
| $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$ | |
| $\int \text{أ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{أ}^{\text{س}} \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}} + \text{ث}$ ، $\text{أ} > 0$ ، $\text{أ} \neq 1$ | |
| $\int \text{حا س}\ \text{ءس} = -\text{حتا س} + \text{ث}$ | $\int \text{حتا س}\ \text{ءس} = \text{حا س} + \text{ث}$ |
| $\int \text{قا}^2 \text{س}\ \text{ءس} = \text{طا س} + \text{ث}$ ، $\text{س} \neq \frac{1}{2}(2\text{ن}+1)\pi$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ | |

## جدول التعميم لبعض التكاملات القياسية ( الصور العامة ) :

| | |
|---|---|
| $\int \text{ع}^{\text{ن}}\ \text{ءع} = \frac{\text{ع}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، $\text{س} \in \text{ف}$ ، ن عدد نسبى $\neq -1$ ، $[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}$ لها وجود | |
| $\int \frac{1}{\text{ع}}\ \text{ءع} = \text{لو}_{\text{هـ}} \lvert \text{ع} \rvert + \text{ث}$ ، $\text{س} \in \text{ف}$ ، $\text{د}(\text{س}) \neq 0$ | |
| $\int \text{هـ}^{\text{ع}}\ \text{ءع} = \text{هـ}^{\text{ع}} + \text{ث}$ | |
| $\int \text{أ}^{\text{ع}}\ \text{ءع} = \text{أ}^{\text{ع}} \frac{1}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}} + \text{ث}$ ، $\text{س} \in \text{ف}$ ، $\text{أ} > 0$ ، $\text{أ} \neq 1$ | |
| $\int \text{حا ع}\ \text{ءع} = -\text{حتا ع} + \text{ث}$ ، $\text{س} \in \text{ف}$ | |
| $\int \text{حتا ع}\ \text{ءع} = \text{حا ع} + \text{ث}$ ، $\text{س} \in \text{ف}$ | |
| $\int \text{قا}^2 \text{ع}\ \text{ءع} = \text{طا ع} + \text{ث}$ ، $\text{س} \in \text{ف}$ ، $\text{س} \neq \frac{1}{2}(2\text{ن}+1)\pi$ ، $\text{ن} \in \text{ص}$ | |



## تفاضلى الدالة :

إذا كانت : ص = د ( س ) دالة قابلة للاشتقاق

من تعريف المشتقة نعلم أن :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س}) = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\Delta \text{س})}{\Delta \text{س}}$$

∴ عندما : $\Delta \text{س} \to 0$ فإن : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} \to \text{د}'(\text{س})$

ى أن : $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \text{د}'(\text{س})$ عندما : $\Delta \text{س} = 0$ ، $\Delta \text{س} \neq 0$

∴ $\Delta \text{ص} = \text{د}'(\text{س})\ \Delta \text{س}$

### تعريف :

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى : س ، $\Delta$ س حيث : $\Delta$ س يرمز للتغير فى س ، $\Delta \text{س} \neq 0$ فإن :

**(١)** تفاضلى ص يرمز له بالرمز : ءص ، $\text{ءص} = \text{د}'(\text{س})\ \Delta \text{س}$

**(٢)** تفاضلى س يرمز له بالرمز : ءس ، $\text{ءس} = \Delta \text{س}$

**و على ذلك :**

$\text{ءص} = \text{د}'(\text{س})\ \text{ءس}$ أو

$\text{ءص} = \text{ص}'\ \text{ءس}$

### ملاحظة :

$\text{ءع} = \text{ع}'\ \text{ءس}$ ، $\text{ءل} = \text{ل}'\ \text{ءس}$ ، ..... هكذا

## إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٩٨

أوجد تفاضلى كل من :

(أ) ص = ( ٢ س + ٥ )$^{٤}$ (ب) ص = هـ$^{س^٢ - ٣}$

(حـ) ص = $\frac{ع}{ل}$ حيث : ع ، ل دوال في المتغير س

**الحل**

(أ) ء ص = ٤ ( ٢ س + ٥ )$^{٤}$ × ٢ ء س = ٨ ( ٢ س + ٥ )$^{٤}$ ء س

(ب) ء ص = هـ$^{س^٢ - ٣}$ ( ٢ س − ٣ ) ء س

(حـ) ء ص = $\frac{ل . ء ع + ع . ء ل}{ل^٢}$

## إجابة حاول تفكير ناقد صفحة ٩٨

إذا كان : س$^٢$ + ص$^٢$ = ٢٥ أوجد : ء ص بدلالة س ، ص ، ء ص

**الحل**

∵ س$^٢$ + ص$^٢$ = ٢٥ ∴ ٢ س ء س + ٢ ص ء ص = ٠

∴ س ء س = − ص ء ص و منها : ء ص = − $\frac{س}{ص}$ ء س

## التكامل بالتعويض :

توجد عدة طرق لتحويل التكاملات التى ليست على الصورة القياسية إلى تكاملات على الصورة القياسية و أبسط هذه الطرق هى :

طريقة التعويض حيث يستخدم تعويض معين مناسب ليتم تبسيط التكامل و كتابته على الصورة القياسية و منها :

(١) إذا أحتوى التكامل على حاصل ضرب دالتين أى على الصورة :

∫ د [ ر ( س ) ] ر$^{/}$ ( س ) ء س نستخدم التعويض :

ع = ر ( س ) بحيث تكون دالة قابلة الأشتقاق

فإن : ء ع = ر$^{/}$ ( س ) ء س و يكون :

∫ د [ ر ( س ) ] ر$^{/}$ ( س ) ء س = ∫ د ( ع ) ء ع

(٢) إذا أحتوى التكامل على الجذر النونى لدالة أى :

$\sqrt[ن]{ر ( س )}$ نستخدم التعويض : ع = ر ( س ) أو

ع$^{ن}$ = ر ( س ) بحيث تكون دوال قابلة الأشتقاق لإزالة الجذر

**ملاحظة :**

يمكن استخدام طريقة التعويض لأثبات صحة بعض قواعد التكامل

فمثلاً : لإثبات أن :

∫ [ د ( س ) ]$^{ن}$ د$^{/}$ ( س ) ء س = $\frac{[ د ( س ) ]^{ن + ١}}{ن + ١}$ + ث

نضع : ع = د ( س ) ∴ ء ع = د$^{/}$ ( س ) ء س

، ∫ [ د ( س ) ]$^{ن}$ د$^{/}$ ( س ) ء س = ∫ ع$^{ن}$ ء ع

= $\frac{ع^{ن + ١}}{ن + ١}$ + ث = $\frac{[ د ( س ) ]^{ن + ١}}{ن + ١}$ + ث

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٩٩

أوجد : (أ) $\int 3س\,(س^2+3)^4\,ءس$

(ب) $\int \frac{س^2}{(س^3-4)^5}\,ءس$

**الحل**

(أ) نضع : $ع = س^2 + 3$ ∴ $ءع = 2س\,ءس$

∴ المقدار $= \frac{3}{2}\int (س^2+3)^4 \times (2س\,ءس)$

$= \frac{3}{2}\int ع^4\,ءع = \frac{3}{2}\times\frac{1}{5}ع^5 + ث = \frac{3}{10}(س^2+3)^5 + ث$

**حل آخر**

المقدار $= \frac{3}{2}\int 2س\,(س^2+3)^4\,ءس$

$= \frac{3}{2}\int (س^2+3)^4\,(س^2+3)'\,ءس$

$= \frac{3}{2}\times\frac{1}{5}\times(س^2+3)^5 + ث = \frac{3}{10}(س^2+3)^5 + ث$

**حل التمارين التالية باستخدام الحل الآخر بنفسك**

(ب) نضع : $ع = س^3 - 4$ ∴ $ءع = 3س^2\,ءس$

∴ المقدار $= \frac{1}{3}\int (س^3-3)^{-5}\,(3س^2\,ءس)$

$= \frac{1}{3}\int ع^{-5}\,ءع = \frac{1}{3}\times -\frac{1}{4}ع^{-4} + ث$

$= -\frac{1}{12}(س^3-3)^{-4} + ث = \frac{-1}{12(س^3-4)^4} + ث$

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٠٠

أوجد :

(أ) $\int س\,(2س-3)^4\,ءس$   (ب) $\int س^2\sqrt[3]{3س+1}\,ءس$

**الحل**

(أ) نضع : $ع = 2س - 3$ ∴ $س = \frac{1}{2}(ع+3)$

، $ءع = 2\,ءس$ ∴ $ءس = \frac{1}{2}\,ءع$

∴ المقدار $= \int \frac{1}{2}(ع+3)\,ع^4 \times \frac{1}{2}\,ءع$

$= \frac{1}{4}\int (ع^5 + 3ع^4)\,ءع = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}ع^6 + \frac{3}{5}ع^5\right) + ث$

$= \frac{1}{4}\times\frac{1}{30}ع^5(5ع+18) + ث$

$= \frac{1}{120}(2س-3)^4\,[5(2س-3)+18] + ث$

$= \frac{1}{120}(2س-3)^4\,[10س - 15 + 18] + ث$

$= \frac{1}{120}(2س-3)^4\,(10س+3) + ث$

(ب) نضع : $ع^3 = 3س + 1$ ∴ $ع = \sqrt[3]{3س+1}$

∴ $س = \frac{1}{3}(ع^3 - 1)$   ∴ $ءس = ع^2\,ءع$

∴ المقدار $= \int \frac{1}{9}(ع^6 - 2ع^3 + 1) \times ع \times ع^2\,ءع$

$= \int \left(\frac{1}{9}ع^9 - \frac{2}{9}ع^6 + \frac{1}{9}ع^3\right)ءع$

$= \frac{1}{90}ع^{10} - \frac{2}{63}ع^7 + \frac{1}{36}ع^4 + ث$

$= \frac{1}{90}(3س+1)^{\frac{10}{3}} - \frac{2}{63}(2س-3)^{\frac{7}{3}}$

$+ \frac{1}{36}(2س-3)^{\frac{4}{3}} + ث$

## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٠١

أوجد :

(أ) $\int \frac{س}{\sqrt{١ - ٣ س^٢}} \, ء س$

(ب) $\int (س - ٣) هـ^{٦ س - س^٢} \, ء س$

الحل

(أ) نضع : $ع = \sqrt{١ - ٣ س^٢}$ ∴ $ع^٢ = ١ - ٣ س^٢$

و منها : $س ء س = -\frac{١}{٣} ع ء ع$

∴ المقدار $= -\frac{١}{٣} \int ع^{-١} \times ع ء ع = -\frac{١}{٣} \int ء ع$

$= -\frac{١}{٣} ع + ث = -\frac{١}{٣} \sqrt{١ - ٣ س^٢} + ث$

(ب) نضع : $ع = ٦ س - س^٢$ ∴ $ء ع = (٦ - ٢ س) ء س$

∴ المقدار $= \frac{١}{٢} \int هـ^{٦ س - س^٢} (٦ - ٢ س) ء س$

$= \frac{١}{٢} \int هـ^{ع} ء ع = \frac{١}{٢} هـ^{ع} + ث = \frac{١}{٢} هـ^{٦ س - س^٢} + ث$

## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٠١

أوجد : (أ) $\int \frac{هـ^{٢ س}}{هـ^{٢ س} + ٣} \, ء س$ (ب) $\int \frac{١}{س (لو_{هـ} س)^٢} \, ء س$

الحل

(أ) نضع : $ع = هـ^{٢ س} + ٣$ ∴ $ء ع = ٢ هـ^{٢ س} ء س$

∴ المقدار $= \frac{١}{٢} \int ع^{-١} ء ع = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |ع| + ث$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} | هـ^{٢ س} + ٣ | + ث$

(ب) نضع : $ع = لو_{هـ} س$ ∴ $ء ع = \frac{١}{س} ء س$

∴ المقدار $= \int ع^{-٢} ء ع = - ع^{-١} + ث = - (لو_{هـ} س)^{-١} + ث$

## إجابة حاول تفكير ناقد صفحة ١٠١

(١) $\int [د(س)]^{ن} د^{/}(س) \, ء س = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$

حيث : $ن \ne -١$

(٢) $\int \frac{د^{/}(س)}{د(س)} \, ء س = لو_{هـ} |د(س)| + ث$ حيث : $د(س) \ne ٠$

الحل

(١) نضع : $ع = د(س)$ ∴ $ء ع = د^{/}(س) ء س$

∴ $\int [د(س)]^{ن} د^{/}(س) ء س = \int ع^{ن} ء ع$

$= \frac{ع^{ن+١}}{ن+١} + ث = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$

(٢) نضع : $ع = د(س)$ ∴ $ء ع = د^{/}(س) ء س$

∴ $\int \frac{د^{/}(س)}{د(س)} ء س = \int \frac{١}{ع} ء ع = لو_{هـ} |ع| + ث$

$= لو_{هـ} | د(س) | + ث$

## التكامل بالتجزئ :

يستخدم التكامل بالتجزئ لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين ليست احداها مشتقة الأخرى

فإذا كانت : ص ، ع دالتين فى المتغير س و قابلتين للإشتقاق

نعلم أن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص ع}) = \text{ص}\,\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} + \text{ع}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

$\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص ع})\,\text{ءس} = \int \text{ص}\,\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\,\text{ءس} + \int \text{ع}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,\text{ءس}$

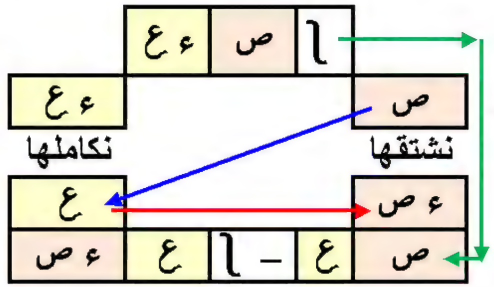
$\therefore \text{ص ع} = \int \text{ص ءع} + \int \text{ع ءص}$

أى أن : $\int \text{ص ءع} = \text{ص ع} - \int \text{ع ءص}$

تسمى هذه المعادلة بقاعدة التكامل بالتجزئ

بحيث يتم اختيار كل من : ص ، ع بطريقة مناسبة بحيث يكون : حساب التكامل بالطرف الأيسر أسهل من حساب التكامل بالطرف الأيمن

الدالة ص اشتقاقها منتهى ، أما : الدالة ع يمكن تكاملها




### بعض تطبيقات التكامل المحدد :

إذا علمنا أن : $\text{د}'$ الدالة تعطى ميل المماس ( أو معدل التغير ) عند أى نقطة على منحنى الدالة د فإنه يمكن أن نعرف الدالة د من عملية التكامل غير المحدد للدالة $\text{د}'$ حيث : $\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس}$

و يلاحظ أن : هذا التكامل لا يعطى دالة وحيدة إذ يحتوى على ثابت اختيارى يمكن تحديده تحديده بإضافة شرط بالبيانات المعطاة كأن : يمر المنحنى بنقطة معينة أو يقطع جزءً من أحد المحورين أو ...



## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٠٢

أوجد : (أ) $\int \text{س}\,\text{ه}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$　　(ب) $\int \text{س}^٢\,\text{ه}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

**الحل**

(أ) نضع : $\text{ص} = \text{س}$ ، $\text{ءع} = \text{ه}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءص} = \text{ءس}$ ، $\text{ع} = -\frac{١}{٢}\,\text{ه}^{-٢\text{س}}$

$\therefore$ المقدار $= \text{س} \times -\frac{١}{٢}\,\text{ه}^{-٢\text{س}} + \int \frac{١}{٢}\,\text{ه}^{-٢\text{س}}\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{س}\,\text{ه}^{-٢\text{س}} - \frac{١}{٤}\,\text{ه}^{-٢\text{س}} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٤}\,(٢\text{س} + ١)\,\text{ه}^{-٢\text{س}} + \text{ث}$

(ب) نضع : $\text{ص} = \text{س}^٢$ ، $\text{ءع} = \text{ه}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءص} = ٢\text{س}\,\text{ءس}$ ، $\text{ع} = \text{ه}^{\text{س}+٣}$

$\therefore$ المقدار $= \text{س}^٢\,\text{ه}^{\text{س}+٣} - ٢\int \text{س}\,\text{ه}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$　　(١)

و لايجاد : $\int \text{س}\,\text{ه}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

نضع : $\text{ن} = \text{س}$ ، $\text{ءل} = \text{ه}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ءن} = \text{ءس}$ ، $\text{ل} = \text{ه}^{\text{س}+٣}$

$\therefore \int \text{س}\,\text{ه}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس} = \text{س}\,\text{ه}^{\text{س}+٣} - \int \text{ه}^{\text{س}+٣}\,\text{ءس}$

$= \text{س}\,\text{ه}^{\text{س}+٣} - \text{ه}^{\text{س}+٣} + \text{ث}$

، بالتعويض فى (١) ينتج :

$\therefore$ المقدار $= \text{س}^٢\,\text{ه}^{\text{س}+٣} - ٢\text{س}\,\text{ه}^{\text{س}+٣} + ٢\text{ه}^{\text{س}+٣} + \text{ث}$

$= \text{ه}^{\text{س}+٣}\,[\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٢] + \text{ث}$

## إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ١٠٣

أوجد : (أ) $\int \text{لو}_{ه} (س + ١) \, ءس$ (ب) $\int \frac{\text{لو}_{ه} س}{\sqrt{س}} \, ءس$

### الحل

(أ) نضع : $ص = \text{لو}_{ه} (س + ١)$ ، $ءع = ءس$

$\therefore ءص = \frac{١}{س + ١} ءس$ ، $ع = س$

$\therefore$ المقدار $= س \, \text{لو}_{ه} (س + ١) - \int \frac{س}{س + ١} ءس$ (١)

، $\int \frac{س}{س + ١} ءس = \int \frac{س + ١ - ١}{س + ١} ءس$

$= \int (١ - \frac{١}{س + ١}) ءس = س - \text{لو}_{ه} |س + ١|$

$\therefore$ من (١) ينتج : المقدار $= س \, \text{لو}_{ه} (س + ١) - س + \text{لو}_{ه} |س + ١| + ث$

(ب) نضع : $ص = \text{لو}_{ه} س$ ، $ءع = س^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$\therefore ءص = \frac{١}{س} ءس$ ، $ع = ٢ س^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ المقدار $= ٢ س^{\frac{١}{٢}} \text{لو}_{ه} س - \int ٢ س^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= ٢ \sqrt{س} \, \text{لو}_{ه} س - ٢ \times ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٢ \sqrt{س} \, ( \text{لو}_{ه} س - ٢ ) + ث$

## إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ١٠٣

أوجد : (أ) $\int \frac{٣ س + ٥}{ه^{٢ س}} ءس$ (ب) $\int \frac{س}{\sqrt{٢ س + ٣}} ءس$

### الحل

(أ) نضع : $ص = ٣ س + ٥$ ، $ءع = ه^{-٢ س} ءس$

$\therefore ءص = ٣ ءس$ ، $ع = -\frac{١}{٢} ه^{-٢ س}$

$\therefore$ المقدار $= -\frac{١}{٢} (٣ س + ٥) ه^{-٢ س} + \frac{٣}{٢} \int ه^{-٢ س} ءس$

$= -\frac{١}{٢} (٣ س + ٥) ه^{-٢ س} - \frac{٣}{٤} ه^{-٢ س} + ث$

(ب) نضع : $ص = س$ ، $ءع = (٢ س + ٣)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$\therefore ءص = ءس$ ، $ع = (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ المقدار $= س (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \int (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$= س (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٣} (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٣} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} ( ٣ س - ٢ س - ٣ ) + ث$

$= \frac{١}{٣} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} ( س - ٣ ) + ث$

### حل آخر

نضع : $ص^{٢} = ٢ س + ٣$ $\therefore س = \frac{١}{٢} (ص^{٢} - ٣)$ ، $ءس = ص \, ءص$

$\therefore$ المقدار $= \frac{١}{٢} \int (ص^{٢} - ٣) \times ص^{-١} \times ص \, ءص = \frac{١}{٢} \int (ص^{٢} - ٣) ءص$

$= \frac{١}{٢} ( \frac{١}{٣} ص^{٣} - ٣ ص ) + ث = \frac{١}{٦} ص (ص^{٢} - ٩) + ث$

$= \frac{١}{٦} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} (٢ س + ٣ - ٩) + ث$

$= \frac{١}{٦} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} (٢ س - ٦) + ث$

$= \frac{١}{٣} (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} (س - ٣) + ث$

### حل ثالث

المقدار $= \frac{١}{٢} \int (٢ س + ٣ - ٣)(٢ س + ٣)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \frac{١}{٢} [ \int (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} ءس - ٣ \int (٢ س + ٣)^{-\frac{١}{٢}} ءس ]$

$= \frac{١}{٢} [ \frac{١}{٣} (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} - ٣ (٢ س + ٣)^{\frac{١}{٢}} ] + ث$ أكمل .....

## إجابة تفكير ناقد صفحة ١٠٤

هل يمكنك إيجاد : $\int \frac{4\text{س}}{\sqrt[3]{2\text{س}+1}} \, \text{ءس}$

بطريقة التكامل بالتعويض ؟ فسر إجابتك

**الحل**

نضع : $\text{ص}^3 = 2\text{س} + 1$     $\therefore \text{س} = \frac{1}{2}(\text{ص}^3 - 1)$

، $\text{ص} = \sqrt[3]{2\text{س}+1}$     ، $\text{ءس} = \frac{3}{2}\text{ص}^2 \, \text{ءص}$

$\therefore$ المقدار $= 3\int (\text{ص}^4 - \text{ص})\,\text{ءص} = 3\left(\frac{1}{5}\text{ص}^5 - \frac{1}{2}\text{ص}^2\right) + \text{ث}$

$= \frac{3}{10}\text{ص}^2(2\text{ص}^3 - 5) + \text{ث}$

$= \frac{3}{10}(2\text{س}+1)^{\frac{2}{3}}[2(2\text{س}+1) - 5] + \text{ث}$

$= \frac{3}{10}(2\text{س}+1)^{\frac{2}{3}}(4\text{س} + 2 - 5) + \text{ث}$

$= \frac{3}{10}(2\text{س}+1)^{\frac{2}{3}}(4\text{س} - 3) + \text{ث}$

و هى نفس إجابة مثال (٨) فقرة (ب) بعد تعديل خطأ الجواب النهائى

## إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ١٠٥

أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة ( ٠ ، ١ ) و الذى ميل المماس له عند أى نقطة ( س ، ص ) واقعة عليه يساوى $\text{س}\sqrt{\text{س}^2+1}$

**الحل**

$\because$ ميل المماس $= \text{د}'(\text{س}) = \text{س}\sqrt{\text{س}^2+1}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \int \text{س}\sqrt{\text{س}^2+1}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\int (\text{س}^2+1)^{\frac{1}{2}}(2\text{س})\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(\text{س}^2+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{1}{3}(\text{س}^2+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

، $\because$ النقطة ( ٠ ، ١ ) تقع على المنحنى

$\therefore 1 = \frac{1}{3} + \text{ث}$     و منها : $\text{ث} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ معادلة المنحنى هى : $\text{ص} = \frac{1}{3}(\text{س}^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$

## حل تمارين ( ٤ – ١ ) صفحة ١٠٥ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(١)** $\int \text{س}(\text{س}^2+3)^5\,\text{ءس} = \dots$

(أ) $\frac{1}{6}(\text{س}^2+3)^6 + \text{ث}$     (ب) $\frac{1}{12}(\text{س}^2+3)^6 + \text{ث}$

(حـ) $\frac{1}{4}(\text{س}^2+3)^4 + \text{ث}$     (ء) $\frac{1}{8}(\text{س}^2+3)^4 + \text{ث}$

**(٢)** إذا كان : $\int (2\text{س}+3)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{ءس} = \text{ص ع} - \int \text{ع}\,\text{ءص}$

فإن : ص ع = ....

(أ) $2\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$     (ب) $(2\text{س}+3)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

(حـ) $\frac{1}{2}(2\text{س}+3)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$     (ء) $\text{س}(\text{س}+3)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

**(٣)** إذا كان : $\int (2\text{س}-1)\,\text{هـ}^{\text{س}^2+3}\,\text{ءس} = \text{ص ع} - \int \text{ع}\,\text{ءص}$

فإن : $\int \text{ع}\,\text{ءص} = \dots$

(أ) $\text{هـ}^{\text{س}^2+3} + \text{ث}$     (ب) $\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}^2+3} + \text{ث}$

(حـ) $-\text{هـ}^{\text{س}^2+3} + \text{ث}$     (ء) $-\frac{1}{2}\text{هـ}^{\text{س}^2+3} + \text{ث}$

**الحل**

**(١)** المقدار $= \frac{1}{2}\int 2\text{س}(\text{س}^2+3)^5\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\int (\text{س}^2+3)^5(\text{س}^2+3)'\,\text{ءس}$

$= \frac{1}{٢} \times \frac{1}{٣} \times (س^2 + ٣)^6 + ث = \frac{1}{١٢} (س^2 + ٣)^6 + ث$

**حل آخر**

نضع : $ع = س^2 + ٣$ $\therefore ء ع = ٢ س ء س$

، المقدار $= \frac{1}{٢} \int (س^2 + ٣)^5 (٢ س ء س) = \frac{1}{٢} \int ع^5 ء ع$

$= \frac{1}{٢} \times \frac{1}{٦} ع^6 + ث = \frac{1}{١٢} (س^2 + ٣)^6 + ث$

**(٢)** نضع : $ص = لو_هـ س$ ، $ء ع = (٢ س + ٣) ء س$

$\therefore ء ص = \frac{1}{س} ء س$ ، $ع = س^2 + ٣ س = س (س + ٣)$

$\therefore ص ع = س (س + ٣) لو_هـ س$

**(٣)** نضع : $ص = ٢ س - ١$ ، $ء ع = هـ^{٢ س + ٣} ء س$

$\therefore ء ص = ٢ ء س$ ، $ع = \frac{1}{٢} هـ^{٢ س + ٣}$

$\therefore \int ع ء ص = ٢ \times \frac{1}{٢} \int هـ^{٢ س + ٣} ء س = \int هـ^{٢ س + ٣} ء س$

$= \frac{1}{٢} هـ^{٢ س + ٣} + ث$

باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية :

**(٤)** $\int س (س - ٢)^4 ء س$ **(٥)** $\int س^2 (س - ٢)^3 ء س$

**(٦)** $\int س^3 (س^2 - ١)^5 ء س$ **(٧)** $\int س \sqrt{س + ٤} ء س$

**(٨)** $\int (س^2 - ١) \sqrt{س + ١} ء س$

**(٩)** $\int س^5 (س^2 + ٣)^4 ء س$ **(١٠)** $\int \frac{س}{٣ س^2 + ٢} ء س$

**(١١)** $\int \frac{س}{س + ١} ء س$ **(١٢)** $\int \frac{س + ١}{\sqrt{س - ١}} ء س$

**(١٣)** $\int \frac{س^2}{\sqrt{٢ س - ١}} ء س$ **(١٤)** $\int س هـ^{-س^2} ء س$

**(١٥)** $\int \frac{هـ^{-س} - ١}{هـ^{-س} + س} ء س$ **(١٦)** $\int لو_هـ ٥ س \frac{ء س}{س}$

**(١٧)** $\int (لو_هـ س)^3 \frac{ء س}{س}$ **(١٨)** $\int \frac{1}{س لو_هـ س} ء س$

**الحل**

**(٤)** نضع : $ع = س - ٢$ $\therefore س = ع + ٢$ ، $ء س = ء ع$ $\therefore$ المقدار

$= \int (ع + ٢) ع^4 ء ع = \int (ع^5 + ٢ ع^4) ء ع$

$= \frac{1}{٦} ع^6 + \frac{٢}{٥} ع^5 + ث = \frac{1}{٣٠} ع^5 (٥ ع + ١٢) + ث$

$= \frac{1}{٣٠} (س - ٢)^5 (٥ س - ١٠ + ١٢) + ث$

$= \frac{1}{٣٠} (س - ٢)^5 (٥ س + ٢) + ث$

**(٥)** نضع : $ع = س - ٢$ $\therefore س = ع + ٢$ ، $ء س = ء ع$

$\therefore$ المقدار $= \int (ع + ٢)^2 ع^3 ء ع = \int (ع^2 + ٤ ع + ٤) ع^3 ء ع$

$= \int (ع^5 + ٤ ع^4 + ٤ ع^3) ء ع$

$= \frac{1}{٦} ع^6 + \frac{٤}{٥} ع^5 + ع^4 + ث$

$= \frac{1}{٣٠} ع^4 (٥ ع^2 + ٢٤ ع + ٣٠) + ث$

$= \frac{1}{٣٠} (س - ٢)^4 [٥ (س - ٢)^2 + ٢٤ (س - ٢) + ٣٠] + ث$

$= \frac{1}{٣٠} (س - ٢)^4 [٥ س^2 - ٢٠ س + ٢٠ + ٢٤ س - ٤٨ + ٣٠] + ث$

$= \frac{1}{٣٠} (س - ٢)^4 (٥ س^2 + ٤ س + ٢) + ث$

(٦) نضع : ع = س$^{٢}$ − ١   ∴ س$^{٢}$ = ع + ١ ، ٢س ءس = ءع

∴ ∫ س$^{٢}$ (س$^{٢}$ − ١)$^{٥}$ ءس = ١/٢ ∫ س$^{٢}$ (س$^{٢}$ − ١)$^{٥}$ (٢س ءس)

= ١/٢ ∫ (ع + ١) ع$^{٥}$ ءع = ١/٢ ∫ (ع$^{٦}$ + ع$^{٥}$) ءع

= ١/٢ ( ١/٧ ع$^{٧}$ + ١/٦ ع$^{٦}$ ) + ث = ١/٢ × ١/٤٢ ع$^{٦}$ (٦ع + ٧) + ث

= ١/٨٤ (س$^{٢}$ − ١)$^{٦}$ (٦س$^{٢}$ − ٦ + ٧) + ث

= ١/٨٤ (س$^{٢}$ − ١)$^{٦}$ (٦س$^{٢}$ + ١) + ث

(٧) نضع : ع$^{٢}$ = س + ٤   ∴ س = ع$^{٢}$ − ٤ ، ءس = ٢ع ءع

∴ المقدار = ∫ (ع$^{٢}$ − ٤) ع × ٢ع ءع = ∫ (٢ع$^{٤}$ − ٨ع$^{٢}$) ءع

= ٢/٥ ع$^{٥}$ − ٨/٣ ع$^{٣}$ + ث = ٢/١٥ ع$^{٣}$ (٣ع$^{٢}$ − ٢٠) + ث

= ٢/١٥ (س + ٤)$^{٣/٢}$ (٣س − ٨) + ث

(٨) نضع : ع$^{٢}$ = س + ١   ∴ س = ع$^{٢}$ − ١ ، ءس = ٢ع ءع

∴ المقدار = ∫ [ (ع$^{٢}$ − ١)$^{٢}$ − ١ ] ع × ٢ع ءع

= ∫ (ع$^{٤}$ − ٢ع$^{٢}$) ٢ع$^{٢}$ ءع = ∫ (٢ع$^{٦}$ − ٤ع$^{٤}$) ءع

= ٢/٧ ع$^{٧}$ − ٤/٥ ع$^{٥}$ + ث = ٢/٣٥ ع$^{٥}$ (٥ع$^{٢}$ − ١٤) + ث

= ٢/٣٥ (س + ١)$^{٥/٢}$ (٥س − ٩) + ث

(٩) نضع : ع = س$^{٢}$ + ٣   ∴ س$^{٢}$ = ع − ٣ ، ٢س ءس = ءع

∴ المقدار = ١/٢ ∫ [س$^{٢}$]$^{٢}$ (س$^{٢}$ + ٣)$^{٤}$ (٢س ءس)

= ١/٢ ∫ (ع − ٣)$^{٢}$ ع$^{٤}$ ءع = ١/٢ ∫ (ع$^{٦}$ − ٦ع$^{٥}$ + ٩ع$^{٤}$) ءع

= ١/٢ ( ١/٧ ع$^{٧}$ − ع$^{٦}$ + ٩/٥ ع$^{٥}$ ) + ث

= ١/٧٠ ع$^{٥}$ (٥ع$^{٢}$ − ٣٥ع + ٦٣) + ث

= ١/٧٠ (س$^{٢}$ + ٣)$^{٥}$ (٥س$^{٤}$ − ٥س$^{٢}$ + ٣) + ث

(١٠) نضع : ع = ٣س$^{٢}$ + ٢   ∴ ءع = ٦س ءس

∴ المقدار = ١/٦ ∫ ٦س ءس / (٣س$^{٢}$ + ٢) = ١/٦ ∫ ءع / ع = ١/٦ لوهـ | ع | + ث

= ١/٦ لوهـ | ٣س$^{٢}$ + ٢ | + ث

(١١) نضع : ع = س + ١   ∴ ءع = ءس

∴ المقدار = ∫ (ع − ١)/ع ءع = ∫ (١ − ١/ع) ءع = ع − لوهـ | ع | + حـ

= س + ١ − لوهـ | س + ١ | + حـ = س − لوهـ | س + ١ | + ث

(١٢) نضع : ع$^{٢}$ = س − ١   ∴ س = ع$^{٢}$ + ١ ، ءس = ٢ع ءع

∴ المقدار = ∫ (ع$^{٢}$ + ٢)/ع × ٢ع ءع = ∫ (٢ع$^{٢}$ + ٤) ءع

= ٢/٣ ع$^{٣}$ + ٤ع + ث = ٢/٣ ع (ع$^{٢}$ + ٦) + ث

= ٢/٣ √(س − ١) (س − ١ + ٦) + ث

= ٢/٣ √(س − ١) (س + ٥) + ث

(١٣) نضع : ع$^{٢}$ = ٢س − ١   ∴ ءس = ع ءع ، س = ١/٢ (ع$^{٢}$ + ١)

∴ المقدار = ١/٤ ∫ (ع$^{٤}$ + ٢ع$^{٢}$ + ١)/ع × ع ءع = ١/٤ ∫ (ع$^{٤}$ + ٤ع$^{٢}$ + ١) ءع

= ١/٤ ( ١/٥ ع$^{٥}$ + ٢/٣ ع$^{٣}$ + ع ) + ث

= ١/٤ × ١/١٥ ع ( ٣ع$^{٤}$ + ١٠ع$^{٢}$ + ١٥ ) + ث

$= \frac{1}{20}\sqrt{2س - 1}\,(12س^2 + 8س + 8) + ث$

$= \frac{1}{15}\sqrt{2س - 1}\,(3س^2 + 2س + 2) + ث$

**(١٤)** نضع : $ع = هـ^{-س^2}$ ∴ $ءع = -2س\,هـ^{-س^2}\,ءس$

∴ المقدار $= -\frac{1}{2}\int -2س\,هـ^{-س^2}\,ءس = -\frac{1}{2}\int ءع$

$= -\frac{1}{2}ع + ث = -\frac{1}{2}هـ^{-س^2} + ث$

**(١٥)** نضع : $ع = هـ^{-س} + س$ ∴ $ءع = (-هـ^{-س} + 1)\,ءس$

∴ $ءع = -(هـ^{-س} - 1)\,ءس$

∴ المقدار $= -\int \frac{ءع}{ع} = -لو_هـ|ع| + ث = -لو_هـ|هـ^{-س} + س| + ث$

**(١٦)** المقدار $= \int لو_هـ 5س\,(\frac{1}{س})\,ءس = \int لو_هـ 5س\,(لو_هـ 5س)'\,ءس$

$= \frac{1}{2}(لو_هـ 5س)^2 + ث$

حل آخر

نضع : $ع = لو_هـ 5س$ ∴ $ءع = \frac{1}{5س} \times 5\,ءس = \frac{ءس}{س}$

∴ المقدار $= \int ع\,ءع = \frac{1}{2}ع^2 + ث = \frac{1}{2}(لو_هـ 5س)^2 + ث$

**(١٧)** مثل (١٦) ، المقدار $= \int (لو_هـ س)^3 (لو_هـ س)'\,ءس = \frac{1}{4}(لو_هـ س)^4 + ث$

**(١٨)** مثل (١٦) ، المقدار $= \int \frac{1}{لو_هـ س}(لو_هـ س)'\,ءس = لو_هـ|لو_هـ س| + ث$

باستخدام التجزئ المناسب أوجد التكاملات الآتية :

**(١٩)** $\int 4س\,هـ^{2س}\,ءس$  **(٢٠)** $\int س^3\,هـ^{س^2}\,ءس$

**(٢١)** $\int \frac{س}{هـ^{2س}}\,ءس$  **(٢٢)** $\int س^3\,لو_هـ س\,ءس$

**(٢٣)** $\int لو_هـ س^2\,ءس$  **(٢٤)** $\int (لو_هـ س)^2\,ءس$

**(٢٥)** $\int لو_هـ س\,\frac{ءس}{س^2}$  **(٢٦)** $\int (س + 1)^2\,هـ^{2س}\,ءس$

**(٢٧)** $\int س\,(لو_هـ س)^2\,ءس$

الحل

**(١٩)** نضع : $ص = 4س$ ، $ءع = هـ^{2س}\,ءس$

∴ $ءص = 4\,ءس$ ، $ع = \frac{1}{2}هـ^{2س}$

∴ المقدار $= 4س \times \frac{1}{2}هـ^{2س} - \int \frac{1}{2}هـ^{2س} \times 4\,ءس$

$= 2س\,هـ^{2س} - 2\int هـ^{2س}\,ءس$

$= 2س\,هـ^{2س} - 2 \times \frac{1}{2}هـ^{2س} + ث = 2س\,هـ^{2س} - هـ^{2س} + ث$

$= (2س - 1)\,هـ^{2س} + ث$

**(٢٠)** نضع : $ص = \frac{1}{2}س^2$ ، $ءع = هـ^{س^2} \times (2س)\,ءس$

∴ $ءص = س\,ءس$ ، $ع = هـ^{س^2}$

∴ المقدار $= \frac{1}{2}س^2\,هـ^{س^2} - \int س\,هـ^{س^2}\,ءس$

$= \frac{1}{2}س^2\,هـ^{س^2} - \frac{1}{2}\int هـ^{س^2} \times (2س)\,ءس$

$= \frac{1}{2}س^2\,هـ^{س^2} - \frac{1}{2}هـ^{س^2} + ث = \frac{1}{2}(س^2 - 1)\,هـ^{س^2} + ث$

**(٢١)** نضع : $ص = س$ ، $ءع = هـ^{-2س}\,ءس$

∴ $ءص = ءس$ ، $ع = -\frac{1}{2}هـ^{-2س}$

∴ المقدار = − ½ س هـ$^{-٢س}$ − ½ ∫ هـ$^{-٢س}$ ءس

= − ½ س هـ$^{-٢س}$ − ¼ هـ$^{-٢س}$ + ث

= − ¼ هـ$^{-٢س}$ ( ٢س + ١ ) + ث = − $\frac{٢س + ١}{٢ هـ^{٢س}}$ + ث

**(٢٢)** نضع : ص = لوهـ س ، ءع = س$^{٣}$ ءس

∴ ءص = $\frac{١}{س}$ ءس ، ع = ¼ س$^{٤}$

∴ المقدار = ¼ س$^{٤}$ لوهـ س − ¼ ∫ س$^{٣}$ ءس

= ¼ س$^{٤}$ لوهـ س − $\frac{١}{١٦}$ س$^{٤}$ + ث

= $\frac{١}{١٦}$ س$^{٤}$ ( ٤ لوهـ س − ١ ) + ث

**(٢٣)** نضع : ص = لوهـ س$^{٢}$ ، ءع = ءس

∴ ءص = $\frac{١}{س^{٢}}$ × ٢ س ءس = $\frac{٢}{س}$ ءس ، ع = س

∴ المقدار = س لوهـ س$^{٢}$ − ∫ ٢ ءس = س لوهـ س$^{٢}$ − ٢ س + ث

= س ( لوهـ س$^{٢}$ − ٢ ) + ث

**(٢٤)** نضع : ص = (لوهـ س)$^{٢}$ ، ءع = ءس

∴ ءص = ٢ لوهـ س × $\frac{١}{س}$ ءس ، ع = س

∴ المقدار = س (لوهـ س)$^{٢}$ − ٢ ∫ لوهـ س ءس (١)

و لايجاد : ∫ لوهـ س ءس

نضع : ى = لوهـ س ، ءل = ءس

∴ ءى = $\frac{١}{س}$ ءس ، ل = س

∴ ∫ لوهـ س ءس = س لوهـ س − ∫ ءس = س لوهـ س − س + ث

، بالتعويض فى ينتج (١) :

∴ المقدار = س (لوهـ س)$^{٢}$ − ٢ س لوهـ س + ٢ س + ث

= س [ (لوهـ س)$^{٢}$ − ٢ لوهـ س + ٢ ] + ث

**(٢٥)** نضع : ص = لوهـ س ، ءع = س$^{-٢}$ ءس

∴ ءص = $\frac{١}{س}$ ءس ، ع = − س$^{-١}$

∴ المقدار = − س$^{-١}$ لوهـ س + ∫ ءس = − س$^{-١}$ لوهـ س + س + ث

= − س$^{-١}$ ( لوهـ س + ١ ) + ث = − $\frac{١}{س}$ ( لوهـ س + ١ ) + ث

**(٢٦)** نضع : ص = (س + ١)$^{٢}$ ، ءع = هـ$^{٢س}$ ءس

∴ ءص = ٢ ( س + ١ ) ءس ، ع = ½ هـ$^{٢س}$

∴ المقدار = ½ ( س + ١ )$^{٢}$ هـ$^{٢س}$ − ∫ ( س + ١ ) هـ$^{٢س}$ ءس (١)

و لايجاد : ∫ ( س + ١ ) هـ$^{٢س}$ ءس

نضع : ى = س + ١ ، ءل = هـ$^{٢س}$ ءس

∴ ءى = ءس ، ل = ½ هـ$^{٢س}$

∴ ∫ ( س + ١ ) هـ$^{٢س}$ ءس = ½ ( س + ١ ) هـ$^{٢س}$ − ½ ∫ هـ$^{٢س}$ ءس

= ½ ( س + ١ ) هـ$^{٢س}$ − ¼ هـ$^{٢س}$ + ث

، بالتعويض فى ينتج (١) :

∴ المقدار = ½ ( س + ١ )$^{٢}$ هـ$^{٢س}$ − ½ ( س + ١ ) هـ$^{٢س}$ + ¼ هـ$^{٢س}$ + ث

= ¼ هـ$^{٢س}$ [ ٢ ( س + ١ )$^{٢}$ − ٢ ( س + ١ ) + ١ ] + ث

= ¼ هـ$^{٢س}$ ( ٢ س$^{٢}$ + ٤ س + ٢ − ٢ س − ٢ + ١ ) + ث

= ¼ هـ$^{٢س}$ ( ٢ س$^{٢}$ + ٢ س + ١ ) + ث

**(٢٧)** نضع : $ص = (لو_{هـ} س)^{٢}$ ، $ءع = س \, ءس$

∴ $ءص = ٢ \, لو_{هـ} س \times \frac{١}{س} \, ءس$ ، $ع = \frac{١}{٢} س^{٢}$

∴ المقدار $= \frac{١}{٢} س^{٢} (لو_{هـ} س)^{٢} - \int س \, لو_{هـ} س \, ءس$ (I)

و لإيجاد : $\int س \, لو_{هـ} س \, ءس$

نضع : $و = لو_{هـ} س$ ، $ءل = س \, ءس$

∴ $ءو = \frac{١}{س} ءس$ ، $ل = \frac{١}{٢} س^{٢}$

∴ $\int س \, لو_{هـ} س \, ءس = \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} س - \frac{١}{٢} \int س \, ءس$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} س - \frac{١}{٤} س^{٢} + ث$

، بالتعويض فى (I) ينتج :

∴ المقدار $= \frac{١}{٢} س^{٢} (لو_{هـ} س)^{٢} - \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} س + \frac{١}{٤} س^{٢} + ث$

$= \frac{١}{٤} س^{٢} \left[ ٢ (لو_{هـ} س)^{٢} - ٢ \, لو_{هـ} س + ١ \right] + ث$

## أجب عن الأسئلة الآتية :

**(٢٨)** أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة أ ( ٢ ، ٣ ) و ميل العمودى عليه عند نقطة ( س ، ص ) هو : ٣ − س

**الحل**

∵ ميل العمودى = ٣ − س ∴ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{٣ - س} = \frac{١}{س - ٣}$

، $ص = \int \frac{١}{س - ٣} ءس = لو_{هـ} |س - ٣| + ث$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( ٢ ، ٣ ) ∴ $٣ = لو_{هـ} ١ + ث$

و منها : $ث = ٣$ ∴ $ص = لو_{هـ} |س - ٣| + ٣$

**(٢٩)** إذا كان ميل المماس لمنحنى عند نقطة ( س ، ص ) واقعة عليه هو : $س \sqrt{س + ١}$ ، أوجد معادلة المنحنى علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة $( ٠ ، \frac{١١}{١٥} )$

**الحل**

∵ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = س \sqrt{س + ١}$

∴ $ص = \int س \sqrt{س + ١} \, ءس = \int (س + ١ - ١)(س + ١)^{\frac{١}{٢}} ءس$

∴ $ص = \int (س + ١)^{\frac{٣}{٢}} ءس - \int (س + ١)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$= \frac{٢}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} (س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة $( ٠ ، \frac{١١}{١٥} )$ ∴ $\frac{١١}{١٥} = \frac{٢}{٥} - \frac{٢}{٣} + ث$

و منها : $ث = ١$ ∴ $ص = \frac{٢}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣} (س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ١$

**(٣٠)** أوجد معادلة المنحنى ص = د ( س ) إذا كان : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = أ س + ب$ حيث : أ ، ب ثابتان و للمنحنى نقطة انقلاب عند النقطة ( ٠ ، ٢ ) و قيمة صغرى محلية عند النقطة ( ١ ، ٠ ) ثم أوجد القيمة العظمى المحلية لهذا المنحنى

**الحل**

∵ للمنحنى نقطة انقلاب عند ( ٠ ، ٢ ) ∴ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٠$ عندما : $س = ٠$

∴ $٠ = أ \times ٠ + ب$ و منها : $ب = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \int أ س \, ءس = \frac{١}{٢} أ س^{٢} + ث$

، ∵ للمنحنى قيمة صغرى محلية عند ( ١ ، ٠ )

∴ ءص / ءس = ٠ عندما : س = ١

∴ ٠ = ١/٢ م + ث و منها : ث = − ١/٢ م

∴ ءص / ءس = ١/٢ م س٢ − ١/٢ م

∴ ص = ∫ ( ١/٢ م س٢ − ١/٢ م ) ءس = ١/٦ م س٣ − ١/٢ م س + ث/

، ∵ المنحنى يمر بالنقطتين : ( ٠ ، ٢ ) ، ( ١ ، ٠ )

∴ ث/ = ٢ ، م = ٦

∴ ص = س٣ − ٣ س + ٢

، ص/ = ٣ س٢ − ٣

، ص// = ٦ س

بوضع : ص/ = ٠ ∴ ٣ س٢ − ٣ = ٠

و منها : س = ١ ، س = − ١

، ∵ [ص//]س = −١ < ٠

∴ عند : س = − ١ توجد قيمة عظمى محلية

و هى : [ص]س = −١ = − ١ + ٣ + ٢ = ٤

## ٤ − ٢ تكامل الدوال المثلثية

نذكر أن :

| | |
|---|---|
| ء/ءس ( حا س ) = حتا س | ء/ءس ( حتا س ) = − حا س |
| ء/ءس ( طا س ) = قا٢ س | ء/ءس ( طتا س ) = − قتا٢ س |
| ء/ءس ( قا س ) = قا س طا س | ء/ءس ( قتا س ) = − قتا س طتا س |

و عليه يمكن استنتاج قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية كما بالجدول التالى :

| |
|---|
| ∫ حا س ءس = − حتا س + ث |
| ∫ حتا س ءس = حتا س + ث |
| ∫ قا٢ س ءس = طا س + ث |
| ∫ قتا٢ س ءس = − طتا س + ث |
| ∫ قا س طا س ءس = قا س + ث |
| ∫ قتا س طتا س ءس = − قتا س + ث |

ملاحظة هامة :

نلاحظ عند تعميم الصور القياسية للتكامل أن :

(١) عند إضافة ثابت إلى المتغير المستقل س فإن : ذلك لا يؤثر على صيغة التكامل

(٢) ضرب المتغير المستقل س فى المعامل (م) مثلاً فإن : التكامل يحتفظ بصيغته السابقة إلا أنه يقسم على هذا المعامل (م)

و نجد أن :

١) الصورة : $\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{ء س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$

هى : $\int (\text{أ س}+\text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ء س} = \frac{(\text{أ س}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{ث}$

حيث : ث ثابت اختيارى ، ن عدد نسبى $\neq -١$

٢) الصورة : $\int \text{حا س ء س} = -\text{حتا س} + \text{ث}$ هى :

$\int \text{حا}(\text{أ س}+\text{ب}) \, \text{ء س} = -\frac{١}{\text{أ}} \text{حتا}(\text{أ س}+\text{ب}) + \text{ث}$

حيث : ث ثابت اختيارى و بالمثل باقى الصور

نتذكر أن :

(١) $\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حتا}^{٢}\text{س} = ١$

(٢) $\text{طا}^{٢}\text{س} + ١ = \text{قا}^{٢}\text{س}$ و منها : $\text{طا}^{٢}\text{س} = \text{قا}^{٢}\text{س} - ١$

(٣) $\text{حا ٢س} = ٢ \, \text{حا س حتا س}$

و منها : $\text{حا س حتا س} = \frac{١}{٢} \text{حا ٢س}$

(٤) $\text{حتا ٢س} = \text{حتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س} = ١ - ٢\,\text{حتا}^{٢}\text{س}$

$= ٢\,\text{حتا}^{٢}\text{س} - ١$ و منها :

١) $\text{حتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س} = \text{حتا ٢س}$

٢) $\text{حا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}\text{حتا ٢س}$

٣) $\text{حتا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\text{حتا ٢س}$

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٠٧

أوجد : (أ) $\int (\text{حا س} + \text{قا}^{٢}\text{س}) \, \text{ء س}$

(ب) $\int \text{قا س} (\text{حتا}^{٢}\text{س} + \text{طا س}) \, \text{ء س}$

(حـ) $\int \text{قتا س} (\text{طتا س} - \text{قتا س}) \, \text{ء س}$

(ء) $\int \frac{\text{حتا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{حا س}} \, \text{ء س}$

### الحل

(أ) المقدار $= -\text{حتا س} + \text{طا س} + \text{ث}$

(ب) المقدار $= \int (\text{جتا س} + \text{قا س طا س}) \, \text{ء س}$

$= \text{حا س} + \text{قا س} + \text{ث}$

(حـ) المقدار $= \int (\text{قتا س طتا س} - \text{قتا}^{٢}\text{س}) \, \text{ء س}$

$= -\text{قتا س} + \text{طتا س} + \text{ث}$

(ء) المقدار $= \int \frac{(١ - \text{حا س})(١ + \text{حا س})}{١ - \text{حا س}} \, \text{ء س}$

$= \int (١ + \text{حا س}) \, \text{ء س} = \text{س} - \text{حتا س} + \text{ث}$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٠٨

أوجد : (أ) $\int (\text{حا ٣س} - \text{قا}^{٢}\,\text{٢س}) \, \text{ء س}$

(ب) $\int ٦ \, \text{قا ٢س} (\text{طا ٢س} + \text{حتا}^{٢}\,\text{٢س}) \, \text{ء س}$

(حـ) $\int [\,١ + \text{طتا}^{٢}(\text{٣س} - ١)\,] \, \text{ء س}$

(ء) $\int \frac{\text{حا}^{٢}(\text{٢س} - ٣)}{١ - \text{حتا}(\text{٢س} - ٣)} \, \text{ء س}$

### الحل

(أ) المقدار = $\frac{1}{3}$ حتا ٣ س − $\frac{1}{2}$ حتا ٢ س + ث

(ب) المقدار = ∫ ( ٦ قا ٢ س طا ٢ س + ٦ حتا ٢ س ) ء س

= ٦ × $\frac{1}{2}$ قا ٢ س + ٦ × $\frac{1}{2}$ حا ٢ س + ث

= ٣ قا ٢ س + ٣ حا ٢ س + ث

(حـ) المقدار = ∫ [ طتا$^2$ ( ٣ س − ١ ) ] ء س = $\frac{1}{3}$ قتا ( ٣ س − ١ ) + ث

(ء) المقدار = ∫ $\frac{\text{١ − حتا}^2\text{ ( ٢ س − ٣ )}}{\text{١ − حتا ( ٢ س − ٣ )}}$ ء س

= ∫ [ ١ + حتا ( ٢ س − ٣ ) ] ء س

= س + $\frac{1}{2}$ حا ( ٢ س − ٣ ) + ث

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٠٣

أوجد معادلة المنحنى المار بالنقطة ( ١ ، − ٢ ) و ميل المماس له عند أى نقطة ( س ، ص ) واقعة عليه هو :

ءص / ءس = ٣ π حتا π س − ٢ π حا π س

الحل

∵ ءص / ءس = ٣ π حتا π س − ٢ π حا π س

∴ ص = ∫ ( ٣ π حتا π س − ٢ π حا π س ) ء س

= ٣ حا π س + ٢ حتا π س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( ١ ، − ٢ )

∴ − ٢ = ٣ حا π + ٢ حتا π + ث

∴ − ٢ = − ٢ + ث و منها : ث = صفر

∴ معادلة المنحنى هى : ص = ٣ حا π س + ٢ حتا π س

## حل تمارين ( ٤ − ٢ ) صفحة ١٠٩ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت : ءص / ءس = قتا$^2$ س ، ص = ٢ عند س = $\frac{1}{4}$ π

فإن : ص = ....

(أ) − ٢ − طتا س (ب) ٢ − طتا س

(حـ) − ٣ − طتا س (ء) ٣ − طتا س

(٢) ∫ ٢ حتا$^2$ س ء س = ....

(أ) س + $\frac{1}{2}$ حا ٢ س + ث (ب) س + ٢ حا ٢ س + ث

(حـ) س − $\frac{1}{2}$ حا ٢ س + ث (ء) س − حا ٢ س + ث

(٣) ∫ قا$^4$ س طا س ء س = ....

(أ) $\frac{1}{5}$ قا$^5$ س + ث (ب) $\frac{1}{4}$ قا$^4$ س + ث

(حـ) $\frac{1}{3}$ قا$^3$ س + ث (ء) − $\frac{1}{3}$ قا$^3$ س + ث

(٤) ∫ ( ٣ س + ٢ ) حا س ء س = ....

(أ) ( ٣ س + ٢ ) حتا س + ٣ حا س + ث

(ب) − ( ٣ س + ٢ ) حتا س + ٣ حا س + ث

(حـ) ( ٣ س + ٢ ) حتا س + ٢ حا س + ث

(ء) − ( س + ١ ) حتا س − ٢ حا س + ث

الحل

(١) ص = ∫ قتا$^2$ س ء س = − طتا س + ث

، ∵ ص = ٢ عند س = $\frac{1}{4}$ π  ∴ ٢ = – ظتا $\frac{1}{4}$ π + ث

∴ ٢ = – ١ + ث  و منها : ث = ٣  ∴ ص = – ظتا س + ٣

(٢) ∵ حتا ٢ س = ٢ حتا$^{2}$ س – ١  ∴ ٢ حتا$^{2}$ س = ١ + حتا ٢ س

، ص = ∫ ( ١ + حتا ٢ س ) ء س = س + $\frac{1}{2}$ حا ٢ س + ث

(٣) ∫ قا$^{4}$ س ظا س ء س = ∫ قا$^{3}$ س ( قا س ظا س ) ء س

= ∫ قا$^{3}$ س ( قا س )$'$ ء س = $\frac{1}{4}$ قا$^{4}$ س + ث

(٤) نضع : ص = ٣ س + ٢ ، ء ع = حا س ء س

∴ ء ص = ٣ ء س ، ع = – حتا س

∴ ∫ ( ٣ س + ٢ ) حا س ء س = – ( ٣ س + ٢ ) حا س

+ ٣ ∫ حتا س ء س = – ( ٣ س + ٢ ) حا س + ٣ حا س + ث

أوجد التكاملات الآتية :

(٥) ∫ √٣ حتا س ء س  (٦) ∫ قتا$^{2}$ ( ٢ س + ٣ ) ء س

(٧) ∫ ظا س حتا س ء س  (٨) ∫ حا س حتا س ء س

(٩) ∫ ( ١ + ظا$^{2}$ س ) حتا$^{2}$ س ء س

(١٠) ∫ ( حا س – حتا س )$^{2}$ ء س

(١١) ∫ حتا$^{3}$ س حا س ء س  (١٢) ∫ حا$^{5}$ س حتا س ء س

(١٣) ∫ س$^{2}$ حتا ( س$^{3}$ + ٥ ) ء س

(١٤) ∫ ( ٣ + حا س )$^{5}$ حتا س ء س

(١٥) ∫ قا$^{5}$ س ظا س ء س  (١٦) ∫ $\frac{\text{حتا}^{3}\text{ س} - ٤}{\text{حتا}^{2}\text{ س}}$ ء س

(١٧) ∫ ( حتا$^{2}$ س + حتا س ) ء س

(١٨) ∫ ( حا س + قا س )$^{2}$ ء س

(١٩) ∫ ( ظا$^{2}$ س + ٢ حا$^{2}$ س )$^{2}$ ء س

**الحل**

(٥) ∫ √٣ حتا س ء س = √٣ حا س + ث

(٦) ∫ قتا$^{2}$ ( ٢ س + ٣ ) ء س = – $\frac{1}{2}$ ظتا ( ٢ س + ٣ ) + ث

(٧) ∫ ظا س حتا س ء س = ∫ حا س ء س = – حتا س + ث

(٨) ∫ حا س حتا س ء س = $\frac{1}{2}$ ∫ حا ٢ س ء س = – $\frac{1}{4}$ حتا ٢ س + ث

(٩) ∫ ( ١ + ظا$^{2}$ س ) حتا$^{2}$ س ء س = ∫ قا$^{2}$ س حتا$^{2}$ س ء س

= ∫ ء س = س + ث

(١٠) ∫ ( حا س – حتا س )$^{2}$ ء س = ∫ ( حا$^{2}$ س + حتا$^{2}$ س + ٢ حا س حتا س ) ء س

= ∫ ( ١ – حا ٢ س ) ء س = س + $\frac{1}{2}$ حتا ٢ س + ث

(١١) ∫ حتا$^{3}$ س حا س ء س = – ∫ حتا$^{3}$ س ( – حا س ) ء س

= – $\frac{1}{4}$ حتا$^{4}$ س + ث

(١٢) ∫ حا$^{5}$ س حتا س ء س = $\frac{1}{6}$ حا$^{6}$ س + ث

(١٣) ∫ س$^{2}$ حتا ( س$^{3}$ + ٥ ) ء س = $\frac{1}{3}$ ∫ حتا ( س$^{3}$ + ٥ ) ( ٣ س$^{2}$ ) ء س

= $\frac{1}{3}$ حا ( س$^{3}$ + ٥ ) + ث

(١٤) ∫ ( ٣ + حا س )$^{5}$ حتا س ء س = $\frac{1}{6}$ ( ٣ + حا س )$^{6}$ + ث

(١٥) ∫ قا$^{5}$ س ظا س ء س = ∫ قا$^{4}$ س قا س ظا س ء س = $\frac{1}{5}$ قا$^{5}$ س + ث

(١٦) $\int$ ( حتا س – ٤ قا^٢ س ) ء س = حا س – ٤ طا س + ث

(١٧) $\int$ ( $\frac{1}{٢}$ + $\frac{1}{٢}$ حتا ٢ س + حتا س ) ء س

= $\frac{1}{٢}$ س + $\frac{1}{٤}$ حا ٢ س + حا س + ث

(١٨) $\int$ ( حتا^٢ س + قا^٢ س + ٢ ) ء س ، ∵ حتا^٢ س = $\frac{1}{٢}$ + $\frac{1}{٢}$ حتا ٢ س

∴ المقدار = $\int$ ( $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{1}{٢}$ حتا ٢ س + قا^٢ س ) ء س

= $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{1}{٤}$ حا ٢ س + طا س + ث

(١٩) $\int$ ( طا^٢ س + ٢ حا^٢ س ) ء س

= $\int$ [ ( قا^٢ س – ١ ) + ( ١ – حتا ٢ س ) ] ء س

= $\int$ ( قا^٢ س – حتا ٢ س ) ء س = طا س – $\frac{1}{٢}$ حا ٢ س + ث

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٢٠) إذا كان : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٧ – حا ٢ س أوجد ص بدلالة س

إذا كان : ص = ٥ عند س = ٠ .

الحل

ص = $\int$ ( ٧ – حا ٢ س ) ء س = ٧ س + $\frac{1}{٢}$ حتا ٢ س + ث

، ∵ ص = ٥ عند س = ٠ ∴ ٥ = ٧ × ٠ + $\frac{1}{٢}$ حتا ٠ + ث

و منها : ث = ٥ – $\frac{1}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ ص = ٧ س + $\frac{1}{٢}$ حتا ٢ س + $\frac{٩}{٢}$

أى أن : ٢ ص = ١٤ س + حتا ٢ س + ٩

(٢١) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة ﻫ ( $\frac{1}{٢}$ π ، $\frac{1}{٤}$ π^٢ + ٩ )

إذا كان ميل المماس له عند نقطة ( س ، ص ) عليه يعطى

بالعلاقة : ٢ س + $\frac{1}{٢}$ قا^٢ $\frac{1}{٢}$ س

الحل

∵ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + $\frac{1}{٢}$ قا^٢ $\frac{1}{٢}$ س

∴ ص = $\int$ ( ٢ س + $\frac{1}{٢}$ قا^٢ $\frac{1}{٢}$ س ) ء س = س^٢ + طا $\frac{1}{٢}$ س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( $\frac{1}{٢}$ π ، $\frac{1}{٤}$ π^٢ + ٩ )

∴ $\frac{1}{٤}$ π^٢ + ٩ = $\frac{1}{٤}$ π^٢ + طا $\frac{1}{٤}$ π + ث

∴ $\frac{1}{٤}$ π^٢ + ٩ = $\frac{1}{٤}$ π^٢ + ١ + ث و منها : ث = ٨

∴ ص = س^٢ + طا $\frac{1}{٢}$ س + ٨

(٢٢) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة يساوى : – ﻫ قتا^٢ س حيث :

ﻫ ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين ( $\frac{1}{٤}$ π ، ٥ ) ،

( $\frac{٣}{٤}$ π ، ١ ) أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = – ﻫ قتا^٢ س

∴ ص = $\int$ ( – ﻫ قتا^٢ س ) ء س = ﻫ طتا س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطتين ( $\frac{1}{٤}$ π ، ٥ ) ، ( $\frac{٣}{٤}$ π ، ١ )

∴ ٥ = ﻫ طتا $\frac{1}{٤}$ π + ث ∴ ٥ = ﻫ + ث (١) ،

١ = ﻫ طتا $\frac{٣}{٤}$ π + ث ∴ ١ = – ﻫ + ث (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج : ث = ٣ ، ﻫ = ٢

∴ ص = ٢ طتا س + ٣

## ٤ – ٣ التكامل المحدد

**تمهيد :**

**نلاحظ أن :**

١) من تعريف التكامل غير المحدد :

ص = ∫ د/(س) ء س = د(س) + ث

حيث : ث ثابت اختيارى لا يتوقف على س ، و وجوده ضرورى ليشتمل التكامل على جميع الدوال التى معدل تغيرها هو د(س)

و على ذلك فإن : التكامل غير المحدد لا ينتج قيمة معينة للمتغير س

٢) إذا كانت قيمة التكامل عند : س = أ هى : د(أ) + ث

و قيمته عند : س = ب هى : د(ب) + ث

∴ الفرق بين قيمتى التكامل عند : س = أ ، س = ب

= د(ب) – د(أ)

و هو قيمة معينة ( مهما كانت قيمة المقدار الثابت ث )

و يرمز له بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ د/(س) ء س حيث :

$\int_{أ}^{ب}$ د/(س) ء س = د(ب) – د(أ)

و تعرف هذه الصورة بالتكامل المحدد

**النظرية الأساسية فى التفاضل و التكامل :**

إذا كانت : الدالة د متصلة على الفترة [ أ ، ب ] ، و كانت : ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة فإن :

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س = ت(ب) – ت(أ)

**ملاحظات :**

١) يسمى $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س بالتكامل المحدد و يقرأ :

تكامل د(س) بالنسبة إلى س من أ إلى ب ، و هو عدد حقيقى تتوقف قيمته على :

١) الحدان العلوى و السفلى للتكامل المحدد أى على العددين أ ، ب على الترتيب

٢) قاعدة الدالة د

٢) رمز المتغير س يمكن استبداله بأى رمز آخر دون أن يؤثر ذلك على مقدار التكامل أى :

$\int_{أ}^{ب}$ د(ص) ء ص = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س

= $\int_{أ}^{ب}$ ع(س) ء ع ....

٣) يعبر عن : ت(ب) – ت(أ) بالصورة :

$[\,ت(س)\,]_{ب}^{أ}$ أو $ت(س)\,|_{ب}^{أ}$

٤) يمكن الحصول على التكامل المحدد بإيجاد التكامل غير المحدد مع إهمال ثابت التكامل ثم التعويض عن المتغير بحدى التكامل

يهمل ثابت التكامل لأن :

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س = $[\,ت(س) + ث\,]_{ب}^{أ}$

= [ ت(ب) + ث ] – [ ت(أ) + ث ]

= ت(ب) – ت(أ) + ث – ث

= ت(ب) – ت(أ)

٥) تطبق جميع قواعد التكامل غير المحدد و جدول التكاملات القياسية عند إيجاد قيمة التكامل المحدد لدالة متصلة

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإن :

١) $\int_{أ}^{ب}$ ك د(س) ء س = ك $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س

حيث : ك ثابت حقيقى $\neq$ ٠ .

(٢) $\int_{أ}^{ب} [\,د(س) \pm ر(س)\,]\, ءس = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس \pm \int_{أ}^{ب} ر(س)\, ءس$

**إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١١٢**

أوجد : (أ) $\int_{-١}^{٢} (٢س + ٣)\, ءس$

(ب) $\int_{٠}^{٥} \frac{٣}{\sqrt{ن + ٤}}\, ءن$　　(جـ) $\int_{-\frac{١}{٢}\pi}^{\frac{١}{٢}\pi} حتا\, \theta\, ء\theta$

**الحل**

(أ) المقدار = $[\,س^{٢} + ٣س\,]_{-١}^{٢}$

$= (٤ + ٦) - (١ - ٣) = ١٠ + ٢ = ١٢$

(ب) المقدار = $٣ \int_{٠}^{٥} (ن + ٤)^{-\frac{١}{٢}}\, ءن$

$= ٣ \times ٢\, [\,(ن + ٤)^{\frac{١}{٢}}\,]_{٠}^{٥} = ٦(٣ - ٢) = ٦$

(جـ) المقدار = $[\,حا\, \theta\,]_{-\frac{١}{٢}\pi}^{\frac{١}{٢}\pi} = ١ - (-١) = ٢$

**نظرية :**

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ أ ، ب ] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة

**ملاحظات :**

(١) كل دالة متصلة على فترة ما تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة و لكن ليس كل دالة قابلة للتكامل على فترة ما تكون متصلة على هذه الفترة

(٢) إذا كان : جـ $\in$ [ أ ، ب ] و كانت د(س) غير متصلة عند س = جـ فإنه لا يمكن إيجاد : $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$

**الفرق بين التكامل المحدد و التكامل غير المحدد :**

| التكامل المحدد | التكامل غير المحدد |
| --- | --- |
| $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ | $\int د(س)\, ءس$ |
| = ت ( ب ) − ت ( أ ) | = ت (س) + ث |
| ينتج عنه عدد حقيقى | هو المشتقة العكسية للدالة د (س) و ينتج عنه مجموعة من الدوال تختلف فقط فى ثابت التكامل |
| $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ − $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$ = ٠ . | $\int د(س)\, ءس$ − $\int د(س)\, ءس$ = ثابت |

**خواص التكامل المحدد :**

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ أ ، ب ] ، جـ $\in$ ] أ ، ب [ فإن :

(١) $\int_{ب}^{أ} د(س)\, ءس = - \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$

(٢) $\int_{أ}^{أ} د(س)\, ءس = ٠$ .

(٣) $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س)\, ءس + \int_{جـ}^{ب} د(س)\, ءس$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١١٢

إذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int_{-١}^{٤} د(س)\,ءس = ٢٥٥$ ،

$\int_{٢}^{-١} د(س)\,ءس = -١٥$ أوجد : $\int_{٢}^{٤} د(س)\,ءس$

**الحل**

$\because \int_{-١}^{٤} د(س)\,ءس = \int_{-١}^{٢} د(س)\,ءس + \int_{٢}^{٤} د(س)\,ءس$

$\therefore \int_{٢}^{٤} د(س)\,ءس = \int_{-١}^{٤} د(س)\,ءس - \int_{-١}^{٢} د(س)\,ءس$

$= \int_{-١}^{٤} د(س)\,ءس + \int_{٢}^{-١} د(س)\,ءس$

$= ٢٥٥ - ١٥ = ٢٤٠$

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١١٣

أوجد : (أ) $\int_{-٤}^{٢} |س + ١|\,ءس$

(ب) $\int_{-٣}^{٣} |س^٢ - ٤|\,ءس$

**الحل**

(أ) $\because |س + ١| = \begin{cases} س + ١ & ، س \geq -١ \\ -س - ١ & ، س < -١ \end{cases}$

$\therefore$ المقدار $= \int_{-٤}^{-١} (-س - ١)\,ءس + \int_{-١}^{٢} (س + ١)\,ءس$

$= \left[-\frac{١}{٢}س^٢ - س\right]_{-٤}^{-١} + \left[\frac{١}{٢}س^٢ + س\right]_{-١}^{٢}$

$= \left[(-\frac{١}{٢} + ١) - (-٨ + ٤)\right]$

$+ \left[(٢ + ٢) - (\frac{١}{٢} - ١)\right] = \frac{٩}{٢} + \frac{٩}{٢} = ٩$

(ب) $\because د(س) = س^٢ - ٤ = (س + ٢)(س - ٢)$

$\therefore د(س) > ٠$ فى $]-\infty ، -٢[$ أى أن : $د(س) = س^٢ - ٤$

، $د(س) < ٠$ فى $]-٢ ، ٢[$ أى أن : $د(س) = -س^٢ + ٤$

، $د(س) > ٠$ فى $]٢ ، \infty[$ أى أن : $د(س) = س^٢ - ٤$

$\therefore$ المقدار $= \int_{-٣}^{-٢} (س^٢ - ٤)\,ءس + \int_{-٢}^{٢} (-س^٢ + ٤)\,ءس$

$+ \int_{٢}^{٣} (س^٢ - ٤)\,ءس$

$= \left[\frac{١}{٣}س^٣ - ٤س\right]_{-٣}^{-٢} + \left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٤س\right]_{-٢}^{٢}$

$+ \left[\frac{١}{٣}س^٣ - ٤س\right]_{٢}^{٣}$

$= \left[(-\frac{٨}{٣} + ٨) - (-٩ + ١٢)\right]$

$+ \left[(-\frac{٨}{٣} + ٨) - (\frac{٨}{٣} - ٨)\right]$

$+ \left[(٩ - ١٢) - (\frac{٨}{٣} - ٨)\right]$

$= \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣} = \frac{٤٦}{٣}$

### حل آخر

$\because د(س) = س^٢ - ٤$ دالة زوجية

$\therefore$ المقدار $= ٢\left(\int_{٠}^{٢} (-س^٢ + ٤)\,ءس + \int_{٢}^{٣} (س^٢ - ٤)\,ءس\right)$

$= ٢\left(\left[-\frac{١}{٣}س^٣ + ٤س\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{١}{٣}س^٣ - ٤س\right]_{٢}^{٣}\right)$

$= ٢\left(\left[(-\frac{٨}{٣} + ٨) - ٠\right]\right.$

$\left.+ \left[(٩ - ١٢) - (\frac{٨}{٣} - ٨)\right]\right)$

$= ٢\left(\frac{١٦}{٣} - ٣ + \frac{١٦}{٣}\right) = \frac{٤٦}{٣}$

## خواص الدوال الفردية و الدوال الزوجية فى التكامل المحدد :

(١) إذا كانت الدالة د متصلة و فردية على الفترة [ -أ ، أ ] فإن :

$$\int_{-أ}^{أ} د(س)\, ء س = ٠ .$$

(٢) إذا كانت الدالة د متصلة و زوجية على الفترة [ -أ ، أ ] فإن :

$$\int_{-أ}^{أ} د(س)\, ء س = ٢ \int_{٠}^{أ} د(س)\, ء س .$$

### إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١١٤

أوجد : (أ) $\int_{٠}^{٣} س \sqrt{٢٥ - س^{٢}}\, ء س$

(ب) $\int_{-٢}^{٢} س^{٣} \sqrt{س^{٢} + ٣}\, ء س$

**الحل**

(أ) المقدار $= -\frac{١}{٢} \int_{٠}^{٣} (٢٥ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times (-٢ س)\, ء س$

$= -\frac{١}{٢} \left[ \frac{٢}{٣} (٢٥ - س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{٣}$

$= -\frac{١}{٣} ( ٦٤ - ١٢٥ ) = \frac{٦١}{٣}$

**حل آخر**

نضع : $ع = ٢٥ - س^{٢}$ ∴ $ء ع = -٢ س\, ء س$

و عندما : س = ٠ فإن : ع = ٢٥ ،

و عندما : س = ٣ فإن : ع = ١٦

∴ المقدار $= -\frac{١}{٢} \int_{٠}^{٣} (٢٥ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}} \times (-٢ س)\, ء س$

$= -\frac{١}{٢} \int_{٢٥}^{١٦} ع^{\frac{١}{٢}}\, ء ع = \frac{١}{٢} \int_{١٦}^{٢٥} ع^{\frac{١}{٢}}\, ء ع$

$= \frac{١}{٢} \left[ \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} \right]_{١٦}^{٢٥} = \frac{١}{٣} ( ١٢٥ - ٦٤ ) = \frac{٦١}{٣}$

(ب) ∵ $د(س) = س^{٣} \sqrt{س^{٢} + ٣}$ دالة فردية ∴ المقدار = صفر

### إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١١٥

أوجد : (أ) $\int_{-٣}^{٣} \frac{س}{١ + س^{٢}}\, ء س$

(ب) $\int_{-\pi}^{\pi} ( ٤ + \pi \text{ حتا } ٢ س )\, ء س$

**الحل**

(أ) ∵ $د(س) = \frac{س}{١ + س^{٢}}$ دالة فردية ∴ المقدار = صفر

(ب) ∵ $د(س) = ٤ + \pi \text{ حتا } ٢ س$ دالة زوجية

∴ المقدار $= ٢ \int_{٠}^{\pi} ( ٤ + \pi \text{ حتا } ٢ س )\, ء س$

$= ٢ \left[ ٤ س + \frac{١}{٢} \pi \text{ حا } ٢ س \right]_{٠}^{\pi}$

$= ٢ \left[ ( ٤ \pi + ٠ ) - ( ٠ - ٢ ) \right] = ٨ \pi$

### إجابة تفكير ناقد صفحة ١١٥

(١) إذا كانت د دالة فردية متصلة على [ -٣ ، ٥ ] ، $\int_{٣}^{٥} د(س)\, ء س = ٩$ ما قيمة : $\int_{-٣}^{٥} د(س)\, ء س$ ؟

(٢) إذا كانت د دالة زوجية متصلة على [ -٤ ، ٤ ] ، $\int_{-٤}^{٤} د(س)\, ء س = ٢٠$ ، $\int_{٠}^{٢} د(س)\, ء س = ٦$

ما قيمة : $\int_{-٤}^{٢} د(س)\, ء س$ ؟

**الحل**

(١) ∵ د دالة فردية ، $\int_{-٣}^{٥}$ د(س) ء س = $\int_{-٣}^{٣}$ د(س) ء س + $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س

∴ $\int_{-٣}^{٥}$ د(س) ء س = صفر + ٩ = ٩

(٢) ∵ د دالة زوجية ∴ $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ء س = ٢ $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ء س

∴ ٢٠ = ٢ $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ء س و منها : $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ء س = ١٠

∴ $\int_{-٤}^{٢}$ د(س) ء س = $\int_{-٤}^{٠}$ د(س) ء س + $\int_{٠}^{٢}$ د(س) ء س

= ١٠ + ٦ = ١٦

## حل تمارين ( ٤ – ٣ ) صفحة ١١٥ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان : $\int_{-٢}^{٣}$ د(س) ء س = ١٢ ، $\int_{-٢}^{٥}$ د(س) ء س = ١٦

فإن : $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س = ....

(أ) – ٢٨ (ب) – ٤ (جـ) ٤ (د) ٢٨

(٢) إذا كان : د(س) = | س | فإن : $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ء س = ....

(أ) – ١ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٤

الحل

(١) ∵ $\int_{-٢}^{٥}$ د(س) ء س = $\int_{-٢}^{٣}$ د(س) ء س + $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س

∴ $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س = $\int_{-٢}^{٥}$ د(س) ء س − $\int_{-٢}^{٣}$ د(س) ء س

= ١٦ − ١٢ = ٤

(٢) ∵ د(س) = | س | دالة زوجية

∴ $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) ء س = ٢ $\int_{٠}^{٢}$ س ء س = ٢ $\left[ \frac{١}{٢} س^{٢} \right]_{٠}^{٢}$

= ٢ $\left[ \frac{١}{٢} (٤ - ٠) \right]$ = ٤

أوجد التكاملات الآتية :

(٣) $\int_{-١}^{٣} س^{٣}$ ء س

(٤) $\int_{١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢)$ ء س

(٥) $\int_{٠}^{٤} (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ ء س

(٦) $\int_{٤}^{٠} \frac{ء ن}{\sqrt{٨ - ن}}$

(٧) $\int_{٠}^{٢} س (س^{٢} - ٣)^{٢}$ ء س

(٨) $\int_{٠}^{٢} س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣} + ١}$ ء س

(٩) $\int_{-١}^{٣} | س - ١ |$ ء س

(١٠) $\int_{-٤}^{٠} س (س + ٤)^{٣}$ ء س

(١١) $\int_{-١}^{٣} س \sqrt{س + ١}$ ء س

(١٢) $\int_{٠}^{١} ٢$ جا π ع ء ع

(١٣) $\int_{٠}^{\frac{١}{٤}\pi}$ طا ع قا$^{٢}$ ع ء ع

(١٤) $\int_{٠}^{٣} (٢س - ٧ هـ^{س})$ ء س

الحل

(٣) $\int_{-١}^{٣} س^{٣}$ ء س = $\left[ \frac{١}{٤} س^{٤} \right]_{-١}^{٣}$ = $\frac{١}{٤}$ ( ٨١ − ١ ) = ٢٠

(٤) $\int_{١}^{٣} (٣س^{٢} - ٢)$ ء س = $\left[ س^{٣} - ٢ س \right]_{١}^{٣}$

= ( ٢٧ − ٦ ) − ( ١ − ٢ ) = ٢١ + ١ = ٢٢

(٥) $\int_{٠}^{٤} (٢س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$ ء س = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٥} \left[ (٢س + ١)^{\frac{٥}{٢}} \right]_{٠}^{٤}$

= $\frac{١}{٥}$ ( ٢٤٣ − ١ ) = $\frac{١}{٥}$ × ٢٤٢ = ٤٨,٤

(٦) $\int_{٤}^{٠} (٨ - \text{ن})^{-\frac{١}{٢}} \, \text{ءن} = -\int_{٠}^{٤} (٨ - \text{ن})^{-\frac{١}{٢}} \, \text{ءن}$

$= -\left[ -٢ (٨ - \text{ن})^{\frac{١}{٢}} \right]_{٠}^{٤}$

$= ٢ ( ٢ - ٢\sqrt{٣} ) = ٤ - ٤\sqrt{٣}$

(٧) $\int_{٠}^{٢} \text{س} (\text{س}^{٢} - ٣)^{٢} \, \text{ءس} = \frac{١}{٢} \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٢} - ٣)^{٢} (٢\text{س}) \, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} \left[ (\text{س}^{٢} - ٣)^{٣} \right]_{٠}^{٢} = \frac{١}{٦} ( ١ + ٢٧ ) = \frac{٢٨}{٦} = \frac{١٤}{٣}$

(٨) $\int_{٠}^{٢} \text{س}^{٢} \sqrt[٣]{\text{س}^{٣} + ١} \, \text{ءس} = \frac{١}{٣} \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{١}{٣}} (٣\text{س}^{٢}) \, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٤} \left[ (\text{س}^{٣} + ١)^{\frac{٤}{٣}} \right]_{٠}^{٢} = \frac{١}{٤} ( ٩\sqrt[٣]{٩} - ١ ) = ٤,٤٣$

(٩) $\int_{-١}^{٣} |\text{س} - ١| \, \text{ءس} = \int_{-١}^{١} (١ - \text{س}) \, \text{ءس} + \int_{١}^{٣} (\text{س} - ١) \, \text{ءس}$

$= \left[ \text{س} - \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} \right]_{-١}^{١} + \left[ \frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س} \right]_{١}^{٣}$

$= \left[ (١ - \frac{١}{٢}) - (-١ - \frac{١}{٢}) \right] + \left[ (\frac{٩}{٢} - ٣) - (\frac{١}{٢} - ١) \right]$

$= \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} = ٤$

(١٠) $\int_{-٤}^{٠} \text{س} (\text{س} + ٤)^{٣} \, \text{ءس} = \int_{-٤}^{٠} (\text{س} + ٤ - ٤)(\text{س} + ٤)^{٣} \, \text{ءس}$

$= \int_{-٤}^{٠} (\text{س} + ٤)^{٤} \, \text{ءس} - ٤ \int_{-٤}^{٠} (\text{س} + ٤)^{٣} \, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٥} \left[ (\text{س} + ٤)^{٥} \right]_{-٤}^{٠} - ٤ \times \frac{١}{٤} \left[ (\text{س} + ٤)^{٤} \right]_{-٤}^{٠}$

$= \frac{١}{٥} ( ١٠٢٤ - ٠ ) - ( ٢٥٦ - ٠ ) = -\frac{١}{٥} \times ٢٥٦ = -٥١,٢$

(١١) $\int_{-١}^{٣} \text{س} \sqrt{\text{س} + ١} \, \text{ءس} = \int_{-١}^{٣} (\text{س} + ١ - ١)(\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس}$

$= \int_{-١}^{٣} (\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \, \text{ءس} - \int_{-١}^{٣} (\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} \, \text{ءس}$

$= \frac{٢}{٥} \left[ (\text{س} + ١)^{\frac{٥}{٢}} \right]_{-١}^{٣} - \frac{٢}{٣} \left[ (\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{-١}^{٣}$

$= \frac{٢}{٥} ( ٣٢ - ٠ ) - \frac{٢}{٣} ( ٨ - ٠ ) = \frac{١١٢}{١٥} = ٧,٤٧$

(١٢) $\int_{٠}^{١} ٢ \, \text{جا} \, \pi \text{ع} \, \text{ءع} = \left[ -٢ \, \text{جتا} \, \pi \text{ع} \times \frac{١}{\pi} \right]_{٠}^{١}$

$= -\frac{٢}{\pi} ( \text{جتا} \, \pi - \text{جتا} \, ٠ ) = -\frac{٢}{\pi} ( -١ - ١ ) = \frac{٤}{\pi}$

(١٣) $\int_{٠}^{\frac{١}{٤}\pi} \text{طاع} \, \text{قا}^{٢}\text{ع} \, \text{ءع} = \left[ \frac{١}{٢} \text{طا}^{٢}\text{ع} \right]_{٠}^{\frac{١}{٤}\pi} = \frac{١}{٢} ( \text{طا}^{٢} \frac{١}{٤}\pi - \text{طا}^{٢} ٠ )$

$= \frac{١}{٢} ( ١ - ٠ ) = \frac{١}{٢}$

(١٤) $\int_{٠}^{٣} (٢\text{س} - ٧\text{هـ}^{\text{س}}) \, \text{ءس} = \left[ \text{س}^{٢} - ٧\text{هـ}^{\text{س}} \right]_{٠}^{٣}$

$= ( ٩ - ٧\text{هـ}^{٣} ) - ( ٠ - ٧ ) = ١٦ - ٧\text{هـ}^{٣}$

أجب عن ما يأتى :

(١٥) إذا كان : $\int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س}) \, \text{ءس} = ١٠$ ، $\int_{١}^{٥} \text{ر}(\text{س}) \, \text{ءس} = -٢$

أحسب قيمة : (أ) $\int_{١}^{٥} [ \text{د}(\text{س}) + \text{ر}(\text{س}) ] \, \text{ءس}$

(ب) $\int_{١}^{٥} [ \text{د}(\text{س}) - \text{ر}(\text{س}) ] \, \text{ءس}$

(حـ) $\int_{٥}^{١} ٣\text{ر}(\text{س}) \, \text{ءس}$

الحل

(أ) $\int_{١}^{٥} [ \text{د}(\text{س}) + \text{ر}(\text{س}) ] \, \text{ءس} = \int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س}) \, \text{ءس} + \int_{١}^{٥} \text{ر}(\text{س}) \, \text{ءس}$

$= ١٠ - ٢ = ٨$

(ب) $\int_{١}^{٥} [ \text{د}(\text{س}) + \text{ر}(\text{س}) ] \, \text{ءس} = \int_{١}^{٥} \text{د}(\text{س}) \, \text{ءس} - \int_{١}^{٥} \text{ر}(\text{س}) \, \text{ءس}$

$= ١٠ + ٢ = ١٢$

(جـ) $\int_{٥}^{١}$ ٣ ر(س) ء س = − ٣ $\int_{١}^{٥}$ ر(س) ء س = − ٣ × − ٢ = ٦

**(١٦)** إذا كان : د دالة متصلة على الفترة [ − ٤ ، ٤ ] ،

$\int_{٠}^{٤}$ د(س) ء س = ٣ أحسب قيمة :

(أ) $\int_{٠}^{٤}$ [ د(س) + ٢ ] ء س

(ب) $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ء س ، د فردية

(جـ) $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ء س ، د زوجية

الحل

(أ) $\int_{٠}^{٤}$ [ د(س) + ٢ ] ء س = $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ء س + ٢ $\int_{٠}^{٤}$ ء س

= ٣ + ٢ $[ س ]_{٠}^{٤}$ = ٣ + ٢ ( ٤ − ٠ ) = ١١

(ب) ∵ د فردية ∴ $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ء س = صفر

(جـ) ∵ د زوجية ∴ $\int_{-٤}^{٤}$ د(س) ء س = ٢ $\int_{٠}^{٤}$ د(س) ء س

= ٢ × ٣ = ٦

**(١٧)** إذا كان : د(س) = { ٢ عندما س < ٢ ، س عندما س ≥ ٢ } أوجد : $\int_{٠}^{٦}$ د(س) ء س

الحل

$\int_{٠}^{٦}$ د(س) ء س = $\int_{٠}^{٢}$ ٢ ء س + $\int_{٢}^{٦}$ س ء س

= ٢ $[ س ]_{٠}^{٢}$ + $[ \frac{١}{٢} س^{٢} ]_{٢}^{٦}$

= ٢ ( ٢ − ٠ ) + $\frac{١}{٢}$ ( ٣٦ − ٤ ) = ٢٠

## ٤ − ٤ المساحات فى المستوى

### أولاً : مساحة منطقة مستوية محددة بمنحنى الدالة د و محور السينات فى [ أ ، ب ]

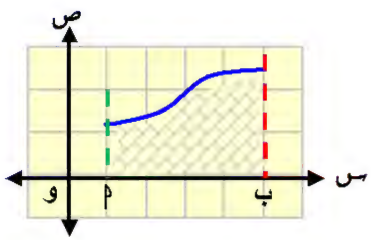
**نظرية :**

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [ أ ، ب ] ، د(س) ≥ ٠ فى هذه الفترة ، م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و محور السينات و المستقيمين : س = أ ، س = ب فإن :

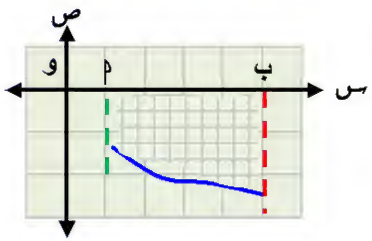
م = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س

**ملاحظات :**

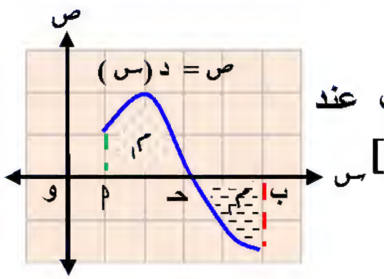
**(١)** إذا كانت : المنطقة المحددة تقع فوق محور السينات فإن : د(س) > ٠ .
أى إشارة د(س) موجبة ، و تكون :
م = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س




**(٢)** إذا كانت : المنطقة المحددة تقع تحت محور السينات فإن : د(س) < ٠ .
أى إشارة د(س) سالبة ، و تكون :
م = − $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س
= | $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س |




**(٣)** إذ قطع منحنى الدالة د محور السينات عند س = حـ حيث : حـ ∈ ] أ ، ب [
فإن : د(س) > ٠ .



لكل س ∋ [ ﺃ ، حـ ] ،

د(س) < ٠ لكل س ∋ [ ب ، حـ ]

∴ م = م$_1$ + م$_2$

$= \int_{ﺃ}^{حـ}$ د(س) ء س + | $\int_{حـ}^{ب}$ د(س) ء س |

(٤) يفضل رسم منحنى الدالة المعطاة لتحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات

(٥) لإيجاد المساحة يفضل إيجاد أصفار الدالة حتى لو أعطيت حدود التكامل التى تجزئ مجال الدالة [ ﺃ ، ب ] إن وجدت إلى فترات جزئية لكى نحدد إشارة الدالة فى كل فترة جزئية و بالتالى نحدد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات

(٦) قيمة التكامل المحدد قد تكون موجبة أو سالبة أما المساحة فهى موجبة دائماً لذا وضعت علامة القيمة المطلقة للمنطقة التى تقع تحت محور السينات

**ثانياً : مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين**

**نظرية :**

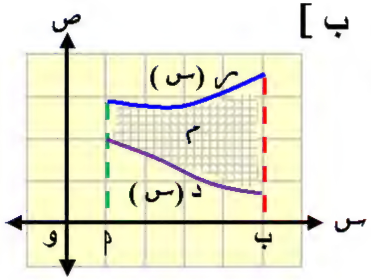
إذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [ ﺃ ، ب ] ، و كان د(س) ≥ ٠ ، ر(س) ≥ ٠ لكل س ∋ [ ﺃ ، ب ] فإن :

مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين : ص = د(س) ، ص = ر(س)

و المستقيمين : س = ﺃ ، س = ب تعطى من العلاقة :

م $= \int_{ﺃ}^{ب}$ [ د(س) − ر(س) ] ء س

ففى الشكل التالى نلاحظ :




د ، ر متصلتان على الفترة [ ﺃ ، ب ]

د(س) > ر(س) لكل س ∋ [ ﺃ ، ب ]

إذا كانت المساحة بين د(س) و محور السينات هى : م$_1$ ، و المساحة بين ر(س) و محور السينات هى : م$_2$

فإن : م المساحة بين المنحنيين :

د(س) ، ر(س) = م$_1$ − م$_2$ أى أن :

م $= \int_{ﺃ}^{ب}$ د(س) ء س − $\int_{ﺃ}^{ب}$ ر(س) ء س

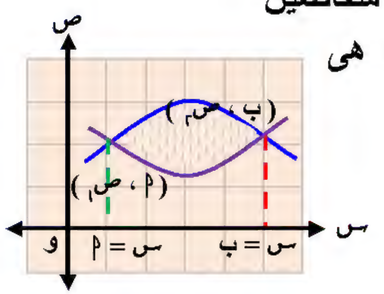
$= \int_{ﺃ}^{ب}$ [ د(س) − ر(س) ] ء س

**ملاحظات :**

(١) نتعرف على الدالة الأكبر من خلال الرسم أو بأخذ قيمة اختيارية لـ س تنتمى للفترة المعطاة و التعويض بها فى معادلتى الدالتين أو بوضع علامة القيمة المطلقة كما يلى :

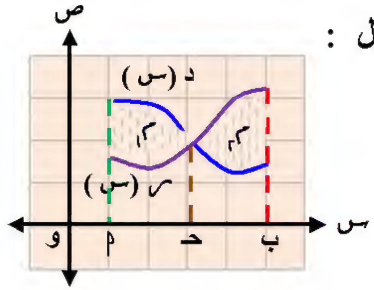
$=$ | $\int_{ﺃ}^{ب}$ [ د(س) − ر(س) ] ء س |

(٢) عندما تنحصر منطقة بين منحنيين متقاطعين فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هى الاحداثيات السينية لنقط التقاطع و نتعرف عليها من خلال الرسم أو بحل معادلتين المنحنيين جبرياً أى بوضع : د(س) = ر(س)



(٣) إذا تقاطع المنحنيين فى نقطة حـ بحيث :

حـ ∈ ] أ ، ب [ كما بالشكل المقابل :




و كان : د (س) ≥ ر (س)

لكل س ∈ [ أ ، حـ ] ،

و كان : ر (س) > د (س)

لكل س ∈ [ حـ ، ب ]

فإن : م = م١ + م٢

= $\int_{أ}^{حـ}$ [ د (س) − ر (س) ] ء س

+ $\int_{حـ}^{ب}$ [ ر (س) − د (س) ] ء س

أو : م = م١ + م٢

= | $\int_{أ}^{حـ}$ [ د (س) − ر (س) ] ء س |

+ | $\int_{حـ}^{ب}$ [ د (س) − ر (س) ] ء س |

و ذلك بوضع علامة القيمة المطلقة

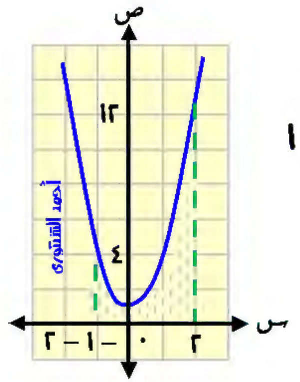
للاستغناء عن معرفة الدالة الأكبر

### إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ١١٨

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د

و محور السينات و المستقيمين : س = −١

، س = ٢ حيث : د (س) = ٣ س² + ١




**الحل**

المساحة = $\int_{-1}^{2}$ ( ٣ س² + ١ ) ء س

= [ س³ + س ]$_{-1}^{2}$

= ( ٨ + ٢ ) − ( −١ − ١ ) = ١٢ وحدة مربعة

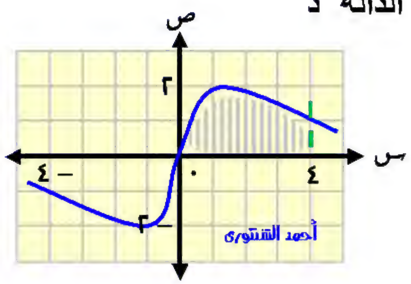
### إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١١٩

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د

حيث : د (س) = $\frac{٤ س}{س^2 + ١}$

و المستقيم : س = ٤

و تقع فوق محور السينات




**الحل**

نضع : د (س) = ٠ ∴ س = ٠

∴ المساحة = ٢ $\int_{0}^{4}$ $\frac{٢ س}{س^2 + ١}$ ء س = ٢ [ لوهـ ( س² + ١ ) ]$_{0}^{4}$

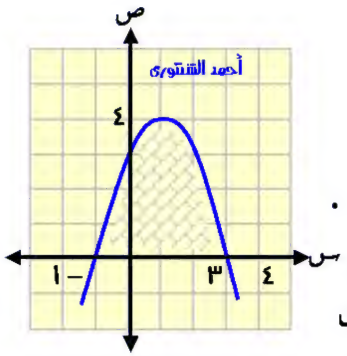
= ٢ ( لوهـ ١٧ − لوهـ ١ ) = ٢ لوهـ ١٧

### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٢٠

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى :

ص = ٣ + ٢ س − س²

و محور السينات




**الحل**

بوضع : ص = ٠ ∴ ٣ + ٢ س − س² = ٠

و منها : س = −١ ، س = ٣

∴ المساحة = $\int_{-1}^{3}$ ( ٣ + ٢ س − س² ) ء س

= [ ٣ س + س² − $\frac{١}{٣}$ س³ ]$_{-1}^{3}$

$= [\,(٩ + ٩ - ٩) - (-٣ + ١ - \frac{١}{٣})\,] = \frac{٣٤}{٣}$ وحدة مربعة

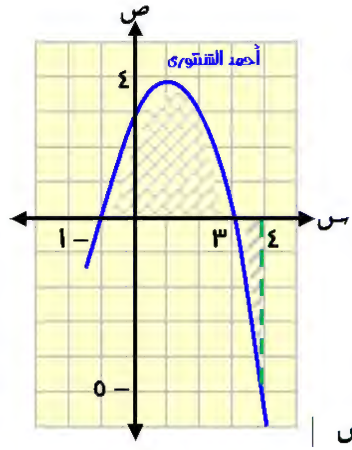
### إجابة تفكير ناقد صفحة ١٢٠

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى :

$ص = ٣ + ٢س - س^{٢}$

و المستقيمات : س = −١ ، س = ٤

، ص = ٠




**الحل**

بوضع : ص = ٠ ∴ $٣ + ٢س - س^{٢} = ٠$

و منها : س = −١ ، س = ٣

∴ المساحة = $\int_{-١}^{٣}(٣ + ٢س - س^{٢})\,ءس + \left|\int_{٣}^{٤}(٣ + ٢س - س^{٢})\,ءس\right|$

$= [\,٣س + س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\,]_{-١}^{٣} + [\,٣س + س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\,]_{٣}^{٤}$

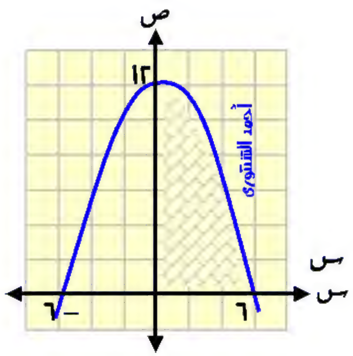
$= [\,(٩ + ٩ - ٩) - (-٣ + ١ - \frac{١}{٣})\,]$

$+ \left|\,[\,(١٢ + ١٦ - \frac{٦٤}{٣}) - (٩ + ٩ - ٩)\,]\,\right| = ١٣$ وحدة مربعة

### إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٢٠

إذا كانت تكلفة تغطية المتر المربع الواحد من أرضية ممرات فندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه و تم تغطية ٥ ممرات متطابقة بالجرانيت كل منها محدودة بمنحنى الدالة د ، و المستقيمين : س = ٠ ، ص = ٠ ، حيث : $د(س) = ١٢ - \frac{١}{٣}س^{٢}$ أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة

**الحل**




بوضع : ص = ٠ ∴ $١٢ - \frac{١}{٣}س^{٢} = ٠$

و منها : س = ٦ ، س = −٦

، ∵ المنطقة محدودة بالمستقيمين :

س = ٠ ، ص = ٠

∴ مساحة الممر الواحد = $\int_{٠}^{٦}(١٢ - \frac{١}{٣}س^{٢})\,ءس$

$= [\,١٢س - \frac{١}{٩}س^{٣}\,]_{٠}^{٦}$

= ( ٧٢ − ٢٤ ) = ٤٨ متر مكعب

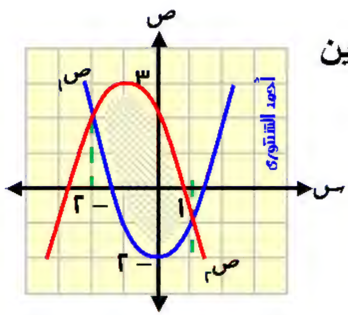
∴ تكلفة الممرات الخمسة = ٥ × ٤٨ × ٤٠٠ = ٩٦٠٠٠ جنيهاً

### إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٢٢

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين

د ، ر حيث : $د(س) = س^{٢} - ٢$

$ر(س) = ٣ - (س + ١)^{٢}$




**الحل**

بفرض أن : $ص_{١} = س^{٢} - ٢$

، $ص_{٢} = ٣ - (س + ١)^{٢}$ نضع : $ص_{١} = ص_{٢}$

∴ $س^{٢} - ٢ = ٣ - س^{٢} - ٢س - ١$ و منها : $س^{٢} + س - ٢ = ٠$

∴ س = ١ ، س = −٢ ، ∵ فى [ −٢ ، ١ ] : $ص_{٢} \ge ص_{١}$

∴ المساحة = $\int_{-٢}^{١}[\,٣ - (س + ١)^{٢} - (س^{٢} - ٢)\,]\,ءس$

$= \int_{-٢}^{١}[\,٥ - (س + ١)^{٢} - س^{٢}\,]\,ءس$

$= [\,٥س - \frac{١}{٣}(س + ١)^{٣} - \frac{١}{٣}س^{٣}\,]_{-٢}^{١}$

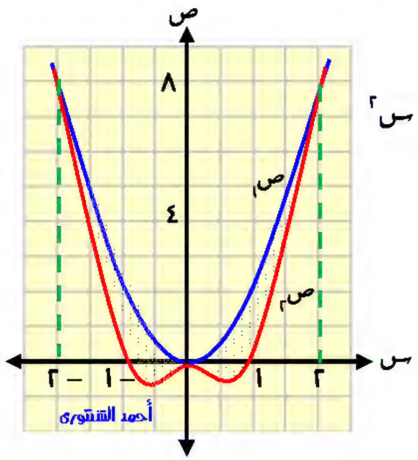
$= (٥ - \frac{٨}{٣} - \frac{١}{٣}) - (-١٠ + \frac{١}{٣} - \frac{٨}{٣}) = ٩$ وحدة مربعة

## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٢٢

تقوم شركة إعلانات بإنتاج ملصق لتسويق سلعة ما فإذا كان الملصق على شكل منطقة محددة بمنحنيى الدالتين د ، ر حيث :

$د(س) = ٢ س^٢$ ، $ر(س) = س^٤ - ٢ س^٢$ مقدرة بالديسمتر

أحسب المساحة اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج ١٠٠٠ ملصق لهذه السلعة




**الحل**

بفرض أن : $ص_١ = ٢ س^٢$ ، $ص_٢ = س^٤ - ٢ س^٢$

نضع : $ص_١ = ص_٢$

∴ $٢ س^٢ = س^٤ - ٢ س^٢$

و منها : $س^٢ (س^٢ - ٤) = ٠$

∴ $س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = -٢$

، ∵ فى $[-٢ ، ٢]$ $ص_١ \geq ص_٢$

، $د(س) - ر(س)$ دالة زوجية

∴ المساحة $= ٢ \int_{٠}^{٢} [٢ س^٢ - (س^٤ - ٢ س^٢)] \, ءس$

$= ٢ \int_{٠}^{٢} (٤ س^٢ - س^٤) \, ءس = ٢ \left[ \frac{٤}{٣} س^٣ - \frac{١}{٥} س^٥ \right]_{٠}^{٢}$

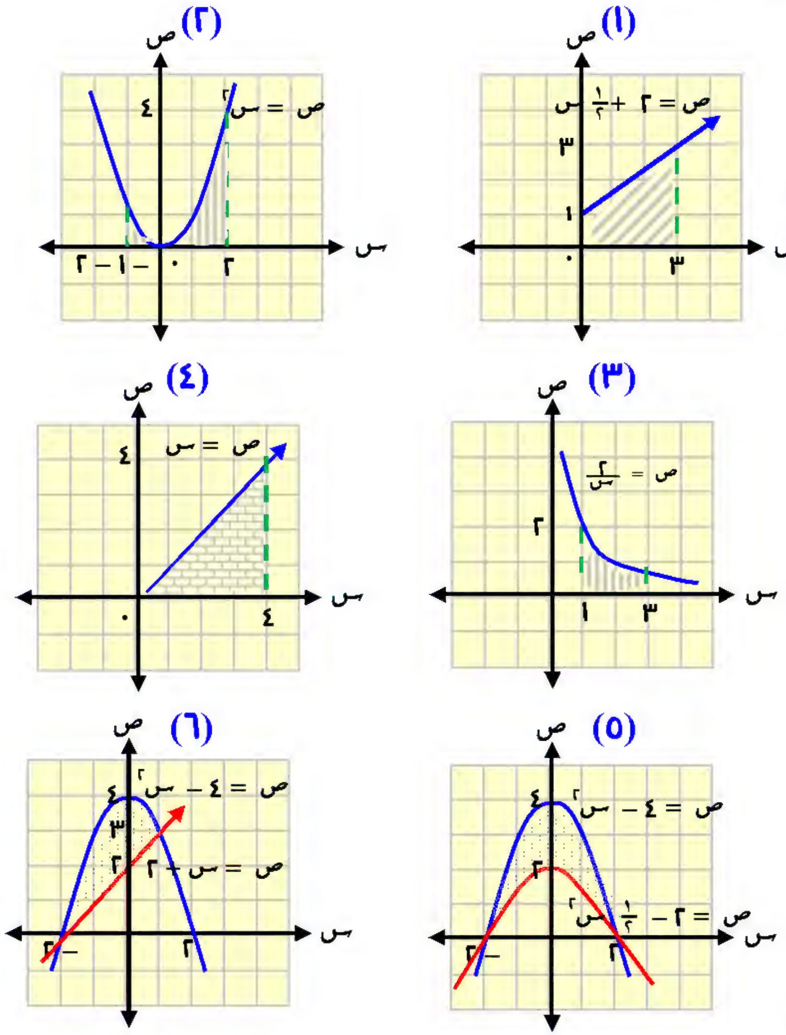
$= ٢ (\frac{٣٢}{٣} - \frac{٣٢}{٥}) = \frac{١٢٨}{١٥}$ وحدة مربعة

∴ المساحة اللازمة من الورق تللاصق لإنتاج ملصق ١٠٠٠ $= ١٠٠٠ \times \frac{١٢٨}{١٥}$

$= ٨٥٣٣ \frac{١}{٣}$ ديسم$^٣$

## حل تمارين ( ٤ − ٤ ) صفحة ١٢٣ بالكتاب المدرسى

أكتب التكامل المحدد الذى يعطى المساحة الملونة فى كل مما يأتى و أحسب قيمته



**الحل**

(١) $\int_{0}^{3} (1 + \frac{1}{2}\text{س})\, \text{ء س} = [\text{س} + \frac{1}{4}\text{س}^2]_{0}^{3}$

$= (3 + \frac{9}{4}) - 0 = \frac{21}{4}$ وحدة مربعة

(٢) $\int_{-1}^{2} \text{س}^2\, \text{ء س} = [\frac{1}{3}\text{س}^3]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$ وحدة مربعة

(٣) $\int_{1}^{3} \frac{2}{\text{س}}\, \text{ء س} = [2\, \text{لو}_{هـ}\, \text{س}]_{1}^{3}$

$= 2\, \text{لو}_{هـ} 3 - 2\, \text{لو}_{هـ} 1 = 2\, \text{لو}_{هـ} 3$ وحدة مربعة

(٤) $\int_{2}^{4} \text{س}\, \text{ء س} = [\frac{1}{2}\text{س}^2]_{2}^{4} = 8 - 2 = 6$ وحدة مربعة

(٥) $\int_{-2}^{1} [(4 - \text{س}^2) - (\text{س} + 2)]\, \text{ء س} = \int_{-2}^{1} (2 - \text{س}^2 - \text{س})\, \text{ء س}$

$= [2\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3 - \frac{1}{2}\text{س}^2]_{-2}^{1}$

$= (2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}) - (-4 + \frac{8}{3} - 2) = \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

(٦) $\int_{-2}^{2} [(4 - \text{س}^2) - (2 - \frac{1}{2}\text{س}^2)]\, \text{ء س} = \int_{-2}^{2} (2 - \frac{1}{2}\text{س}^2)\, \text{ء س}$

$= [2\text{س} - \frac{1}{6}\text{س}^3]_{-2}^{2}$

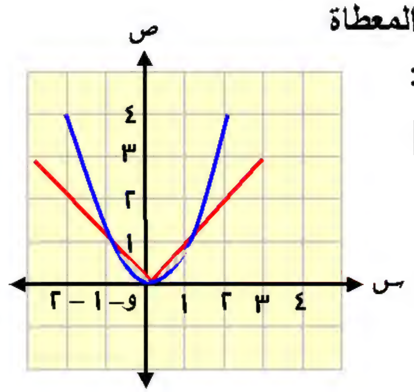
$= (4 - \frac{4}{3}) - (-4 + \frac{4}{3}) = \frac{16}{3}$ وحدة مربعة

**أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة**

(٧) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

فإن : ص = س² ، ص = | س |

تساوى ....




(أ) $2\int_{-1}^{0} (\text{س}^2 - \text{س})\, \text{ء س}$

(ب) $\int_{0}^{1} (\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ء س}$

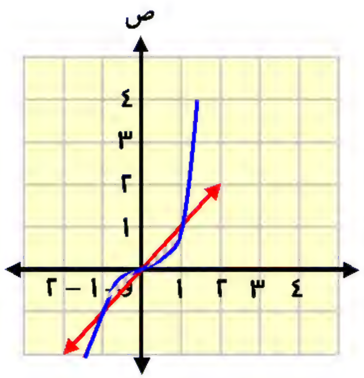
(جـ) $2\int_{0}^{1} (\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ء س}$

(د) $\int_{-1}^{1} (\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ء س}$

(٨) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

فإن : ص = س³ ، ص = س

تساوى ....




(أ) $\int_{-1}^{1} (\text{س}^3 - \text{س})\, \text{ء س}$

(ب) $2\int_{0}^{1} (\text{س}^3 - \text{س})\, \text{ء س}$

(جـ) $\int_{0}^{1} (\text{س} - \text{س}^3)\, \text{ء س}$

(د) $2\int_{0}^{1} (\text{س} - \text{س}^3)\, \text{ء س}$

(٩) مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات : ص = س ، س = ٢ ، ص = ٠ تساوى ....

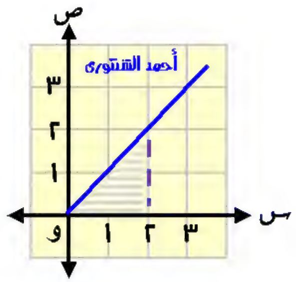
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(١٠) مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات : ص = س³ ، ص = ٠ ، س = ٢ تساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

**الحل**

(٧) $2\int_{0}^{1} (\text{س} - \text{س}^2)\, \text{ء س}$ (٨) $2\int_{0}^{1} (\text{س} - \text{س}^3)\, \text{ء س}$

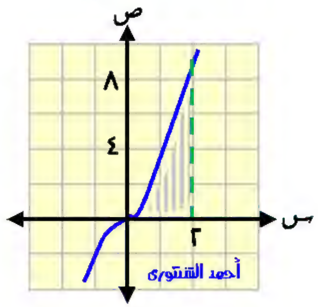



(٩) عندما : ص = ٠ فإن : س = ٠ .

∴ مساحة المنطقة = $\int_{0}^{2} \text{س} \, \text{ءس}$

$= \left[\frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{2}$

$= 2$ وحدة مربعة




(١٠) عندما : ص = ٠ فإن : س = ٠ .

∴ مساحة المنطقة = $\int_{0}^{2} \text{س}^3 \, \text{ءس}$

$= \left[\frac{1}{4}\text{س}^4\right]_{0}^{2}$

$= 4$ وحدة مربعة

فى كل مما يأتى احسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين :

(١١) المنحنى : ص = ٥ − س$^2$ و محور السينات و المستقيمين س = −٢ ، س = ١

(١٢) المستقيمات : س + ٢ص = ٩ ، س = ١ ، س = ٣ ، ص = ٠ .

(١٣) المنحنى : ص = $\sqrt{\text{س} + 4}$ ، المستقيمات : س = ٠ ، س = ٥ ، ص = ٠ .

(١٤) المنحنى : ص = ٣ − ٢س − س$^2$ و محور السينات

(١٥) المنحنى : ص = $\frac{4}{\text{س}^2}$ و المستقيمات : س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ .

(١٦) منحنى الدالة د : د(س) = (٣ − س)(س − ١)$^2$ و محورى الاحداثيات حيث : د(س) ≥ ٠ .

(١٧) منحنى الدالة د : د(س) = (س − ١)(س − ٢)(س − ٣) و محورى الاحداثيات حيث : د(س) ≥ ٠ .

(١٨) منحنيى الدالتين د ، ر حيث : د(س) = ٢س$^2$ ، ر(س) = ٢س + ٤

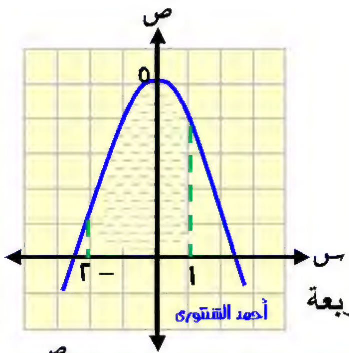
## الحل

(١١) المساحة = $\int_{-2}^{1} (5 - \text{س}^2) \, \text{ءس}$

$= \left[5\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{-2}^{1}$

$= (5 - \frac{1}{3}) - (-10 + \frac{8}{3})$

$= 5 - \frac{1}{3} + 10 - \frac{8}{3} = 12$ وحدة مربعة

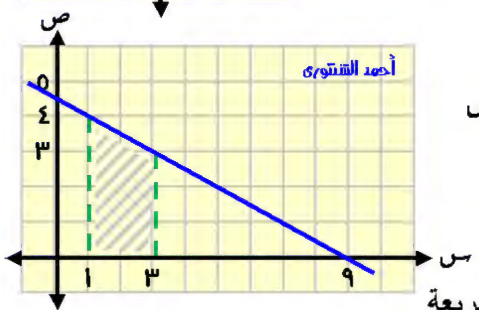



(١٢) ص = $\frac{1}{2}(9 - \text{س})$

المساحة = $\int_{1}^{3} \frac{1}{2}(9 - \text{س}) \, \text{ءس}$

$= \frac{1}{2}\left[9\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{1}^{3}$

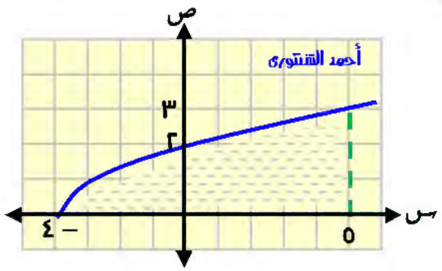
$= \frac{1}{2}\left[(27 - \frac{9}{2}) - (9 - \frac{1}{2})\right] = 7$ وحدة مربعة




(١٣) المساحة = $\int_{0}^{5} (\text{س} + 4)^{\frac{1}{2}} \, \text{ءس}$

$= \frac{2}{3}\left[(\text{س} + 4)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{5}$

$= \frac{2}{3}(27 - 8) = \frac{38}{3}$ وحدة مربعة




أحمد الشنتورى

**(١٤)** بوضع : ص = ٠ ∴ ٣ − ٢ س − س$^{٢}$ = ٠

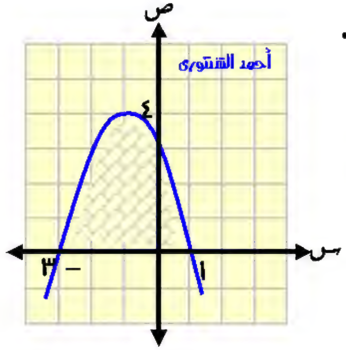
و منها : س = −٣ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{-٣}^{١}$ ( ٣ − ٢ س − س$^{٢}$ ) ء س

= [ ٣ س − س$^{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ ]$_{-٣}^{١}$

= [ ( ٣ − ١ − $\frac{١}{٣}$ ) − ( ٩ − ٩ − ٩ ) ]

= $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

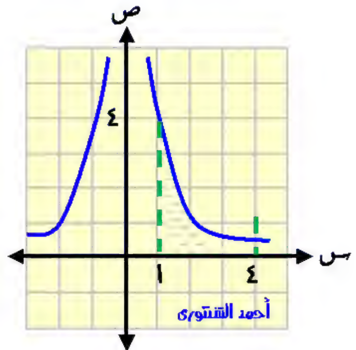



**(١٥)** المساحة = $\int_{١}^{٤}$ ٤ س$^{-٢}$ ء س

= ٤ [ − س$^{-١}$ ]$_{١}^{٤}$

= ٤ ( − $\frac{١}{٤}$ + ١ )

= ٣ وحدة مربعة




**(١٦)** بوضع : د(س) = ٠ ∴ ( ٣ − س )( س − ١ )$^{٢}$ = ٠

و منها : س = ٣ ، س = ١

، ∵ المساحة محدودة بمحورى الاحداثيات

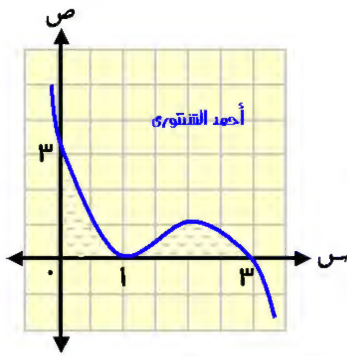
∴ حدى التكامل هما : س = ٠ ، س = ٣

∴ المساحة = $\int_{٠}^{٣}$ ( ٣ − س )( س − ١ )$^{٢}$ ء س

= $\int_{٠}^{٣}$ ( − س$^{٣}$ + ٥ س$^{٢}$ − ٧ س + ٣ ) ء س

= [ − $\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ + $\frac{٥}{٣}$ س$^{٣}$ − $\frac{٧}{٢}$ س$^{٢}$ + ٣ س ]$_{٠}^{٣}$

= ( − $\frac{٨١}{٤}$ + $\frac{٥}{٣}$ × ٩ − $\frac{٧}{٢}$ × ٩ + ٩ ) = $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة




**(١٧)** بوضع : د(س) = ٠ ∴ ( س − ١ )( س − ٢ )( س − ٣ ) = ٠

و منها : س = ١ ، س = ٢ ، س = ٣

، ∵ المنطقة محددة بالمستقيمين :

س = ٤ ، ص = ٠ ، د(س) ≥ ٠

، د(س) = س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ١١ س − ٦

∴ المساحة = $\int_{١}^{٢}$ ( س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ١١ س − ٦ ) ء س + $\int_{٣}^{٤}$ ( س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ١١ س − ٦ ) ء س

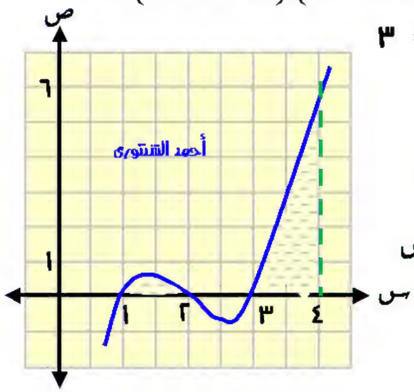
= [ $\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ − ٣ س$^{٢}$ + $\frac{١١}{٢}$ س$^{٢}$ − ٦ س ]$_{١}^{٢}$

+ [ $\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ − ٣ س$^{٢}$ + $\frac{١١}{٢}$ س$^{٢}$ − ٦ س ]$_{٣}^{٤}$

= [ ( ٤ − ١٦ + ٢٢ − ١٢ ) − ( $\frac{١}{٤}$ − ٢ + $\frac{١١}{٢}$ − ٦ ) ]

+ [ ( ٦٤ − ١٢٨ + ٨٨ − ٢٤ ) − ( $\frac{٨١}{٤}$ − ٤ + $\frac{٩٩}{٢}$ − ١٨ ) ]

= − ٢ + $\frac{٩}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{٥}{٢}$ وحدة مربعة




**(١٨)** بوضع : د(س) = ر(س)

∴ ٢ س$^{٢}$ = ٢ س + ٤

∴ ٢ س$^{٢}$ − ٢ س − ٤ = ٠

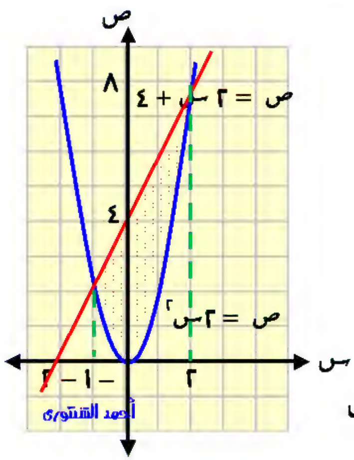
∴ س$^{٢}$ − س − ٢ = ٠

∴ ( س − ٢ )( س + ١ ) = ٠

∴ س = ٢ ، س = −١

، ∵ ر(س) ≥ د(س)

∴ المساحة = $\int_{-١}^{٢}$ [ ر(س) − د(س) ] ء س

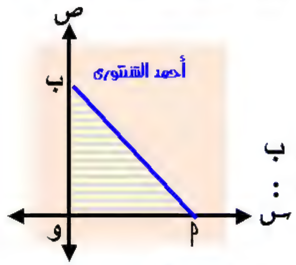



أحمد الشنتورى

$= \int_{-١}^{٢} (٢س + ٤ - ٢س^{٢})\, ءس = [\, س^{٢} + ٤س - \frac{٢}{٣}س^{٣} \,]_{-١}^{٢}$

$= (٤ + ٨ - \frac{١٦}{٣}) - (١ - ٨ + \frac{٢}{٣}) = ٩$ وحدة مربعة

**(١٩)** باستخدام التكامل أثبت أن مساحة المثلث الذى طول قاعدته يساوى أ و ارتفاعه يساوى ب هى : $\frac{١}{٢}$ أ ب




الحل

∵ مساحة المثلث الذى طول قاعدته = أ ، ارتفاعه يساوى ب

= مساحة مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة فيه هما : أ ، ب ∴ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى : ص − ب

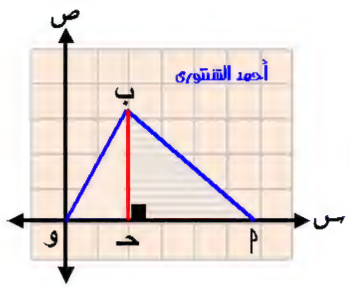
∴ مساحة المثلث = المساحة أسفل $\overleftrightarrow{أب}$ الذى معادلته هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ $ص = ب - \frac{ب}{أ}س = \frac{ب}{أ}(أ - س)$

∴ مساحة المثلث $= \frac{ب}{أ}\int_{٠}^{أ}(أ - س)\, ءس = \frac{ب}{أ}[\, أس - \frac{١}{٢}س^{٢} \,]_{٠}^{أ}$

$= \frac{ب}{أ}(أ^{٢} - \frac{١}{٢}أ^{٢}) = أب - \frac{١}{٢}أب = \frac{١}{٢}أب$

## حل آخر




فى الشكل المقابل :

طول قاعدة △ أ ب و = أ ، و ارتفاعه = ب

، أ ( أ ، ٠ ) ، ب ( حـ ، ب )

، معادلة $\overleftrightarrow{وب}$ : $ص = \frac{ب}{حـ}س$

، معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ : $ص = \frac{ب}{حـ - أ}(س - أ)$

∴ مساحة △ أ ب و $= \frac{ب}{حـ}\int_{٠}^{حـ} س\, ءس + \frac{ب}{حـ - أ}\int_{حـ}^{أ}(س - أ)\, ءس$

$= \frac{ب}{حـ}[\, \frac{١}{٢}س^{٢} \,]_{٠}^{حـ} + \frac{ب}{حـ - أ}[\, \frac{١}{٢}س^{٢} - أس \,]_{حـ}^{أ}$

$= \frac{ب}{حـ} \times \frac{١}{٢}حـ^{٢} + \frac{ب}{حـ - أ}(\frac{١}{٢}أ^{٢} - أ^{٢} - \frac{١}{٢}حـ^{٢} + أحـ)$

$= \frac{١}{٢}ب حـ + \frac{ب}{حـ - أ}(-\frac{١}{٢}أ^{٢} - \frac{١}{٢}حـ^{٢} + أحـ)$

$= \frac{١}{٢}ب حـ + \frac{ب}{حـ - أ} \times \frac{١}{٢}(حـ^{٢} - ٢أحـ + أ^{٢})$

$= \frac{١}{٢}ب حـ + \frac{ب}{حـ - أ} \times \frac{١}{٢}(حـ - أ)^{٢}$

$= \frac{١}{٢}ب حـ + \frac{١}{٢}ب أ - \frac{١}{٢}ب حـ = \frac{١}{٢}ب أ$

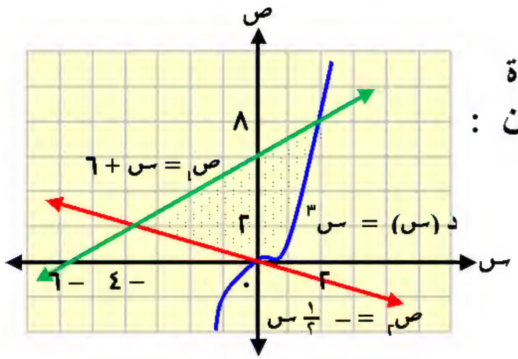
**(٢٠)** فى الشكل المقابل :

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين : ص١ ، ص٢ حيث :

$د(س) = س^{٣}$ ،

$ص_{١} = س + ٦$ ،

$ص_{٢} = -\frac{١}{٢}س$




الحل

المنطقة المحددة مكونة من الفترتين : [ −٤ ، ٠ ] ، [ ٠ ، ٢ ]

، ∵ فى [ −٤ ، ٠ ] : ص١ ≤ ص٢ ، فى [ ٠ ، ٢ ] : ص١ ≤ د(س)

∴ مساحة المنطقة المحددة $= \int_{-٤}^{٠}(س + ٦ + \frac{١}{٢}س)\, ءس$

$+ \int_{٠}^{٢}(س + ٦ - س^{٣})\, ءس$

$= \int_{-٤}^{٠}(\frac{٣}{٢}س + ٦)\, ءس + \int_{٠}^{٢}(س + ٦ - س^{٣})\, ءس$

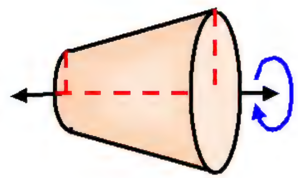
$= [\, \frac{٣}{٤}س^{٢} + ٦س \,]_{-٤}^{٠} + [\, \frac{١}{٢}س^{٢} + ٦س - \frac{١}{٤}س^{٤} \,]_{٠}^{٢}$

$= ٠ - (١٢ - ٢٤) + (٢ + ١٢ - ٤) - ٠$

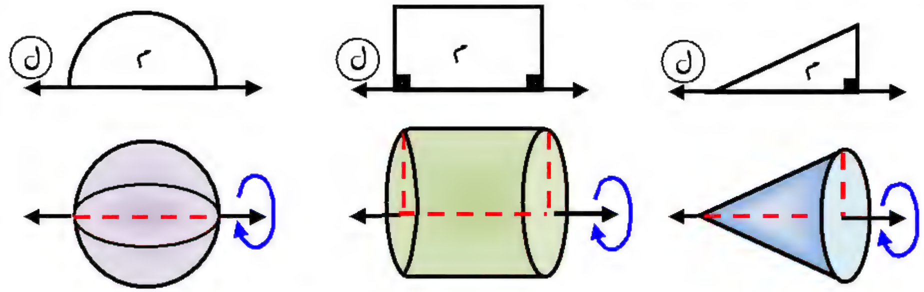
$= ٢٢$ وحدة مربعة

## ٤ – ٥ حجوم الأجسام الدورانية

**المجسم الدورانى :**
هو المجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت فى مستويها يسمى محور الدوران



**أمثلة :**
توضح الأشكال التالية أمثلة لمجسمات دورانية ترسمها المساحة م عند دورانها دورة كاملة حول المستقيم ل



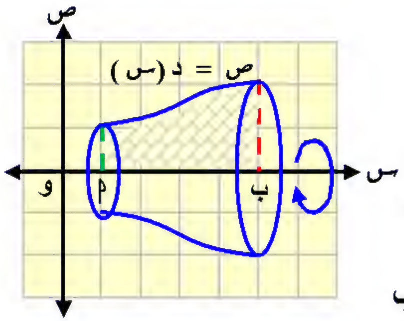

(١) إذا دارت منطقة مستوية على شكل مثلث قائم الزاوية حول المستقيم الحامل لأحد ضلعى القائمة دورة كاملة كان المجسم الناتج هو مخروط دائرى قائم

(٢) إذا دارت منطقة مستوية على شكل مستطيل حول المستقيم الحامل لأحد أضلاعه دورة كاملة كان المجسم الناتج هو اسطوانة دائرية قائمة

(٣) إذا دارت منطقة مستوية على دائرة حول المستقيم الحامل لأحد أقطارها كان المجسم الناتج هو كرة

### أولاً : حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية محور

**نظرية :**

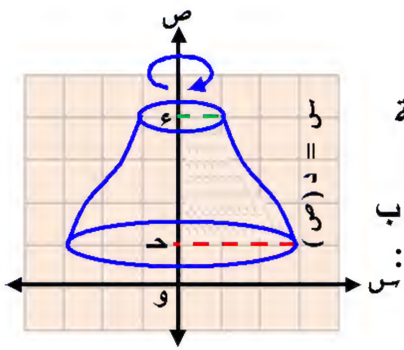



إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [ ﻫ ، ب ] ، د(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [ ﻫ ، ب ] فإن :
حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى : ص = د(س) ،
و المستقيمين : س = ﻫ ، س = ب
دورة كاملة حول محور السينات هو :

$$ع = \pi \int_{ﻫ}^{ب} [د(س)]^2 \, ء س$$

$$= \pi \int_{ﻫ}^{ب} ص^2 \, ء س$$

**ملاحظة :**




إذا كانت د دالة متصلة على الفترة [ حـ ، ء ] ، د(ص) ≥ ٠ لكل ص ∈ [ حـ ، ء ] فإن :
حجم الجسم الناشئ من دوران المساحة المحددة بالمنحنى : س = د(ص) ،
و المستقيمين : ص = حـ ، س = ب
دورة كاملة حول محور الصادات هو :

$$ع = \pi \int_{حـ}^{ء} [د(ص)]^2 \, ء ص$$

$$= \pi \int_{حـ}^{ء} س^2 \, ء ص$$

## ثانياً : حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين

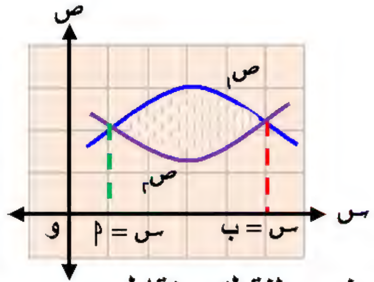
**نظرية :**

إذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [ ﺃ ، ب ] ، و كان د(س) ≥ ٠ ، ر(س) ≥ ٠ لكل س ∈ [ ﺃ ، ب ] فإن :

حجم الجسم الدورانى ع الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين و المستقيمين : س = ﺃ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات هو : ع = π ∫ﺃ^ب [ ( د(س) )٢ − ( ر(س) )٢ ] ء س

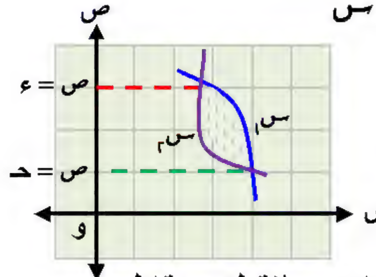
**ملاحظات :**

(١) إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين : ص١ = د(س) ، ص٢ = ر(س) حيث : ص١ ≥ ص٢ لكل س ∈ [ ﺃ ، ب ] دورة كاملة حول محور السينات فإن : الاحداثيين السينيين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل ﺃ ، ب حيث : ﺃ < ب و يكون :




ع = π ∫ﺃ^ب [ ( ص١ )٢ − ( ص٢ )٢ ] ء س

(٢) إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين : س١ = د(ص) ، س٢ = ر(ص) حيث : س١ ≥ س٢ لكل س ∈ [ حـ ، ء ] دورة كاملة حول محور السينات فإن : الاحداثيين الصاديين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما حدود التكامل حـ ، ء حيث : حـ < ء و يكون :



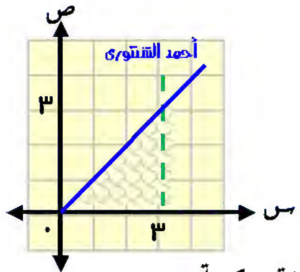

ع = π ∫حـ^ء [ ( س١ )٢ − ( س٢ )٢ ] ء ص

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٢٦

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين : س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة حول محور السينات علماً بأن : د(س) = س

ما أسم المجسم الناشئ ؟ بين كيف تتحقق هندسياً من صحة إجابتك ؟

**الحل**




الحجم = ع = π ∫٠^٣ ( د(س) )٢ ء س

= π ∫٠^٣ س٢ ء س = π [ ⅓ س٣ ]٠^٣

= ٩ π وحدة مكعبة

المجسم الناشئ هو مخروط دائرى قائم

حجمه = ع = ⅓ π نق٢ ع = ⅓ π × ٩ = ٩ π وحدة مكعبة

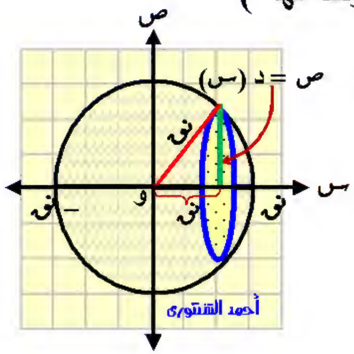
## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٢٧

باستخدام التكامل أثبت أن :

(ﺃ) حجم الكرة = ٤/٣ π نق٣ ( نق طول نصف قطر الكرة )

(ب) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق٢ ع ( نق طول نصف قطر الأسطوانة ، ع ارتفاعها )

**الحل**




(ﺃ) حجم الكرة يساوى حجم الجسم الناشئ من دوران نصف دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها نق دورة كاملة حول محور السينات

∵ معادلة هذه الدائرة هى :

س٢ + ص٢ = نق٢

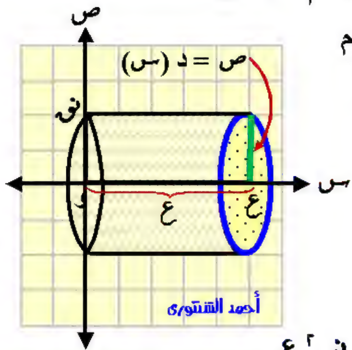
∴ ص٢ = نق٢ − س٢

$\therefore$ حجم الكرة $= \pi \int_{-نق}^{نق} ص^2 \, ء س = ٢\pi \int_{٠}^{نق} (نق^2 - س^2) \, ء س$

$= ٢\pi \left[ نق^2 س - \frac{١}{٣} س^3 \right]_{٠}^{نق}$

$= ٢\pi \left( نق^3 - \frac{١}{٣} نق^3 \right) = \frac{٤}{٣} \pi نق^3$

(ب) حجم الأسطوانة الدائرية القائمة يساوى حجم الجسم الناشئ من دوران مستطيل بعداه هما : نق ، ع دورة كاملة حول محور السينات




حيث : ص = نق

$\therefore$ حجم الأسطوانة $= \pi \int_{٠}^{ع} ص^2 \, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{ع} نق^2 \, ء س$

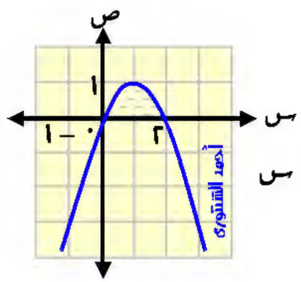
$= \pi \left[ نق^2 س \right]_{٠}^{ع} = \pi نق^2 ع$

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٢٧

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

ص = ٢ س − س$^2$ و محور السينات دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**



بوضع : ص = ٠ $\therefore$ س ( ٢ − س ) = ٠

و منها : س = ٠ ، س = ٢

$\therefore ع = \pi \int_{٠}^{٢} ص^2 \, ء س = \pi \int_{٠}^{٢} (٢س - س^2)^2 \, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٤س^2 - ٤س^3 + س^4) \, ء س$

$= \pi \left[ \frac{٤}{٣} س^3 - س^4 + \frac{١}{٥} س^5 \right]_{٠}^{٢}$

$= \pi \left[ \left( \frac{٣٢}{٣} - ١٦ + \frac{٣٢}{٥} \right) - ٠ \right] = \frac{١٦}{١٥} \pi$ وحدة مكعبة

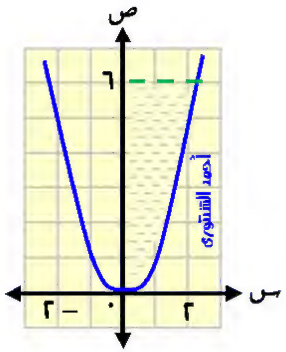
## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٢٨

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

ص = س$^2$ و محور الصادات و المستقيمين : ص = ٠ ، ص = ٦

دورة كاملة حول محور الصادات

**الحل**



(١٠) $\because$ الدوران حول محور الصادات

$\therefore ع = \pi \int_{٠}^{٦} س^2 \, ء ص = \pi \int_{٠}^{٦} ص \, ء ص$

$= \pi \left[ \frac{١}{٢} ص^2 \right]_{٠}^{٦} = \frac{١}{٢} \pi (٣٦ - ٠)$

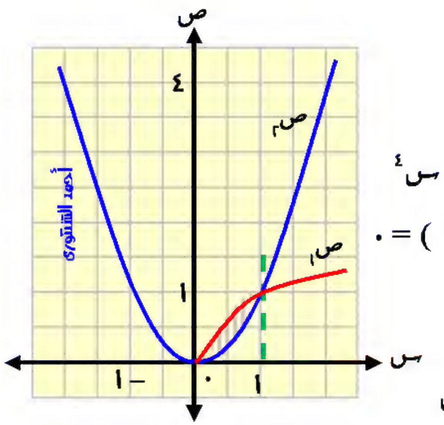
$= ١٨ \pi$ وحدة مكعبة

## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٣٠

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين :

ص = $\sqrt{س}$ ، ص = س$^2$ دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**




بفرض أن : $ص_1 = \sqrt{س}$ ، $ص_2 = س^2$

نضع : $ص_1 = ص_2$

$\therefore \sqrt{س} = س^2$ بالتربيع ينتج : $س = س^4$

و منها : س ( س − ١ ) ( س$^2$ + س + ١ ) = ٠

$\therefore$ س = ٠ ، س = ١

، $\because$ فى [ ٠ ، ١ ] : $ص_2 \leq ص_1$

$\therefore ع = \pi \int_{٠}^{١} \left[ (ص_1)^2 - (ص_2)^2 \right] ء س$

$= \pi \int_{٠}^{١} \left[ س - س^4 \right] ء س = \pi \left[ \frac{١}{٢} س^2 - \frac{١}{٥} س^5 \right]_{٠}^{١}$

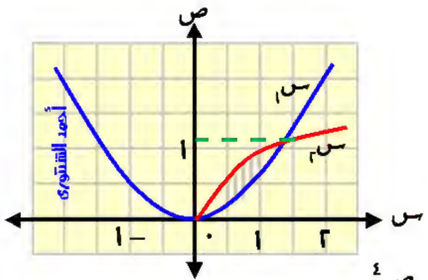
$= \pi \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - 0 \right] = \frac{3}{10}\pi$ وحدة مكعبة

## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٣٠

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين :

$2\text{ص} = \text{س}^2$ ، $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$ دورة كاملة حول محور الصادات

الحل




$\because 2\text{ص} = \text{س}^2 \quad \therefore \text{س} = \sqrt{2\text{ص}}$

، $\because \text{ص} = \sqrt{\text{س}} \quad \therefore \text{س} = \text{ص}^2$

بفرض أن : $\text{س}_1 = \sqrt{2\text{ص}}$ ، $\text{س}_2 = \text{ص}^2$

نضع : $\text{س}_1 = \text{س}_2$

$\therefore \sqrt{2\text{ص}} = \text{ص}^2$ بالتربيع ينتج : $2\text{ص} = \text{ص}^4$

و منها : $\text{ص} (\text{ص} - \sqrt[3]{2})(\text{ص}^2 + \sqrt[3]{2}\,\text{ص} + 1) = 0$

$\therefore \text{ص} = 0$ ، $\text{ص} = \sqrt[3]{2}$ ، $\because$ فى $[0 , \sqrt[3]{2}]$ : $\text{س}_2 \leq \text{س}_1$

$\therefore ع = \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} [(\text{س}_1)^2 - (\text{س}_2)^2]\, ء\text{ص}$

$= \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} [2\text{ص} - \text{ص}^4]\, ء\text{ص} = \pi \left[ \text{ص}^2 - \frac{1}{5}\text{ص}^5 \right]_0^{\sqrt[3]{2}}$

$= \pi \left[ \left( \sqrt[3]{4} - \frac{1}{5} \times \sqrt[3]{32} \right) - 0 \right]$

$= \left( \sqrt[3]{4} - \frac{1}{5} \times 2 \times \sqrt[3]{4} \right) \pi = \frac{3}{5} \sqrt[3]{4}\, \pi$ وحدة مكعبة

$\simeq 0{,}952\, \pi$ وحدة مكعبة

## حل تمارين ( ٤ – ٥ ) صفحة ١٣٠ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(١)** حجم الجسم الدورانى الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : $\text{ص} = 2\sqrt{\text{س}}$ ، $\text{ص} = 0$ ، $\text{س} = 1$ دورة كاملة حول محور السينات يساوى ....

(أ) $-\pi$ (ب) $0$ (جـ) $\pi$ (د) $2\pi$

**(٢)** حجم الجسم الدورانى الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : $\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}$ و المستقيمين $\text{ص} = 1$ ، $\text{ص} = 2$ و محور الصادات دورة كاملة حول محور الصاداتات يساوى ....

(أ) $\frac{1}{4}\pi$ (ب) $\frac{1}{2}\pi$ (جـ) $\pi$ (د) $2\pi$

**(٣)** حجم الجسم الدورانى الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى : $\text{ص} = \text{س}^2$ و المستقيم $\text{ص} = 1$ دورة كاملة حول محور الصادات يساوى ....

(أ) $\pi$ (ب) $\frac{1}{2}\pi$ (جـ) $\frac{1}{4}\pi$ (د) $2\pi$

**(٤)** $\pi \int_{-2}^{2} (4 - \text{س}^2)\, ء\text{س}$ هو حجم ....

(أ) كرة طول نصف قطرها ٤ وحدات

(ب) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ وحدات

(جـ) كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة

(د) اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٤ وحدات

الحل

(١) ∵ ص = ٢ $\sqrt{\text{س}}$ ، الدوران حول محور السينات

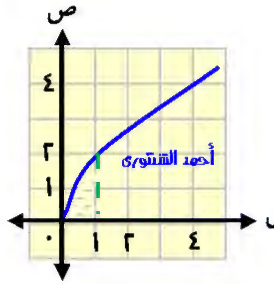
، عندما ص = ٠ فإن : س = ٠ .

∴ حدى التكامل هما : س = ٠ ، س = ١

∴ ع = $\pi \int_{0}^{1}$ ص² ء س = $\pi \int_{0}^{1}$ ٤ س ء س

= ٤ $\pi$ [ $\frac{1}{2}$ س² ]$_{0}^{1}$

= ٤ $\pi$ × $\frac{1}{2}$ = ٢ $\pi$ وحدة مكعبة



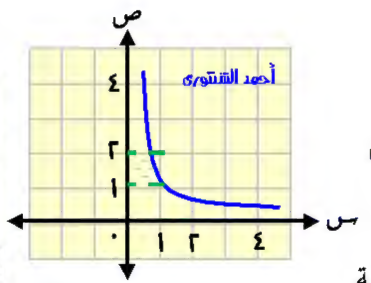

(٢) ∵ ص = $\frac{1}{\text{س}}$ ، الدوران حول محور الصادات

∴ س = $\frac{1}{\text{ص}}$ = ص$^{-1}$

∴ ع = $\pi \int_{1}^{2}$ س² ء ص = $\pi \int_{1}^{2}$ ص$^{-2}$ ء ص

= $\pi$ [ − ص$^{-1}$ ]$_{1}^{2}$

= $\pi$ ( − $\frac{1}{2}$ + ١ ) = $\frac{1}{2}$ $\pi$ وحدة مكعبة



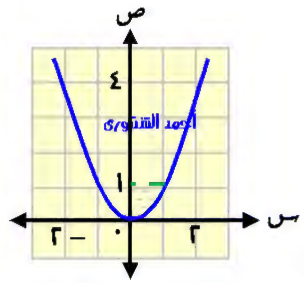

(٣) ∵ ص = س² ، الدوران حول محور الصادات

، عندما س = ٠ فإن : ص = ٠ .

∴ حدى التكامل هما : ص = ٠ ، ص = ١

∴ ع = $\pi \int_{0}^{1}$ س² ء ص = $\pi \int_{0}^{1}$ ص ء ص

= ٤ $\pi$ [ $\frac{1}{2}$ ص² ]$_{0}^{1}$ = $\frac{1}{2}$ $\pi$ وحدة مكعبة



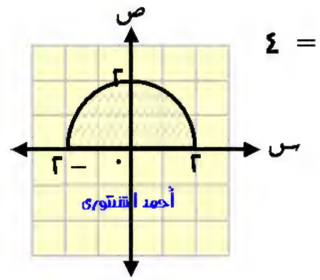

(٤) بفرض أن : ص² = ٤ − س² ∴ س² + ص² = ٤

و هى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

و طول نصف قطرها ٢ وحدة طول

∴ $\pi \int_{-2}^{2}$ ( ٤ − س² ) ء س

هو حجم كرة طول نصف قطرها ٢ وحدة




أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات و المستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور السينات فى كل مما يأتى :

(٥) ص = س ، س = ٣ ، ص = ٠ .

(٦) ص = ٣ − س ، س = ٠ ، ص = ٠ .

(٧) ص = $\frac{1}{\text{س}}$ ، س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ .

(٨) ص = | س | ، س = −٢ ، س = ٤ ، ص = ٠ .

الحل

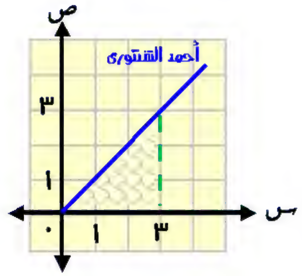
(٥) عندما ص = ٠ فإن : س = ٠ .

، الدوران حول محور السينات

∴ ع = $\pi \int_{0}^{3}$ ص² ء س = $\pi \int_{0}^{3}$ س² ء س

= $\pi$ [ $\frac{1}{3}$ س³ ]$_{0}^{3}$

= $\frac{1}{3}$ $\pi$ ( ٢٧ − ٠ ) = ٩ $\pi$ وحدة مكعبة




(٦) عندما ص = ٠ فإن : س = ٣

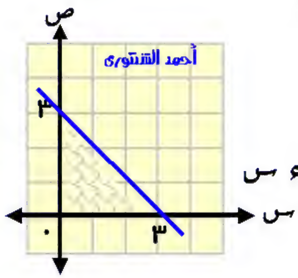
، الدوران حول محور السينات

∴ ع = $\pi \int_{0}^{3}$ ص² ء س = $\pi \int_{0}^{3}$ ( ٣ − س )² ء س

= $\pi \int_{0}^{3}$ ( ٩ − ٦ س + س² ) ء س

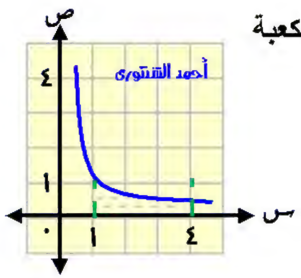
= $\pi$ [ ٩ س − ٣ س² + $\frac{1}{3}$ س³ ]$_{0}^{3}$

= $\pi$ ( ٢٧ − ٢٧ + ٩ ) = ٩ $\pi$ وحدة مكعبة



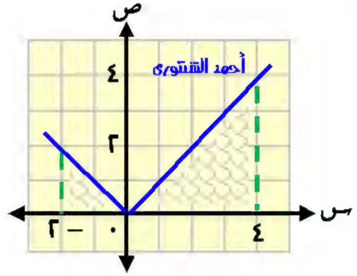

(٧) ∵ ص = س$^{-1}$ ، الدوران حول محور السينات

∴ ع = $\pi \int_{1}^{4}$ ص² ء س = $\pi \int_{1}^{4}$ س$^{-2}$ ء س



$= \pi \int_{1}^{4} (9 - 6\,\text{س} + \text{س}^2)\, ء\text{س} = \pi \left[ - \text{س}^{-1} \right]_{1}^{4}$

$= \pi \left( -\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3}{4}\pi$ وحدة مكعبة




**(٨)** ∵ الدوران حول محور السينات ، ص = | س |

∴ فى [ −٢ ، ٠ ] : ص = س

، فى [ ٠ ، ٤ ] : ص = − س

∴ $ح = \pi \int_{-2}^{0} \text{س}^2\, ء\text{س} + \pi \int_{0}^{4} (-\text{س})^2\, ء\text{س} = \pi \int_{-2}^{0} \text{س}^2\, ء\text{س} + \pi \int_{0}^{4} \text{س}^2\, ء\text{س}$

$= \pi \left[ \frac{1}{3}\text{س}^3 \right]_{-2}^{0} + \pi \left[ \frac{1}{3}\text{س}^3 \right]_{0}^{4}$

$= \frac{1}{3}\pi (0 + 8) + \frac{1}{3}\pi (64 - 0) = 24\,\pi$ وحدة مكعبة

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات و المستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات فى كل مما يأتى :

**(٩)** ص = س ، ص = ١ ، س = ٠ .

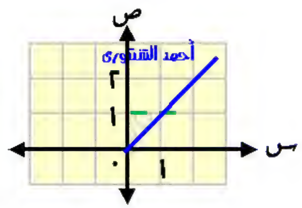
**(١٠)** ص = $\text{س}^2$ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٨

**(١١)** ص = ٤ − $\text{س}^2$ ، س = ٠ ، ص = ٠ .

**(١٢)** ص = $\text{س}^3$ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٨

**(١٣)** س + ٢ ص = ٠ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٣

الحـــل



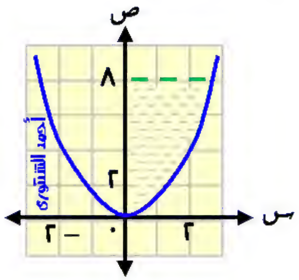

**(٩)** عندما : ص = ١ فإن : س = ١

، الدوران حول محور الصادات

∴ $ح = \pi \int_{0}^{1} \text{س}^2\, ء\text{ص} = \pi \int_{0}^{1} \text{ص}^2\, ء\text{ص}$

$= \pi \left[ \frac{1}{3}\text{ص}^3 \right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}\pi (1 - 0) = \frac{1}{3}\pi$ وحدة مكعبة

**(١٠)** ∵ الدوران حول محور الصادات




∴ $ح = \pi \int_{0}^{8} \text{س}^2\, ء\text{ص} = \pi \int_{0}^{8} \text{ص}\, ء\text{ص}$

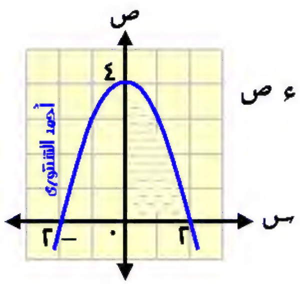
$= \pi \left[ \frac{1}{2}\text{ص}^2 \right]_{0}^{8}$

$= \frac{1}{2}\pi (64 - 0)$

$= 32\,\pi$ وحدة مكعبة

**(١١)** ∵ الدوران حول محور الصادات ، $\text{س}^2$ = ٤ − ص

، عندما : س = ٠ فإن : ص = ٤




∴ $ح = \pi \int_{0}^{4} \text{س}^2\, ء\text{ص} = \pi \int_{0}^{4} (4 - \text{ص})\, ء\text{ص}$

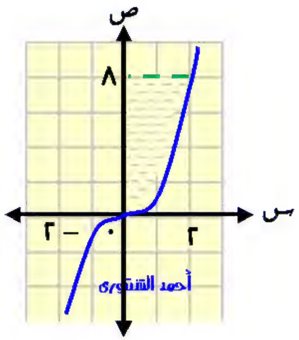
$= \pi \left[ 4\,\text{ص} - \frac{1}{2}\text{ص}^2 \right]_{0}^{4}$

$= \pi \left[ (16 - 8) - 0 \right]$

$= 8\,\pi$ وحدة مكعبة

**(١٢)** ∵ الدوران حول محور الصادات ، س = $\text{ص}^{\frac{1}{3}}$

، عندما : س = ٠ فإن : ص = ٠



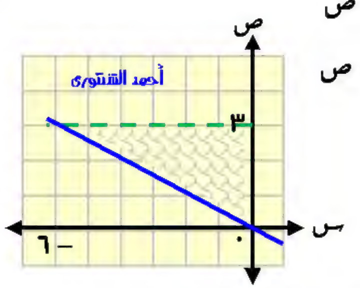

∴ $ح = \pi \int_{0}^{8} \text{س}^2\, ء\text{ص} = \pi \int_{0}^{8} \text{ص}^{\frac{2}{3}}\, ء\text{ص}$

$= \pi \left[ \frac{3}{5}\text{ص}^{\frac{5}{3}} \right]_{0}^{8}$

$= \frac{3}{5}\pi (32 - 2)$

$= \frac{96}{5}\pi$ وحدة مكعبة

**(١٣)** ∵ الدوران حول محور الصادات ، $\text{س} = -2\,\text{ص}$




$\therefore \text{ح} = \pi \int_{0}^{3} \text{س}^2 \, \text{ء ص} = \pi \int_{0}^{3} 4\,\text{ص}^2 \, \text{ء ص}$

$= 4\pi \left[ \frac{1}{3} \text{ص}^3 \right]_{0}^{3}$

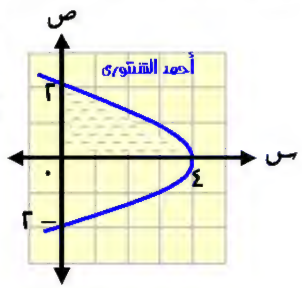
$= \frac{4}{3} \pi \, ( 27 - 0 )$

$= 36\,\pi$ وحدة مكعبة

**(١٤)** أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :
$\text{ص}^2 = 4 - \text{س}$ و المستقيم : $\text{س} = 0$ . عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة :

أولاً : حول محور السينات    ثانياً : حول محور الصادات

**الحل**




أولاً : الدوران حول محور السينات

عندما : $\text{ص} = 0$ . فإن : $\text{س} = 4$

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{0}^{4} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{4} ( 4 - \text{س} ) \, \text{ء س}$

$= \pi \left[ 4\,\text{س} - \frac{1}{2} \text{س}^2 \right]_{0}^{4}$

$= \pi \, ( 16 - 8 ) = 8\,\pi$ وحدة مكعبة

ثانياً : الدوران حول محور الصادات

$\text{س} = 4 - \text{ص}^2$ ، عندما : $\text{س} = 0$ . فإن : $\text{ص} = 2$

، و المنطقة محددة بالمستقيم : $\text{س} = 0$ .

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{0}^{2} \text{س}^2 \, \text{ء ص} = \pi \int_{0}^{2} ( 4 - \text{ص}^2 )^2 \, \text{ء ص}$

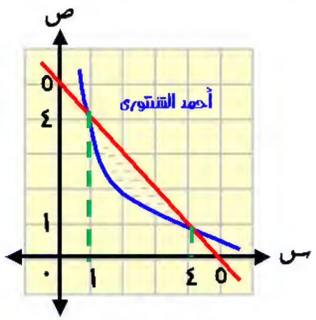
$= \pi \int_{0}^{2} ( 16 - 8\,\text{ص}^2 + \text{ص}^4 ) \, \text{ء ص}$

$= \pi \left[ 16\,\text{ص} - \frac{8}{3} \text{ص}^3 + \frac{1}{5} \text{ص}^5 \right]_{0}^{2}$

$= \pi \left[ \left( 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) - 0 \right] = \frac{256}{15} \pi$ وحدة مكعبة

**(١٥)** أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :
$\text{ص} = \frac{4}{\text{س}}$ و المستقيم : $\text{س} + \text{ص} = 5$ دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**




∵ الدوران حول محور السينات

$\therefore \text{ص}_1 = \frac{4}{\text{س}} = 4\,\text{س}^{-1}$ ، $\text{ص}_2 = 5 - \text{س}$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$ و ينتج :

$\text{س}^2 - 5\,\text{س} + 4 = 0$

$\therefore ( \text{س} - 1 )( \text{س} - 4 ) = 0$

$\therefore \text{س} = 1$ ، $\text{س} = 4$ " لاحظ : نقط التقاطع من الشكل المقابل "

، $\because \text{ص}_2 \geq \text{ص}_1$    $\therefore \text{ح} = \pi \int_{1}^{4} [ (\text{ص}_2)^2 - (\text{ص}_1)^2 ] \, \text{ء س}$

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{1}^{4} [ ( 5 - \text{س} )^2 - ( 4\,\text{س}^{-1} )^2 ] \, \text{ء س}$

$= \pi \int_{1}^{4} ( 25 - 10\,\text{س} + \text{س}^2 - 16\,\text{س}^{-2} ) \, \text{ء س}$

$= \pi \left[ 25\,\text{س} - 5\,\text{س}^2 + \frac{1}{3} \text{س}^3 + 16\,\text{س}^{-1} \right]_{1}^{4}$

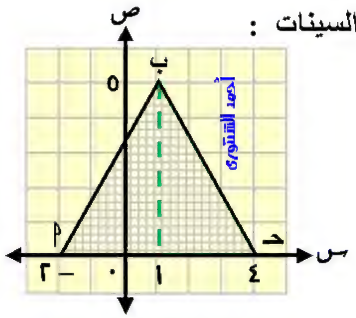
$= \pi \left[ \left( 100 - 80 + \frac{64}{3} + 4 \right) - \left( 25 - 5 + \frac{1}{3} + 16 \right) \right]$

$= \frac{1}{3} \pi \, ( 136 - 109 ) = 9\,\pi$ وحدة مكعبة

**(١٦)** إذا كانت النقط أ ( −٢ ، ٠ ) ، ب ( ١ ، ٥ ) ، حـ ( ٤ ، ٠ ) رؤوس مثلث أ ب حـ فأوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب حـ دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**

الجسم الناشئ يتكون من منطقتين تقعان فوق محور السينات :




الأولى تحت $\overleftrightarrow{أب}$ فى $[-٢ ، ١]$ ،

الثانية تحت $\overleftrightarrow{ب حـ}$ فى $[١ ، ٤]$ حيث :

معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى : $\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٠ - ٣}{-٢ - ١}$

$\therefore ص_١ = \frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣}$

معادلة $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هى : $\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{٠ - ٣}{٤ - ١}$

$\therefore ص_٢ = -\frac{٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣}$

$\therefore ح = \pi \int_{-٢}^{١} (ص_١)^٢ \, ءس + \pi \int_{١}^{٤} (ص_٢)^٢ \, ءس$

$\therefore ح = \pi \int_{-٢}^{١} (\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣})^٢ \, ءس + \pi \int_{١}^{٤} (-\frac{٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣})^٢ \, ءس$

$= \pi \left[\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٥} (\frac{٥}{٣} س + \frac{١٠}{٣})^٣\right]_{-٢}^{١}$

$+ \pi \left[\frac{١}{٣} \times -\frac{٣}{٥} (-\frac{٥}{٣} س + \frac{٢٠}{٣})^٣\right]_{١}^{٤}$

$= \frac{١}{٥} \pi (١٢٥ - ٠) - \frac{١}{٥} \pi (٠ - ١٢٥)$

$= ٥٠ \pi$ وحدة مكعبة

## حل تمارين عامة صفحة ١٣٤ بالكتاب المدرسى

**أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة**

**(١)** إذا كان : $د(س) = \int (٣ س^٢ - ٥) \, ءس$ ، و كان :

$د(٢) = ٣$ فإن : $د(-٢) = ....$

(أ) $-٦$ (ب) $-٣$ (حـ) $٧$ (ء) $١٢$

**(٢)** إذا كان : $\frac{ءص}{ءس} = س + \frac{١}{س}$ ، $ص = \frac{١}{٢}$ عند $س = ١$

، فعندما $س = هـ$ تكون : $ص = ....$

(أ) $هـ^٢ - هـ$ (ب) $\frac{١}{٢} (هـ^٢ - ١)$

(حـ) $\frac{١}{٤} (هـ^٢ + ١)$ (ء) $\frac{١}{٢} هـ^٢ + ١$

**(٣)** $\int طا^٢ س \, ءس = ....$

(أ) $طا س - س + ث$ (ب) $طا س + س + ث$

(حـ) $قا^٤ س + ث$ (ء) $\frac{١}{٣} طا^٣ س + ث$

**(٤)** إذا كان : $\int_{٢}^{٥} د(س) \, ءس = ٤$ فإن :

$\int_{٢}^{٥} [٣ د(س) - ١] \, ءس = ....$

(أ) $٩$ (ب) $١١$ (حـ) $١٢$ (ء) $-٨$

**(٥)** حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

$د(س) = س^٢$ و محور السينات و المستقيمين : $س = -٢$ ،

$س = ٢$ دورة كاملة حول محور السينات يساوى ....

(أ) $\frac{١٦}{٥} \pi$ (ب) $\frac{٣٢}{٥} \pi$ (حـ) $\frac{٦٤}{٥} \pi$ (ء) $٤ \pi$

الحل

(١) $د(س) = \int (٣ س^٢ - ٥) ء س = س^٣ - ٥ س + ث$

، ∵ $د(٢) = ٣$ ∴ $٣ = ٨ - ١٠ + ث$ و منها : $ث = ٥$

∴ $د(س) = س^٣ - ٥ س + ٥$

، $د(-٢) = -٨ + ١٠ + ٥ = ٧$

(٢) $ص = \int (س + س^{-١}) ء س = \frac{١}{٢} س^٢ + لو_{هـ} س + ث$

، ∵ $ص = \frac{١}{٢}$ عند $س = ١$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + لو_{هـ} ١ + ث$

، منها : ث = صفر ∴ $ص = \frac{١}{٢} س^٢ + لو_{هـ} س$

، $س = هـ$ ∴ $ص = \frac{١}{٢} هـ^٢ + لو_{هـ} هـ = \frac{١}{٢} هـ^٢ + ١$

(٣) $\int طا^٢ س ء س = \int (قا^٢ س + ١) ء س = طا س - س + ث$

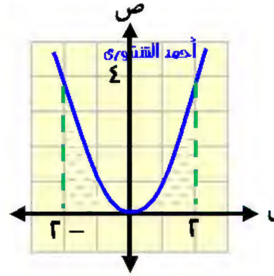
(٤) المقدار $= ٣ \int_{٢}^{٥} د(س) ء س - \int_{٢}^{٥} ء س = ٣ \times ٤ - [س]_{٢}^{٥}$

$= ١٢ - (٥ - ٢) = ٩$

(٥) $ع = \pi \int_{-٢}^{٠} س^٤ ء س + \pi \int_{٠}^{٢} س^٤ ء س$

$= \pi \left[\frac{١}{٥} س^٥\right]_{-٢}^{٠} + \pi \left[\frac{١}{٥} س^٥\right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٥} \pi (٠ + ٣٢) + \frac{١}{٥} \pi (٣٢ + ٠) = \frac{٦٤}{٥} \pi$




أوجد تفاضلى كل من :

(٦) $ص = ٣ س^٢ - ١$ (٧) $ص = \sqrt{(٢ س + ٣)^٥}$

(٨) $ص = (س + \frac{١}{س})^٢$ (٩) $ص = هـ^{-٥ س}$

(١٠) $ص = هـ^{س^٢ + ٣ س}$ (١١) $ص = هـ^{حتا ٢ س}$

(١٢) $ع = لو_{هـ} (س^٢ + ١)$ (١٣) $ع = لو_{هـ} (\frac{١٠}{س})^٢$

(١٤) $ع = لو_{هـ} طتا (٣ س - ١)$

الحل

(٦) ∵ $ص = ٣ س^٢ - ١$ ∴ $ء ص = ٦ س ء س$

(٧) ∵ $ص = (٢ س + ٣)^{\frac{٥}{٢}}$

∴ $ء ص = \frac{٥}{٢} \times ٢ (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} ء س = ٥ (٢ س + ٣)^{\frac{٣}{٢}} ء س$

(٨) ∵ $ص = (س + س^{-١})^٣$

∴ $ء ص = ٣ (س + س^{-١})^٣ (١ - س^{-٢}) ء س$

$= ٣ (س + \frac{١}{س})^٣ (١ - \frac{١}{س^٢}) ء س$

(٩) ∵ $ص = هـ^{-٥ س}$ ∴ $ء ص = -٥ هـ^{-٥ س} ء س$

(١٠) ∵ $ص = هـ^{س^٢ + ٣ س}$ ∴ $ء ص = (٢ س + ٣) هـ^{س^٢ + ٣ س} ء س$

(١١) ∵ $ص = هـ^{حتا ٢ س}$ ∴ $ء ص = -٢ حا ٢ س هـ^{حتا ٢ س} ء س$

(١٢) ∵ $ع = لو_{هـ} (س^٢ + ١)$ ∴ $ء ع = \frac{٢ س}{س^٢ + ١} ء س$

(١٣) ∵ $ع = لو_{هـ} (\frac{١٠}{س})^٢$

∴ $ء ع = ٢ لو_{هـ} \frac{١٠}{س} \times \frac{س}{١٠} \times \frac{-١٠}{س^٢} ء س = \frac{-٢}{س} لو_{هـ} \frac{١٠}{س} ء س$

(١٤) ∵ $ع = لو_{هـ} طتا (٣ س - ١)$

∴ $ء ع = \frac{١}{طتا (٣ س - ١)} \times - قتا^٢ (٣ س - ١) \times ٣ ء س$

$= -٣ طا (٣ س - ١) قتا^٢ (٣ س - ١) ء س$

عبر عن كل من مما يأتى باستخدام تكامل واحد :

(١٥) $\int^{٥} س^٢ ء س + \int_{-٢} س^٢ ء س$

(١٦) $\int_{-٤}^{-١} \sqrt{س+٦}\ ء س - \int_{٤}^{-١} \sqrt{س+٦}\ ء س$

(١٧) $\int_{٢}^{٦} ك\ ء س + \int_{٣}^{٢} ك\ ء س$

(١٨) $\int_{٠}^{٤} ٢س^{٢}\ ء س + \int_{٤}^{٥} ٢س^{٢}\ ء س$

**الحل**

(١٥) المقدار = $\int_{-٢}^{٠} س^{٢}\ ء س + \int_{٠}^{٥} س^{٢}\ ء س = \int_{-٢}^{٥} س^{٢}\ ء س$

(١٦) المقدار = $\int_{-٤}^{-١} \sqrt{س+٦}\ ء س + \int_{-١}^{٤} \sqrt{س+٦}\ ء س$

$= \int_{-٤}^{٤} \sqrt{س+٦}\ ء س$

(١٧) المقدار = $\int_{٢}^{٣} ك\ ء س + \int_{٣}^{٦} ك\ ء س + \int_{٣}^{٢} ك\ ء س$

$= \int_{٢}^{٣} ك\ ء س + \int_{٣}^{٦} ك\ ء س - \int_{٢}^{٣} ك\ ء س = \int_{٣}^{٦} ك\ ء س$

(١٨) ∵ د(س) = ٢س² دالة زوجية

∴ المقدار = $\int_{-٤}^{٤} ٢س^{٢}\ ء س + \int_{٤}^{٥} ٢س^{٢}\ ء س = \int_{-٤}^{٥} ٢س^{٢}\ ء س$

أجب عن مما يأتى :

(١٩) إذا كان : $\int_{٢}^{٤} د(س)\ ء س = ٥$ ، $\int_{٢}^{٤} ر(س)\ ء س = -٣$

فأوجد : (أ) $\int_{٢}^{٤} ٣\ د(س)\ ء س$  (ب) $\int_{٤}^{٢} ٢\ ر(س)\ ء س$

(حـ) $\int_{٢}^{٤} [\ ٣\ د(س) - ٢\ ر(س)\ ]\ ء س$

(ء) $\int_{٢}^{٤} [\ ٣\ ر(س) + ٤\ س\ ]\ ء س$

(٢٠) إذا كان : د″(س) = ٦ س − ٤ ، د′( ١ ) = ٢ ، د ( ٠ ) = − ٤ فأوجد : د (س)

**الحل**

(١٩) (أ) المقدار = $٣ \int_{٢}^{٤} د(س)\ ء س = ٣ \times ٥ = ١٥$

(ب) المقدار = $-٢ \int_{٢}^{٤} ر(س)\ ء س = -٢ \times -٣ = ٦$

(حـ) المقدار = $٣ \int_{٢}^{٤} د(س)\ ء س - ٢ \int_{٢}^{٤} ر(س)\ ء س$

$= ٣ \times ٥ - ٢ \times -٣ = ١٥ + ٦ = ٢١$

(ء) المقدار = $٣ \int_{٢}^{٤} ر(س)\ ء س + ٤ \int_{٢}^{٤} س\ ء س$

$= ٣ \times -٣ + ٤ \left[ \frac{١}{٢} س^{٢} \right]_{٢}^{٤}$

$= -٩ + ٤ \times \frac{١}{٢} ( ١٦ - ٤ ) = -٩ + ٢٤ = ١٥$

(٢٠) ∵ د″(س) = ٦ س − ٤

∴ د′(س) = $\int ( ٦ س - ٤ )\ ء س = ٣ س^{٢} - ٤ س + ث$

، ∵ د′( ١ ) = ٢ ∴ ٢ = ٣ − ٤ + ث و منها : ث = ٣

∴ د′(س) = ٣ س² − ٤ س + ٣

∴ د(س) = $\int ( ٣ س^{٢} - ٤ س + ٣ )\ ء س$

= س³ − ٢ س² + ٣ س + ث′

، ∵ د ( ٠ ) = − ٤ ∴ − ٤ = ث′

∴ د(س) = س³ − ٢ س² + ٣ س − ٤

أوجد التكاملات المحددة التالية :

(٢١) $\int_{٢}^{٤} \left( س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} \right) ء س$  (٢٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٦ - س^{٤}}{٢ س^{٢}}\ ء س$

(٢٣) $\int_{١}^{٤} \frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١}\ ء س$  (٢٤) $\int_{-١}^{١} \frac{س - ١}{\sqrt[٣]{س} - ١}\ ء س$

(٢٥) $\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - \text{س}^2}\ \text{ءس}$ (٢٦) $\int_{0}^{2} \sqrt{4 - \text{س}^2}\ \text{ءس}$

الحل

(٢١) المقدار $= \int_{2}^{4} (\text{س}^2 + \text{س}^{-2})\ \text{ءس} = \left[ \frac{1}{3}\text{س}^3 - \text{س}^{-1} \right]_{2}^{4}$

$= \left( \frac{64}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{227}{12}$

(٢٢) المقدار $= \int_{1}^{3} (3\text{س}^{-2} - \frac{1}{2}\text{س}^2)\ \text{ءس} = \left[ -3\text{س}^{-1} - \frac{1}{6}\text{س}^3 \right]_{1}^{3}$

$= \left( -1 - \frac{9}{2} \right) - \left( -3 - \frac{1}{6} \right) = -\frac{7}{3}$

(٢٣) المقدار $= \int_{1}^{4} \frac{(\sqrt{\text{س}} - 1)(\sqrt{\text{س}} + 1)}{\sqrt{\text{س}} - 1}\ \text{ءس} = \int_{1}^{4} (\sqrt{\text{س}} + 1)\ \text{ءس}$

$= \int_{1}^{4} (\text{س}^{\frac{1}{2}} + 1)\ \text{ءس} = \left[ \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{س} \right]_{1}^{4}$

$= \left( \frac{16}{3} + 4 \right) - \left( \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{23}{3}$

(٢٤) المقدار $= \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt[3]{\text{س}} + 2)(\sqrt[3]{\text{س}^2} - 2\sqrt[3]{\text{س}} + 4)}{\sqrt[3]{\text{س}} + 2}\ \text{ءس}$

$= \int_{-1}^{1} (\text{س}^{\frac{2}{3}} - 2\text{س}^{\frac{1}{3}} + 4)\ \text{ءس}$

$= \left[ \frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}} - 2 \times \frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} + 4\text{س} \right]_{-1}^{1}$

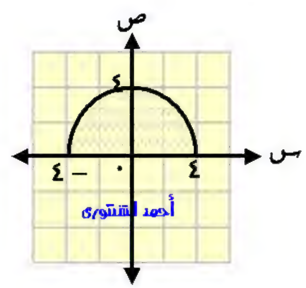
$= \left( \frac{3}{5} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left( -\frac{3}{5} - \frac{3}{2} - 4 \right) = \frac{46}{5}$

(٢٥) بوضع : $\text{ص} = \sqrt{16 - \text{س}^2}$

$\therefore \text{ص}^2 = 16 - \text{س}^2$ و هى معادلة دائرة طول نصف قطرها ٤ وحدات طول

$\therefore$ المقدار $= \frac{1}{2}$ مساحة هذه الدائرة

$= \frac{1}{2} \times 16\pi = 8\pi$



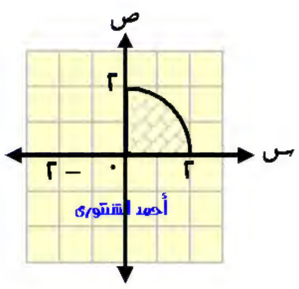

(٢٦) بوضع : $\text{ص} = \sqrt{4 - \text{س}^2}$

$\therefore \text{ص}^2 = 4 - \text{س}^2$

و هى معادلة دائرة طول نصف قطرها ٢ وحدات طول

$\therefore$ المقدار $= \frac{1}{4}$ مساحة هذه الدائرة

$= \frac{1}{4} \times 4\pi = \pi$




باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الآتية :

(٢٧) $\int \text{س} (\text{س} - 5)^3\ \text{ءس}$ (٢٨) $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}}(1 + \sqrt{\text{س}})^3}$

(٢٩) $\int \text{س} \ \text{قا}^2\text{س} (\text{س}^2 + 3)\ \text{ءس}$ (٣٠) $\int \text{قا}^4\text{س} \ \text{طا س}\ \text{ءس}$

(٣١) $\int \text{س} \ \text{ه}^{\text{س}^2 + 3}\ \text{ءس}$ (٣٢) $\int \frac{\text{ه}^{2\text{س}} + \text{س}}{\text{ه}^{2\text{س}} + \text{س}^2}\ \text{ءس}$

الحل

(٢٧) بوضع : $\text{ص} = \text{س} - 5 \quad \therefore \text{س} = \text{ص} + 5 \ ، \ \text{ءس} = \text{ءص}$

، المقدار $= \int (\text{ص} + 5)\text{ص}^3\ \text{ءص} = \int (\text{ص}^4 + 5\text{ص}^3)\ \text{ءص}$

$= \frac{1}{5}\text{ص}^5 + \frac{5}{4}\text{ص}^4 + \text{ث} = \frac{1}{20}\text{ص}^4 (4\text{ص} + 25) + \text{ث}$

$= \frac{1}{20}(\text{س} - 5)^4 (4\text{س} - 20 + 25) + \text{ث}$

$= \frac{1}{20}(\text{س} - 5)^4 (4\text{س} + 5) + \text{ث}$

(٢٨) بوضع : $\text{ص} = 1 + \sqrt{\text{س}} \quad \therefore \text{ءص} = \frac{\text{ءس}}{2\sqrt{\text{س}}}$

، المقدار $= 2\int \frac{1}{(1 + \sqrt{\text{س}})^3} \times \frac{\text{ءس}}{2\sqrt{\text{س}}} = 2\int \frac{1}{\text{ص}^3}\ \text{ءص}$

$= 2 \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{ص}^2} + \text{ث} = \frac{-1}{(1 + \sqrt{\text{س}})^2} + \text{ث}$

**(٢٩)** بوضع : $ص = س^{٢} + ٣$      ∴ $ءص = ٢س\ ءس$

، المقدار $= \frac{١}{٢} \int قا^{٢}(س^{٢}+٣)(٢س\ ءس)$

$= \frac{١}{٢} \int قا^{٢} ص\ ءص = \frac{١}{٢} طا\ ص + ث$

$= \frac{١}{٢} طا(س^{٢}+٣) + ث$

**(٣٠)** بوضع : $ص = قا^{٤} س$      ∴ $ءص = ٤ قا^{٤} س\ طا\ س\ ءس$

، المقدار $= \frac{١}{٤} \int ٤ قا^{٤} س\ طا\ س\ ءس = \frac{١}{٤} \int ءص$

$= \frac{١}{٤} ص + ث = \frac{١}{٤} قا^{٤} س + ث$

**(٣١)** بوضع : $ص = ه^{س^{٢}+٣}$      ∴ $ءص = ٢س\ ه^{س^{٢}+٣} ءس$

، المقدار $= \frac{١}{٢} \int ٢س\ ه^{س^{٢}+٣} ءس = \frac{١}{٢} \int ءص$

$= \frac{١}{٢} ص + ث = \frac{١}{٢} ه^{س^{٢}+٣} + ث$

**(٣٢)** بوضع : $ص = ه^{٢س} + س^{٢}$      ∴ $ءص = ٢(ه^{٢س} + س)\ ءس$

، المقدار $= \frac{١}{٢} \int \frac{٢(ه^{٢س}+س)\ ءس}{ه^{٢س}+س^{٢}} = \frac{١}{٢} \int \frac{ءص}{ص}$

$= \frac{١}{٢} لو_{ه} |ص| + ث = \frac{١}{٢} لو_{ه} |ه^{٢س}+س^{٢}| + ث$

**باستخدام التجزئ المناسب أوجد التكاملات الآتية :**

**(٣٣)** $\int ٣س \sqrt{٢س+٣}\ ءس$

**(٣٤)** $\int س^{٤} لو_{ه} س\ ءس$      **(٣٥)** $\int_{١}^{٢} ٤س\ ه^{٢س} ءس$

الحل

**(٣٣)** نفرض أن : $ص = ٣س$ ، $ءع = (٢س+٣)^{\frac{١}{٢}} ءس$

∴ $ءص = ٣\ ءس$ ، $ع = \frac{١}{٣}(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}$

، المقدار $= ٣ \times \frac{١}{٣}(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}} - \int ٣ \times \frac{١}{٣}(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}} ءس$

$= (٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٥}(٢س+٣)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٥}(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}(٥س - ٢س - ٣) + ث$

$= \frac{١}{٥}(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}}(٣س - ٣) + ث$

$= \frac{٣}{٥}(س - ١)(٢س+٣)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

**(٣٤)** نفرض أن : $ص = لو_{ه} س$ ، $ءع = س^{٤} ءس$

∴ $ءص = \frac{١}{س} ءس$ ، $ع = \frac{١}{٥} س^{٥}$

، المقدار $= \frac{١}{٥} س^{٥} لو_{ه} س - \frac{١}{٥} \int س^{٤} ءس$

$= \frac{١}{٥} س^{٥} لو_{ه} س - \frac{١}{٢٥} س^{٥} + ث$

$= \frac{١}{٢٥} س^{٥}(٥ لو_{ه} س - ١) + ث$

**(٣٥)** نفرض أن : $ص = ٤س$ ، $ءع = ه^{٢س} ءس$

∴ $ءص = ٤\ ءس$ ، $ع = \frac{١}{٢} ه^{٢س}$

، المقدار $= ٤س \times \frac{١}{٢} ه^{٢س} - ٤ \times \frac{١}{٢} \int ه^{٢س} ءس$

$= ٢س\ ه^{٢س} - ٢ \times \frac{١}{٢} ه^{٢س} + ث$

$= ه^{٢س}(٢س - ١) + ث$

أجب عن ما يلى :

**(٣٦)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

ص = ٧ + ٢ س – $س^{٢}$ ، ص = $(س - ١)^{٢}$

**(٣٧)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

ص = ٩ – $س^{٢}$ ، ص = $س^{٢}$ + ١ و المستقيمين :

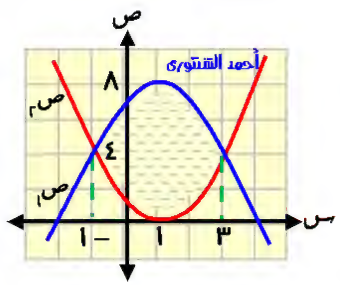
س = ٠ ، س = ٣

**(٣٨)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

ص = ٩ – $س^{٢}$ ، ص = $س^{٢}$ + ١ و محور السينات و

المستقيمين : س = ٠ ، س = ٣

**الحل**




**(٣٦)** بفرض أن : $ص_{١}$ = ٧ + ٢ س – $س^{٢}$ ،

$ص_{٢}$ = $(س - ١)^{٢}$ = $س^{٢}$ – ٢ س + ١

نضع : $ص_{١}$ = $ص_{٢}$

∴ ٧ + ٢ س – $س^{٢}$ = $س^{٢}$ – ٢ س + ١

و منها : $س^{٢}$ – ٢ س – ٣ = ٠ ∴ ( س – ٣ ) ( س + ١ ) = ٠

∴ س = ٣ ، س = – ١ ، ∵ $ص_{١}$ ≥ $ص_{٢}$

∴ م = $\int_{-١}^{٣}$ ( $ص_{١}$ – $ص_{٢}$ ) ء س

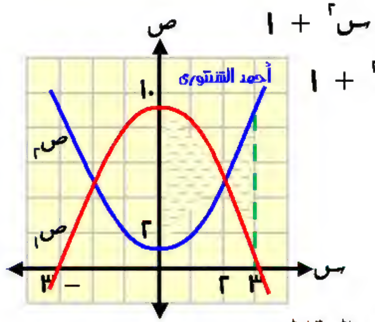
= $\int_{-١}^{٣}$ ( ٧ + ٢ س – $س^{٢}$ – $س^{٢}$ + ٢ س – ١ ) ء س

= $\int_{-١}^{٣}$ ( ٦ + ٤ س – ٢ $س^{٢}$ ) ء س

= $[$ ٦ س + ٢ $س^{٢}$ – $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ $]_{-١}^{٣}$

= ( ١٨ + ١٨ – ١٨ ) – ( – ٦ + ٢ – $\frac{٢}{٣}$ ) = $\frac{٦٤}{٣}$ وحدة مربعة

**(٣٧)** بفرض أن : $ص_{١}$ = ٩ – $س^{٢}$ ، $ص_{٢}$ = $س^{٢}$ + ١




نضع : $ص_{١}$ = $ص_{٢}$ ∴ ٩ – $س^{٢}$ = $س^{٢}$ + ١

و منها : $س^{٢}$ – ٤ = ٠

∴ س = ٢ ، س = – ٢ " مرفوض "

لأن : المنطقة محددة بالمستقيمين : س = ٠

، س = ٣ و بالتالى : فهى تنقسم إلى

الفترتين [ ٠ ، ٢ ] ، [ ٢ ، ٣ ] كما بالشكل المقابل

، ∵ $ص_{١}$ ≥ $ص_{٢}$ فى [ ٠ ، ٢ ] ، $ص_{٢}$ ≥ $ص_{١}$ فى [ ٢ ، ٣ ]

∴ م = $\int_{٠}^{٢}$ ( $ص_{١}$ – $ص_{٢}$ ) ء س + $\int_{٢}^{٣}$ ( $ص_{٢}$ – $ص_{١}$ ) ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ( ٩ – $س^{٢}$ – $س^{٢}$ – ١ ) ء س

+ $\int_{٢}^{٣}$ ( $س^{٢}$ + ١ – ٩ + $س^{٢}$ ) ء س

= $\int_{٠}^{٢}$ ( ٨ – ٢ $س^{٢}$ ) ء س + $\int_{٢}^{٣}$ ( ٢ $س^{٢}$ – ٨ ) ء س

= $[$ ٨ س – $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ $]_{٠}^{٢}$ + $[$ $\frac{٢}{٣}$ $س^{٣}$ – ٨ س $]_{٢}^{٣}$

= [ ( ١٦ – $\frac{١٦}{٣}$ ) – ٠ ] + [ ( ١٨ – ٢٤ ) – ( $\frac{١٦}{٣}$ – ١٦ ) ]

= $\frac{٤٦}{٣}$ وحدة مربعة

**(٣٨)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :

ص = ٩ – $س^{٢}$ ، ص = $س^{٢}$ + ١ و محور السينات و

المستقيمين : س = ٠ ، س = ٣

**الحل**

بفرض أن : $ص_١ = ٩ - س^٢$ ، $ص_٢ = س^٢ + ١$

نضع : $ص_١ = ص_٢$ ∴ $٩ - س^٢ = س^٢ + ١$

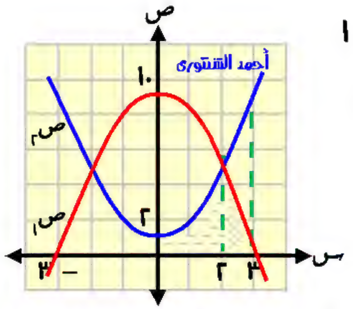
و منها : $س^٢ - ٤ = ٠$ .

∴ $س = ٢$ ، $س = -٢$ " مرفوض "

لأن : المنطقة محددة بمحور السينات ،

و المستقيمين : $س = ٠$ ، $س = ٣$

و بالتالى : فهى تنقسم إلى الفترتين [ ٠ ، ٢ ] ، [ ٢ ، ٣ ] كما بالشكل المقابل




$$∴ م = \int_{٠}^{٢} ص_٢ \, ء س + \int_{٢}^{٣} ص_١ \, ء س$$

$$= \int_{٠}^{٢} (س^٢ + ١) \, ء س + \int_{٢}^{٣} (٩ - س^٢) \, ء س$$

$$= \left[ \tfrac{١}{٣} س^٣ + س \right]_{٠}^{٢} + \left[ ٩ س - \tfrac{١}{٣} س^٣ \right]_{٢}^{٣}$$

$$= \left[ \left( \tfrac{٨}{٣} + ٢ \right) - ٠ \right] + \left[ (٢٧ - ٩) - \left( ١٨ - \tfrac{٨}{٣} \right) \right]$$

$$= \tfrac{٢٢}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

**(٣٩)** أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

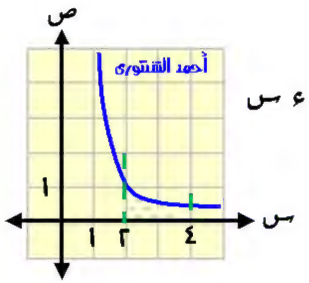
$ص = \frac{١}{س - ١}$ و المستقيمين : $س = ٢$ ، $س = ٤$

و محور السينات دورة كاملة :

(أ) حول محور السينات (ب) حول محور الصادات

الحل

(أ) الدوران حول محور السينات




$$ح = π \int_{٢}^{٤} ص^٢ \, ء س = π \int_{٢}^{٤} (س - ١)^{-٢} \, ء س$$

$$= π \left[ -(س - ١)^{-١} \right]_{٢}^{٤}$$

$$= - π \left( \tfrac{١}{٣} - ١ \right) = \tfrac{٢}{٣} π \text{ وحدة مكعبة}$$

(ب) الدوران حول محور الصادات

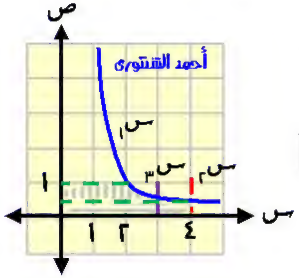
عندما : $س = ٢$ فإن : $ص = ١$ ، عندما : $س = ٤$ فإن : $ص = \frac{١}{٣}$

، ∵ $ص = (س - ١)^{-١}$ ∴ $س = ص^{-١} + ١$

بفرض أن : $س_١ = ص^{-١} + ١$ ، $س_٢ = ٤$

، $س_٣ = ٢$ ، ∵ $س_٣ < س_٢$ فى $[ ٠ ، \frac{١}{٣} ]$

، $س_١ \le س_٣$ فى $[ \frac{١}{٣} ، ١ ]$




$$∴ ح = π \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} \left[ (س_٢)^٢ - (س_٣)^٢ \right] ء ص$$

$$+ π \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left[ (س_١)^٢ - (س_٣)^٢ \right] ء ص = π \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (١٦ - ٤) \, ء ص$$

$$+ π \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left[ (ص^{-١} + ١)^٢ - ٤ \right] ء ص$$

$$= π \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} ١٢ \, ء ص + π \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left[ ص^{-٢} + ٢ ص^{-١} - ٣ \right] ء ص$$

$$= ١٢ π \left[ ص \right]_{٠}^{\frac{١}{٣}} + π \left[ - ص^{-١} + ٢ \text{ لو}_{هـ} ص - ٣ ص \right]_{\frac{١}{٣}}^{١}$$

$$= ١٢ π \left( \tfrac{١}{٣} - ٠ \right) + π \left[ (-١ + ٢ \text{ لو}_{هـ} ١ - ٣) - \right.$$

$$\left. \left( -٣ + ٢ \text{ لو}_{هـ} \tfrac{١}{٣} - ١ \right) \right]$$

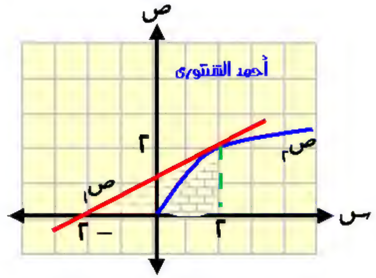
$$= ٤ π + π \left[ (-٤ + ٠) - (-٤ - ٢ \text{ لو}_{هـ} ٣) \right]$$

$$= ( ٤ π + ٢ \text{ لو}_{هـ} ٣ ) \text{ وحدة مكعبة}$$

**(٤٠)** أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

$ص = \sqrt{٢ س}$ و محور السينات و المماس للمنحنى عند النقطة ( ٢ ، ٢ ) الواقعة عليه عندما تدور هذه المنطقة دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**




∵ ص = $(\text{٢ س})^{\frac{1}{2}}$

∴ ص/ = $\frac{1}{2}$ × ٢ $(\text{٢ س})^{-\frac{1}{2}}$ = $(\text{٢ س})^{-\frac{1}{2}}$

∴ ميل المماس عند النقطة ( ٢ ، ٢ )

= $(\text{٤})^{-\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{2}$

∴ ميل المماس عند هذه النقطة هى :

ص − ٢ = $\frac{1}{2}$ ( س − ٢ ) أى : ص = $\frac{1}{2}$ س + ١

∴ المماس يقطع محور السينات عند النقطة ( − ٢ ، ٠ )

بفرض أن : ص١ = $\frac{1}{2}$ س + ١ ، ص٢ = $(\text{٢ س})^{\frac{1}{2}}$

، ∵ ص١ ≥ ص٢ فى [ ٠ ، ٢ ]

∴ ح = $\pi \int_{-2}^{0}$ ( ص١ )² ء س + $\pi \int_{0}^{2}$ [ ( ص١ )² − ( ص٢ )² ] ء س

= $\pi \int_{-2}^{0}$ ( $\frac{1}{4}$ س² + س + ١ ) ء س

+ $\pi \int_{0}^{2}$ ( $\frac{1}{4}$ س² − س + ١ ) ء س

= $\pi$ [ $\frac{1}{12}$ س³ + $\frac{1}{2}$ س² + س $]_{-2}^{0}$

+ $\pi$ [ $\frac{1}{12}$ س³ − $\frac{1}{2}$ س² + س $]_{0}^{2}$

= $\pi$ [ ٠ − ( − $\frac{2}{3}$ + ٢ − ٢ ) ]

+ $\pi$ [ ( $\frac{2}{3}$ − ٢ + ٢ ) − ٠ ] = $\frac{4}{3}\pi$ وحدة مكعبة

## حل اختبار تراكمى صفحة ١٣٦ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) $\int$ ( ٤ − قتا س طتا س ) ء س = ....

(أ) ٤ س − قتا س + ث  (ب) ٤ س + قتا س + ث

(حـ) ٤ س − طتا س + ث  (ء) ٤ س + طتا س + ث

(٢) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - 3}$ ء س = ....

(أ) − $\frac{1}{2}$ ( هـ^س − ٣ ) + ث  (ب) − لوهـ | هـ^س − ٣ | + ث

(حـ) لوهـ | هـ^س − ٣ | + ث  (ء) $\frac{1}{2}$ لوهـ | هـ^س − ٣ | + ث

(٣) $\int_{0}^{2}$ ( ٢ − | س | ) ء س = ....

(أ) ٢  (ب) ٤  (حـ) ١  (ء) صفر

(٤) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى : ص = $\sqrt{\text{٤ − س}^2}$ و محور السينات مقدرة بالوحدات المربعة = ....

(أ) ٢  (ب) ٤  (حـ) ٢ $\pi$  (ء) ٤ $\pi$

(٥) إذا كان : $\int_{1}^{3}$ د (س) ء س = ٥ ، $\int_{3}^{1}$ ر (س) ء س = ٧

فأن : $\int_{1}^{3}$ [ ٤ د (س) + ر (س) + ٣ ] ء س = ....

(أ) − ١٢  (ب) − ٧  (حـ) ١٩  (ء) ١٩

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى :

ص = $\frac{2}{\text{س}}$ و المستقيمات : س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠

دورة كاملة حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة = ....

(أ) $\frac{١}{٣}\pi$ (ب) $\frac{١}{٢}\pi$ (جـ) $٢\pi$ (د) $٣\pi$

**الحل**

(١) المقدار $= ٤س - ( - قتا\, س\, طتا\, س ) + ث$

$= ٤س + قتا\, س\, طتا\, س + ث$

(٢) نضع : $ص = هـ^{س} - ٢$ ∴ $ء ص = هـ^{س}\, ء س$

، المقدار $= \int ص^{-١}\, ء ص = لو_{هـ} |ص| + ث = لو_{هـ} |هـ^{س} - ٣| + ث$

(٣) المقدار $= \int_{٠}^{٢} (٢ - س)\, ء س = [٢س - \frac{١}{٢} س^{٢}]_{٠}^{٢}$

$= (٤ - ٢) - ٠ = ٢$

(٤) بوضع : $ص = \sqrt{٤ - س^{٢}}$ ∴ $ص^{٢} = ٤ - س^{٢}$

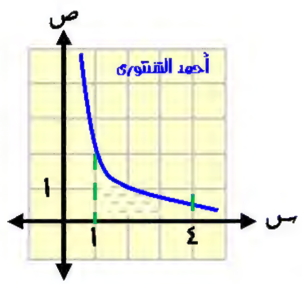
و هى معادلة دائرة طول نصف قطرها ٢ وحدات طول

∴ مساحة المنطقة $= \frac{١}{٢}$ مساحة هذه الدائرة $= \frac{١}{٢} \times ٤\pi = ٢\pi$

(٥) المقدار $= ٤\int_{١}^{٣} د(س)\, ء س + \int_{١}^{٣} ر(س)\, ء س + ٣\int_{١}^{٣} ء س$

$= ٤ \times ٥ - \int_{٣}^{١} ر(س)\, ء س + ٣ [س]_{١}^{٣}$

$= ٢٠ - ٧ + ٣ (٣ - ١) = ١٩$




(٦) ∵ الدوران حول محور السينات ، $ص = ٢ س^{-١}$

∴ $ح = \pi \int_{١}^{٤} (ص)^{٢}\, ء س$

$= \pi \int_{١}^{٤} ٤ س^{-٢}\, ء س$

$= \pi [-٤ س^{-١}]_{١}^{٤}$

$= -٤\pi (-\frac{١}{٤} + ١) = ٣\pi$ وحدة مكعبة

(٧) أوجد التكاملات الآتية :

(أ) $\int \frac{س + ٣}{\sqrt{س^{٢} + ٦ س}}\, ء س$ (ب) $\int س^{٢} \sqrt{س - ٣}\, ء س$

**الحل**

(أ) نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢} + ٦ س$ ∴ $٢ ص\, ء ص = ٢ ( س + ٣ )\, ء س$

∴ $ص\, ء ص = ( س + ٣ )\, ء س$ ، ∵ $ص = \sqrt{س^{٢} + ٦ س}$

∴ المقدار $= \int ء ص = ص + ث = \sqrt{س^{٢} + ٦ س} + ث$

(ب) نفرض أن : $ص^{٢} = س - ٣$ ∴ $٢ ص\, ء ص = ء س$ ، $س = ص^{٢} + ٣$

∴ المقدار $= \int ( ص^{٢} + ٣ )^{٢} \times ص \times ٢ ص\, ء ص$

$= \int ( ص^{٤} + ٦ ص^{٢} + ٩ ) \times ٢ ص^{٢}\, ء ص$

$= ٢ \int ( ص^{٦} + ٦ ص^{٤} + ٩ ص^{٢} )\, ء ص$

$= ٢ ( \frac{١}{٧} ص^{٧} + \frac{٦}{٥} ص^{٥} + ٣ ص^{٣} ) + ث$

$= \frac{٢}{٣٥} ص^{٣} ( ٥ ص^{٤} + ٤٢ ص^{٢} + ١٠٥ ) + ث$

$= \frac{٢}{٣٥} ( س - ٣ )^{\frac{٣}{٢}} [ ٥ ( س - ٣ )^{٢} + ٤٢ ( س - ٣ ) + ١٠٥ ] + ث$

بالفك و الاختصار ينتج :

المقدار $= = \frac{٢}{٣٥} ( س - ٣ )^{\frac{٣}{٢}} ( ٥ س^{٢} + ١٢ س + ٢٤ ) + ث$

(٨) إذا كانت : $د(س) = \int (س + ١)(٢س^{٢} + ٤ س - ١)\, ء س$

، $د(-٢) = ١$ فأوجد : $د(٣)$

**الحل**

$د(س) = \int (٢س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٣ س - ١)\, ء س$

$= \frac{١}{٢} س^{٤} + ٢ س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} - س + ث$ ، ∵ $د(-٢) = ١$

$\therefore$ ١ = ٨ − ١٦ + ٦ + ٢ + ث    و منها : ث = ١

$\therefore$ د(س) = $\frac{١}{٢}$ س$^{٤}$ + ٢ س$^{٣}$ + $\frac{٣}{٢}$ س$^{٢}$ − س + ١

**(٩)** أوجد التكاملات الآتية :

(أ) $\int$ طا س قا$^{٣}$ س ء س    (ب) $\int \sqrt{١ + حا س}$ حتا س ء س

الحل

(أ) $\int$ طا س قا$^{٣}$ س ء س = $\int$ قا$^{٢}$ س قا س طا س ء س

= $\frac{١}{٣}$ قا$^{٣}$ س + ث

(ب) $\int ( ١ + حا س )^{\frac{١}{٢}}$ حتا س ء س = $\frac{٢}{٣} ( ١ + حا س )^{\frac{٣}{٢}}$ + ث

**(١٠)** أوجد التكاملات الآتية :

(أ) $\int$ س$^{٢}$ لو$_{هـ}$ س$^{٢}$ ء س    (ب) $\int$ س هـ$^{٢س^{٢} - ١}$ ء س

الحل

(أ) نضع : ص = لو$_{هـ}$ س$^{٢}$ ، ء ع = س$^{٢}$ ء س

$\therefore$ ء ص = $\frac{٢}{س}$ ء س ، ع = $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$

$\therefore$ المقدار = $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ لو$_{هـ}$ س$^{٢}$ − $\frac{٢}{٣} \int$ س$^{٢}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ لو$_{هـ}$ س$^{٣}$ − $\frac{٢}{٩}$ س$^{٣}$ + ث

= $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ ( لو$_{هـ}$ س$^{٣}$ − $\frac{٢}{٣}$ ) + ث

(ب) المقدار = $\frac{١}{٤} \int$ هـ$^{٢س^{٢} - ١}$ × ٤ س ء س = $\frac{١}{٤}$ هـ$^{٢س^{٢} - ١}$ + ث

**(١١)** أوجد قيمة كل مما يأتى :

(أ) $\int_{-٣}^{٣}$ ( ٢ س$^{٥}$ − ٣ حا $\frac{١}{٢}$ $\pi$ س ) ء س

(ب) $\int_{-٢}^{٢}$ س$^{٢}$ ( ٣ − ٢ | س | ) ء س

الحل

(أ) $\because$ د(س) = ٢ س$^{٥}$ − ٣ حا $\frac{١}{٢}$ $\pi$ س    دالة فردية    $\therefore$ المقدار = صفر

(ب) $\because$ د(س) = س$^{٢}$ ( ٣ − ٢ | س | )    دالة زوجية

$\therefore$ المقدار = ٢ $\int_{٠}^{٢}$ س$^{٢}$ ( ٣ − ٢ س ) ء س

= ٢ $\int_{٠}^{٢}$ ( ٣ س$^{٢}$ − س$^{٣}$ ) ء س = ٢ [ س$^{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ س$^{٤}$ ]$_{٠}^{٢}$

= ٢ [ ( ٨ − ٨ ) − ٠ ] = صفر

**(١٢)** إذا كان : $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ء س = ٨ ، $\int_{٥}^{٢}$ ر(س) ء س = ٣

أحسب قيمة : $\int_{٢}^{٥}$ [ د(س) + ٢ ر(س) − ٥ ] ء س

الحل

المقدار = $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ء س + ٢ $\int_{٢}^{٥}$ ر(س) ء س − ٥ $\int_{٢}^{٥}$ ء س

= ٨ − ٢ $\int_{٥}^{٢}$ ر(س) ء س − ٥ [ س ]$_{٢}^{٥}$

= ٨ − ٢ × ٣ − ٢ ( ٥ − ٢ ) = − ١٣

**(١٣)** أوجد بالوحدات المربعة مساحة المنطقة المحددة بمنحنى :

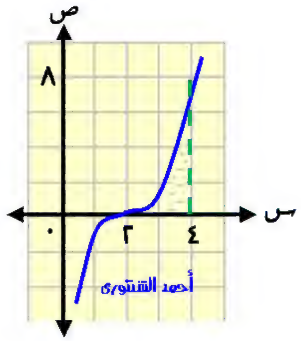
د(س) = ( س − ٢ )$^{٣}$ و محور السينات فى الفترة [ ٢ ، ٤ ]

الحل

م = $\int_{2}^{4} (س - ٢)^{٣}$ ء س

= $\frac{1}{4}$ $[(س - ٢)^{٤}]_{٢}^{٤}$

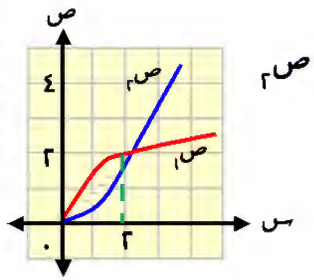
= $\frac{1}{4}$ ( ١٦ − ٠ ) = ٤ وحدة مربعة




**(١٤)** يوضح الشكل المقابل :
المنطقة المحددة بالمنحنيين
$ص_1 = \sqrt{٢ س}$ ، $ص_2 = \frac{1}{2} س^{2}$ أوجد :

(أ) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص_1$ ، $ص_2$

(ب) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص_1$ ، $ص_2$ دورة كاملة حول محور السينات




الحل

من الشكل نجد أن : المنحنيان يتقاطعان عند : س = ٠ ، س = ٢

، $ص_1 \geq ص_2$ فى [ ٠ ، ٢ ]

(أ) م = $\int_{0}^{2} (ص_1 - ص_2)$ ء س = $\int_{0}^{2} (\sqrt{2}\, س^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} س^{2})$ ء س

= $[\sqrt{2} \times \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} س^{3}]_{0}^{2}$

= $(\sqrt{2} \times \frac{2}{3} \times ٢\sqrt{2} - \frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$ وحدة مربعة

(ب) ح = $\pi \int_{0}^{2} [(ص_1)^{2} - (ص_2)^{2}]$ ء س

= $\pi \int_{0}^{2} [٢ س - \frac{1}{4} س^{4}]$ ء س = $\pi\, [س^{2} - \frac{1}{20} س^{5}]_{0}^{2}$

= $\pi\, (٤ - \frac{8}{5}) = \frac{12}{5} \pi$ وحدة مكعبة

## اجابات اختبارات التفاضل و التكامل بالكتاب المدرسى " الخاصة بالتكامل "

### الاختبار الأول

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(٤)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ ( حا س + حتا س ) ء س يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) صفر (ء) $\pi$

الحل

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ ( حا س + حتا س ) ء س = ٢ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ( حا س + حتا س ) ء س

= $[-حتا س + حا س]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ = ( − حتا $\frac{1}{2}\pi$ + حا $\frac{1}{2}\pi$ ) −
( − حتا ٠ + حا ٠ ) = ( − ٠ + ١ ) − ( − ١ + ٠ ) = ٢

**(٥)** إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{3}^{5}$ ٢ د(س) ء س = ٨ ، $\int_{3}^{4}$ ٣ د(س) ء س = ٩ فإن $\int_{4}^{5}$ د(س) ء س = ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (ء) ٥

الحل

∵ $\int_{3}^{5}$ ٢ د(س) ء س = ٨ ∴ ٢ت(٥) − ٢ت(٣) = ٨

∴ ت(٥) − ت(٣) = ٤ و منها : ت(٣) = ت(٥) − ٤ (١)

، ∵ $\int_{3}^{4}$ ٣ د(س) ء س = ٩ ∴ ٣ت(٤) − ٣ت(٣) = ٩

$\therefore$ ت(٤) − ت(٣) = ٣ ، و بالتعويض من (ا) ينتج :

ت(٤) − ت(٥) + ٤ = ٣ $\qquad \therefore$ ت(٤) − ت(٥) = −١

$\therefore$ ت(٥) − ت(٤) = ١ $\qquad \therefore \int_{٤}^{٥} ٥\,د(س)\,ءس = ٥$

**حل آخر**

$\because \int_{٣}^{٥} ٢\,د(س)\,ءس = ٨ \qquad \therefore ٢\int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = ٨$

$\therefore ٢\int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = ٤$ ، بالمثل : $\int_{٣}^{٤} د(س)\,ءس = ٣$

، $\because \int_{٣}^{٥} د(س)\,ءس = \int_{٣}^{٤} د(س)\,ءس + \int_{٤}^{٥} د(س)\,ءس$

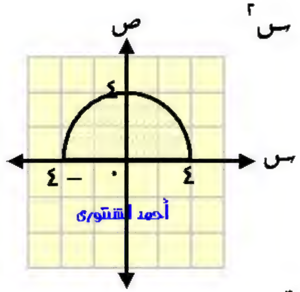
$\therefore ٤ = ٣ + \int_{٤}^{٥} د(س)\,ءس$ و منها : $\int_{٤}^{٥} د(س)\,ءس = ١$

$\therefore \int_{٤}^{٥} ٥\,د(س)\,ءس = ٥ \int_{٤}^{٥} د(س)\,ءس = ٥ \times ١ = ٥$

(٦) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ و محور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى ....

(أ) ١٦ π $\qquad$ (ب) ١٢ π $\qquad$ (جـ) ٨ π $\qquad$ (ء) ٤ π

**الحل**




$\because$ ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ $\qquad$ بالتربيع : ص$^{٢}$ = ١٦ − س$^{٢}$

$\therefore$ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١٦ و هى معادلة دائرة طول نصف قطرها = ٤ وحدات طول فتكون :

مساحتها = ١٦ π وحدات مربعة

$\therefore$ مساحة المنطقة = $\frac{١}{٢}$ مساحة هذه الدائرة

= $\frac{١}{٢} \times ١٦\pi = ٨\pi$ وحدة مربعة

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

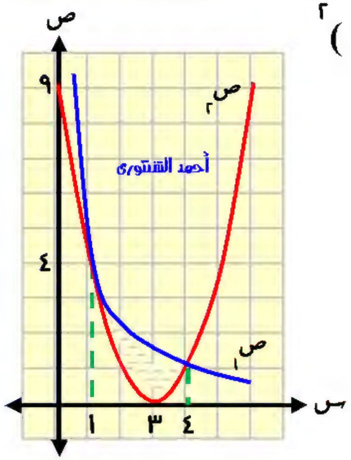
[٢] (أ) أوجد : $\int$ حا س حتا$^{٣}$ س ءس

**الحل**

$\int$ حا س حتا$^{٣}$ س ءس = $-\int$ حتا$^{٣}$ س ( − حا س ) ءس

= $-\int$ حتا$^{٣}$ س ( حتا س )$'$ ءس = $-\frac{١}{٤}$ حتا$^{٤}$ س + ث

[٥] (أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = ( س − ٣ )$^{٢}$ دورة كاملة حول محور السينات




**الحل**

بفرض : ص$_{١}$ = $\frac{٤}{س}$ ، ص$_{٢}$ = ( س − ٣ )$^{٢}$

لايجاد نقط التقاطع نضع : ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

$\therefore$ س ( س − ٣ )$^{٢}$ = ٤

$\therefore$ س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٩ س − ٤ = ٠

$\therefore$ ( س$^{٣}$ − ١ ) − ( ٦ س$^{٢}$ − ٩ س + ٣ ) = ٠

$\therefore$ ( س − ١ ) ( س$^{٢}$ + س + ١ ) − ( س − ١ ) ( ٦ س − ٣ ) = ٠

$\therefore$ ( س − ١ ) ( ( س$^{٢}$ + س + ١ − ٦ س + ٣ ) = ٠

$\therefore$ ( س − ١ ) ( س$^{٢}$ − ٥ س + ٤ ) = ٠

$\therefore$ ( س − ١ ) ( س − ١ ) ( س − ٤ ) = ٠

$\therefore$ س = ١ ، س = ٤ $\qquad$ لاحظ : نقط التقاطع من الشكل

، $\because$ ص$_{١}$ ≤ ص$_{٢}$ لكل : س ∈ [ ١ ، ٤ ]

$\therefore$ ح = $\pi \int_{١}^{٤}$ ( ص$_{١}^{٢}$ − ص$_{٢}^{٢}$ ) ءس

$= \pi \int_{1}^{4} (16 س^{-2} - (س - 3)^4)\, ء س$

$= \pi [ -16 س^{-1} - \frac{1}{5}(س - 3)^5 ]_{1}^{4}$

$= \pi [ (-4 - \frac{1}{5} \times 1) - (-16 - \frac{1}{5} \times -32) ]$

$= \frac{27}{5}\pi$ وحدة مكعبة

## الاختبار الثانى

(٥) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{1}^{2} د(س)\, ء س = 9$ ،

$\int_{6}^{2} د(س)\, ء س = -7$ فإن $\int_{1}^{6} د(س)\, ء س = ....$

(أ) ٢　(ب) ٨　(حـ) ١٦　(ء) – ٦٣

الحل

$\because \int_{1}^{2} د(س)\, ء س = 9$　$\therefore ت(2) - ت(1) = 9$　(١)

، $\because \int_{6}^{2} د(س)\, ء س = -7$　$\therefore ت(2) - ت(6) = -7$　(٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج : ت (٦) – ت (١) = ١٦

$\therefore \int_{1}^{6} د(س)\, ء س = 16$

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى

$ص = \sqrt{س + 1}$ و المستقيمات ص = ٠ ، س = – ١

، س = ١ تساوى ....

(أ) $\pi$　(ب) $\frac{3}{2}\pi$　(حـ) $2\pi$　(ء) $\frac{5}{2}\pi$

الحل

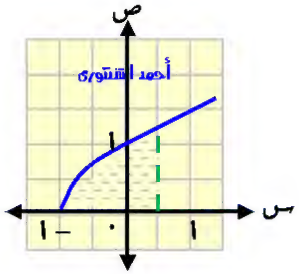
$ع = \pi \int_{-1}^{1} ص^2\, ء س$

$= \pi \int_{-1}^{1} (س + 1)\, ء س$

$= \pi [ \frac{1}{2}س^2 + س ]_{-1}^{1}$

$= \pi [ (\frac{1}{2} + 1) - (\frac{1}{2} - 1) ]$

$= 2\pi$ وحدة مكعبة




ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int س(2س - 1)^3\, ء س$ ،

(٢) $\int س\, هـ^{-2س}\, ء س$

الحل

(١) $\int س(2س - 3)^3\, ء س = \frac{1}{2}\int 2س(2س - 1)^3\, ء س$

$= \frac{1}{2}\int (2س - 1 + 1)(2س - 1)^3\, ء س$

$= \frac{1}{2}\int (2س - 1)^4\, ء س + \frac{1}{2}\int (2س - 1)^3\, ء س$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times (2س - 1)^5 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times (2س - 1)^4 + ث$

$= \frac{1}{20}(2س - 1)^5 + \frac{1}{16}(2س - 1)^4 + ث$

$= \frac{1}{80}(2س - 1)^4 [ 4(2س - 1) + 5 ] + ث$

$= \frac{1}{80}(2س - 1)^4 (8س + 1) + ث$

حل آخر

نضع : ص = ٢ س – ١　$\therefore ء ص = 2\, ء س$

$\therefore ء س = \frac{1}{2}\, ء ص$　، $س = \frac{1}{2}(ص + 1)$

$\therefore$ المقدار $= \int \frac{1}{2}(ص + 1) \times ص^3 \times \frac{1}{2}\, ء ص$

$= \frac{1}{4}\int (ص^4 + ص^3)\, ء ص = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}ص^5 + \frac{1}{4}ص^4\right] + ث$

$= \frac{1}{20}ص^5 + \frac{1}{16}ص^4 + ث = \frac{1}{80}ص^4(4ص + 5) + ث$

$= \frac{1}{80}(2س - 1)^4\left[4(2س - 1) + 5\right] + ث$

$= \frac{1}{80}(2س - 1)^4(8س + 1) + ث$

(٢) نضع : $ص = س$ $\therefore ء ص = ء س$ ،

$ء ع = هـ^{-2س}\, ء س$ $\therefore ع = -\frac{1}{2}هـ^{-2س}$

$\therefore$ المقدار $= -\frac{1}{2}س\, هـ^{-2س} + \frac{1}{2}\int هـ^{-2س}\, ء س$

$= -\frac{1}{2}س\, هـ^{-2س} - \frac{1}{4}هـ^{-2س} + ث$

$= -\frac{1}{4}هـ^{-2س}(2س + 1) + ث$

[٤] (أ) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} 2س + س^2 & \text{عندما } س < 0 \\ 2س - س^2 & \text{عندما } س \geq 0 \end{cases}$ أوجد :

(١) القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د

(٢) $\int_{-1}^{3} د(س)\, ء س$

الحل

(١) $\because د(0^+) = د(0^-) = د(0) = 0$

$\therefore$ د(س) متعددة التعريف مجاها ح و متصلة عند س = ٠ أى متصلة على ح

$\because$ ، عندما : $س < 0$ فإن : $د(0 + و) - د(0) = 2(0 + و) + (0 + و)^2 - 0$

$= 2و + و^2 = و(2 + و)$

$\therefore د'(0)^+ = \lim_{و \to 0^+} \frac{د(0 + و) - د(0)}{و} = \lim_{و \to 0^+} \frac{و(2 + و)}{و} = 2$

$\because$ ، عندما : $س > 0$ فإن : $د(0 + و) - د(0) = 2(0 + و) - (0 + و)^2 - 0$

$= 2و - و^2 = و(2 - و)$

، $د'(0)^- = \lim_{و \to 0^-} \frac{د(0 + و) - د(0)}{و} = \lim_{و \to 0^-} \frac{و(2 - و)}{و} = 2$

$\therefore د'(0)^+ = د'(0)^- = 2$ $\therefore د'(س) = \begin{cases} 2 + 2س & \text{عندما } س < 0 \\ 2 & \text{عندما } س = 0 \\ 2 - 2س & \text{عندما } س > 0 \end{cases}$

بوضع : $د'(س) = 0$ $\therefore 2 + 2س = 0$ عندما $س < 0$ و منها : $س = -1$

، $2 - 2س = 0$ عندما $س > 0$ و منها : $س = 1$

$\therefore (1 ، 1)$ ، $(-1 ، -1)$ نقطتان حرجتان من الجدول التالى :

| س | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′ | − | ٠ | + | ٠ | + | ٠ | − |
| سلوك د | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ |

$د(1) = 1$ قيمة عظمى محلية ، $د(-1) = -1$ قيمة صغرى محلية

(٢) $\int_{-1}^{3} د(س)\, ء س = \int_{-1}^{0} (2س + س^2)\, ء س + \int_{0}^{3} (2س - س^2)\, ء س +$

$= \left[س^2 + \frac{1}{3}س^3\right]_{-1}^{0} + \left[س^2 - \frac{1}{3}س^3\right]_{0}^{3} = (0 - 1 + \frac{1}{3}) + (9 - 9 - 0) = -\frac{2}{3}$

[٥] (أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = س^2$

$ص = 6س - س^2$ بالوحدات المربعة

الحل

بفرض : $ص_1 = س^2$ ، $ص_2 = س - س^2$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $ص_١ = ص_٢$

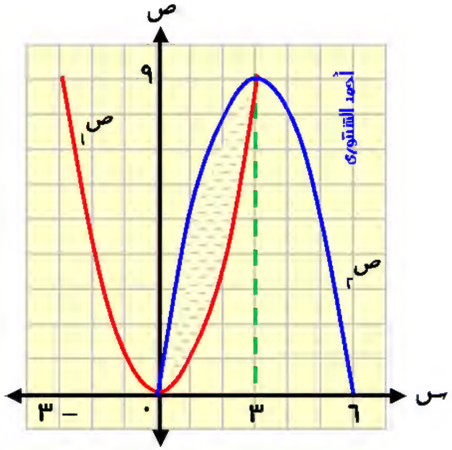
∴ $س^٢ = ٦س - س^٢$

∴ $٢س^٢ - ٦س = ٠$

∴ $٢س\,(س - ٣) = ٠$

∴ $س = ٠$ ، $س = ٣$

لاحظ : نقط التقاطع من الشكل المقابل




، ∵ $ص_٢ \geq ص_١$ لكل : $س \in [٠ ، ٣]$

∴ $م = \int_{٠}^{٣} (ص_٢ - ص_١)\, ء س = \int_{٠}^{٣} (٦س - س^٢ - س^٢)\, ء س$

$= \int_{٠}^{٣} (٦س - ٢س^٢)\, ء س = \left[ ٣س^٢ - \frac{٢}{٣} س^٣ \right]_{٠}^{٣}$

$= (٢٧ - ١٨) - (٠) = ٩$ وحدة مربعة

## الاختبار الثالث

**(٤)** إذا كان $\int_{٢}^{٤} د(س)\, ء س = ٧$ ، $\int_{٤}^{٢} ر(س)\, ء س = ٢$

فإن $\int_{٢}^{٤} [\,٢د(س) - ٣ر(س) - ٥\,]\, ء س$ تساوى ....

(أ) $-١٨$ (ب) $-٨$ (جـ) ١٠ (ء) ١٤

الحل

∵ $\int_{٤}^{٢} ر(س)\, ء س = ٢$ ∴ $\int_{٢}^{٤} ر(س)\, ء س = -٢$

∴ $\int_{٢}^{٤} [\,٢د(س) - ٣ر(س) - ٥\,]\, ء س = ٢\int_{٢}^{٤} د(س)\, ء س$

$- ٣\int_{٢}^{٤} ر(س)\, ء س - ٥\int_{٢}^{٤} ء س$

$= ٢ \times ٧ - ٣ \times (-٢) - ٥\, [\,س\,]_{٢}^{٤}$

$= ١٤ + ٦ - ٥ \times (٤ - ٢) = ٢٠ - ١٠ = ١٠$

**(٥)** مساحة المنطقة المحدودة بالمستقيمات $ص = ٢س - ٣$ ، $ص = س + ١$ ، $س = ٢$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٩}{٢}$ (ء) ٦

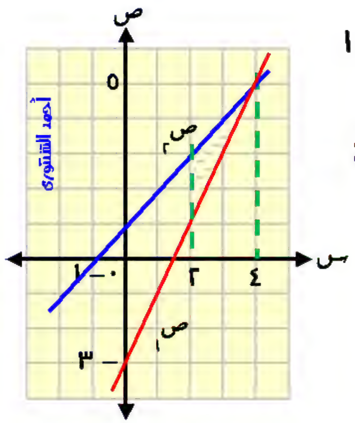
الحل

بفرض : $ص_١ = ٢س - ٣$ ، $ص_٢ = س + ١$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $ص_١ = ص_٢$

∴ $٢س - ٣ = س + ١$ و منها : $س = ٤$

، ∵ $ص_٢ \geq ص_١$ لكل : $س \in [٢ ، ٤]$




∴ $م = \int_{٢}^{٤} (ص_٢ - ص_١)\, ء س$

$= \int_{٢}^{٤} (س + ١ - ٢س + ٣)\, ء س$

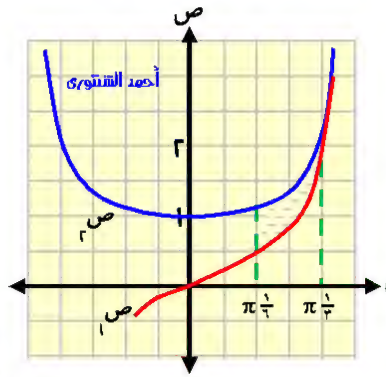
$= \int_{٢}^{٤} (٤ - س)\, ء س = \left[ ٤س - \frac{١}{٢} س^٢ \right]_{٢}^{٤}$

$= (١٦ - ٨) - (٨ - ٢) = ٢$ وحدة مربعة

**(٦)** حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $ص = طا س$ ، $ص = قا س$ و المستقيمين $س = \frac{١}{٦}\pi$ ، $س = \frac{١}{٣}\pi$ دورة كاملة حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة يساوى ....

(أ) $\frac{1}{6}\pi$ (ب) $\frac{1}{3}\pi$ (حـ) $\frac{2}{5}\pi$ (ء) $2\pi$

الحل




$\text{ص}_1 = \text{طا}\,\text{س}$ ، $\text{ص}_2 = \text{قا}\,\text{س}$

، ∵ $\text{ص}_2 \geq \text{ص}_1$ لكل : $\text{س} \in [\frac{1}{6}\pi ، \frac{1}{3}\pi]$

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} (\text{ص}_2^2 - \text{ص}_1^2)\, \text{ء}\text{س}$

$= \pi \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} (\text{قا}^2\text{س} - \text{طا}^2\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

$= \pi \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \text{ء}\text{س} = \pi [\text{س}]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}$

$= \pi [\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi] = \frac{1}{6}\pi^2$ وحدة مكعبة

[٣] (أ) أوجد : (١) $\int \text{س}\,(\text{س} - 5)^3\, \text{ء}\text{س}$ ،

(٢) $\int 4\text{س}\, \text{هـ}^{2\text{س}}\, \text{ء}\text{س}$

الحل

(١) $\int (\text{س} - 5 + 5)(\text{س} - 5)^3\, \text{ء}\text{س} = \int (\text{س} - 5)^4\, \text{ء}\text{س}$

$+ 5\int (\text{س} - 5)^3\, \text{ء}\text{س} = \frac{1}{5}(\text{س} - 5)^5 + \frac{5}{4}(\text{س} - 5)^4 + \text{ث}$

$= \frac{1}{20}(\text{س} - 5)^4 (4\text{س} - 20 + 25)$

$= \frac{1}{20}(\text{س} - 5)^4 (4\text{س} + 5)$

حل آخر

نضع : $\text{ع} = \text{س} - 5$ $\therefore \text{ء}\text{ع} = \text{ء}\text{س}$ ، $\text{س} = \text{ع} + 5$

$\therefore$ المقدار $= \int (\text{ع} + 5)\,\text{ع}^3\, \text{ء}\text{ع}$

$= \int (\text{ع}^4 + 5\text{ع}^3)\, \text{ء}\text{ع} = \frac{1}{5}\text{ع}^5 + \frac{5}{4}\text{ع}^4 + \text{ث}$

$= \frac{1}{20}\text{ع}^4 (4\text{ع} + 25)$

$= \frac{1}{20}(\text{س} - 5)^4 (4\text{س} - 20 + 25)$

(٢) نضع : $\text{ص} = 4\text{س}$ $\therefore \text{ء}\text{ص} = 4\,\text{ء}\text{س}$ ،

$\text{ء}\text{ع} = \text{هـ}^{2\text{س}}\, \text{ء}\text{س}$ $\therefore \text{ع} = \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}}$

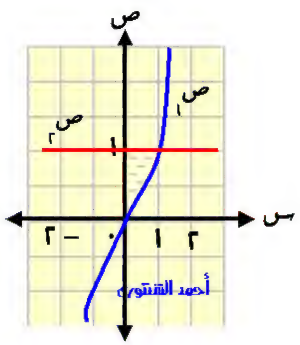
$\therefore$ المقدار $= 4\text{س} \times \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} - \int 4 \times \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}}\, \text{ء}\text{س}$

$= 2\text{س}\,\text{هـ}^{2\text{س}} - \int 2\text{هـ}^{2\text{س}}\, \text{ء}\text{س} = 2\text{س}\,\text{هـ}^{2\text{س}} - \text{هـ}^{2\text{س}} + \text{ث}$

$= \text{هـ}^{2\text{س}}(2\text{س} - 1) + \text{ث}$

[٤] (أ) إذا كان حجم الجسم الدورانى الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحى $\text{ص} = \text{س}^3$ و المستقيمين $\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 1$ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك إسطوانى الشكل طوله ٤٢ وحدة طول فما طول نصف قطر السلك

الحل




$\text{ص}_1 = \text{س}^3$ ، $\text{ص}_2 = 1$ نضع : $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$

$\therefore \text{س}^3 = 1$ و منها : $\text{س} = 1$

، ∵ $\text{ص}_2 \geq \text{ص}_1$ لكل : $\text{س} \in [0 ، 1]$

، الدوران حول محور السينات

$\therefore \text{ح} = \pi \int_0^1 (\text{ص}_2^2 - \text{ص}_1^2)\, \text{ء}\text{س}$

$= \pi \int_0^1 (1 - \text{س}^6)\, \text{ء}\text{س}$

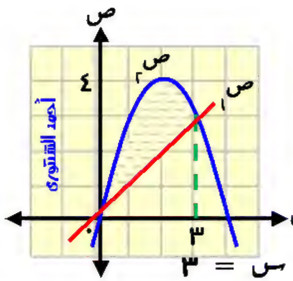
$= \pi$ [ س − $\frac{1}{7}$ س$^{7}$ ]$_{0}^{1}$ = $\pi$ [ ١ − $\frac{1}{7}$ ] = $\frac{6}{7}\pi$ وحدة مكعبة

، ∵ حجم السلك = حجم الجسم الدورانى

∴ $\pi$ نق$^{2}$ × ٤٢ = $\frac{6}{7}\pi$ و منها : نق = $\frac{1}{7}$ وحدة طول

[٥] (أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين س − ص = ٠ ،
ص = ٤ س − س$^{2}$

الحل




بفرض : ص$_{1}$ = س ، ص$_{2}$ = ٤ س − س$^{2}$

لايجاد نقط التقاطع نضع : ص$_{1}$ = ص$_{2}$

∴ ٤ س − س$^{2}$ = س ∴ س$^{2}$ − ٣ س = ٠ .

∴ س ( س − ٣ ) = ٠ ∴ س = ٠ ، س = ٣

، ∵ ص$_{2}$ ≥ ص$_{1}$ لكل س ∈ [ ٠ ، ٣ ]

∴ م = $\int_{0}^{3}$ ( ص$_{2}$ − ص$_{1}$ ) ء س = $\int_{0}^{3}$ ( ٤ س − س$^{2}$ − س ) ء س

= $\int_{0}^{3}$ ( ٣ س − س$^{2}$ ) ء س = [ $\frac{3}{2}$ س$^{2}$ − $\frac{1}{3}$ س$^{3}$ ]$_{0}^{3}$

= ( $\frac{27}{2}$ − ٩ ) − ( ٠ ) = $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة

## الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٢) $\int$ قا$^{3}$ س طا س ء س = ....

(أ) $\frac{1}{4}$ قا$^{4}$ س + ث (ب) $\frac{1}{3}$ قا$^{3}$ س + ث

(جـ) $\frac{1}{2}$ قا$^{2}$ س + ث (ء) − $\frac{1}{2}$ قا$^{2}$ س + ث

الحل

$\int$ قا$^{3}$ س طا س ء س = $\int$ قا$^{2}$ س ( قا س طا س ) ء س =

$\int$ قا$^{2}$ س ( قا س )$'$ ء س = $\frac{1}{3}$ قا$^{3}$ س + ث

(٥) $\int_{-1}^{3}$ ٣ س | س − ٤ | ء س يساوى ....

(أ) − ٢٧ (ب) − ٢٠ (جـ) ٢٠ (ء) ٢٧

الحل

$\int_{-1}^{3}$ ٣ س | س − ٤ | ء س = $\int_{-1}^{3}$ ٣ س ( − س + ٤ ) ء س

= $\int_{-1}^{3}$ ( −٣ س$^{2}$ + ١٢ س ) ء س = [ − س$^{3}$ + ٦ س$^{2}$ ]$_{-1}^{3}$

= ( −٢٧ + ٥٤ ) − ( ١ + ٦ ) = ٢٠

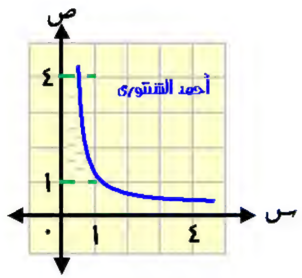
(٦) عند دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى س = $\frac{1}{\sqrt{ص}}$ ،

١ ≤ ص ≤ ٤ ، و محور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات

فإن حجم الجسم الناشئ مقدراً بالوحدات المكعبة يساوى ....

(أ) $\frac{2}{3}\pi$  (ب) $3\sqrt{2}\,\pi$  (جـ) $2\pi$ لوهـ٢  (ء) $\frac{2}{3}\pi$ لو٣

الحل




∵ الدوران حول محور الصادات :

∴ $ح = \pi \int_{1}^{4} س^2 \, ء ص = \pi \int_{1}^{4} \frac{1}{ص} \, ء ص$

$= \pi [\,لو_{هـ} ص\,]_{1}^{4} = \pi [\,لو_{هـ}4 - لو_{هـ}1\,]$

$= 2\pi\, لو_{هـ}2$ وحدة مكعبة

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int (3س^2 - 4هـ^{2س}) \, ء س$ ،

(٢) $\int \frac{س - 1}{\sqrt{س + 3}} \, ء س$

الحل

(١) $\int (3س^2 - 4هـ^{2س}) \, ء س = 3 \times \frac{1}{3} س^3 - 4 \times \frac{1}{2} هـ^{2س} + ث$

$= س^3 - 2هـ^{2س} + ث$

(٢) نضع : ص = س + ٣  ∴ ء ص = ء س ، س − ١ = ص − ٤

∴ المقدار $= \int (ص - 4) \times ص^{-\frac{1}{2}} \, ء ص = \int (ص^{\frac{1}{2}} - 4ص^{-\frac{1}{2}}) \, ء ص$

$= \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} - 4 \times 2ص^{\frac{1}{2}} + ث = \frac{2}{3} ص^{\frac{1}{2}} (ص - 12) + ث$

$= \frac{2}{3} (س + 3)^{\frac{1}{2}} (س + 3 - 12) + ث$

$= \frac{2}{3} (س + 3)^{\frac{1}{2}} (س - 9) + ث$

[٣] (أ) إذا كان $\int_{1}^{4} د(س) \, ء س = 7$ ، $\int_{4}^{1} ر(س) \, ء س = 3$

أحسب قيمة $\int_{1}^{4} [\, د(س) + 2ر(س) - 4 \,] \, ء س$

الحل

∵ $\int_{4}^{1} ر(س) \, ء س = 3$   ∴ $\int_{1}^{4} ر(س) \, ء س = -3$

∴ $\int_{1}^{4} [\, د(س) + 2ر(س) - 4 \,] \, ء س = \int_{1}^{4} د(س) \, ء س$

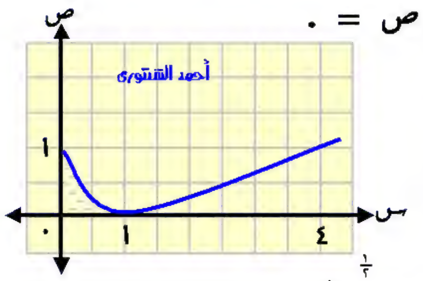
$+ 2\int_{1}^{4} ر(س) \, ء س - 4\int_{1}^{4} ء س$

$= 7 + 2 \times (-3) - 4\, [\, س \,]_{1}^{4}$

$= 7 - 6 - 4 \times (4 - 1) = 1 - 12 = -11$

[٤] (أ) أوجد مساحة المنطقة بالمنحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = 1$ و المستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ .

الحل




∵ ص = ٠  ∴ $\sqrt{س} = 1$  ∴ س = ١

∴ حدود التكامل هى : س = ٠ ، س = ١

، ∵ $\sqrt{ص} = 1 - \sqrt{س}$ بالتربيع :

∴ $ص = 1 - 2\sqrt{س} + س = 1 - 2س^{\frac{1}{2}} + س$

∴ $م = \int_{0}^{1} (1 - 2س^{\frac{1}{2}} + س) \, ء س = [\, س - \frac{4}{3} س^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} س^2 \,]_{0}^{1}$

$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ وحدة مربعة

[٥] (أ) أثبت أن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = \frac{4}{س}$ ، ص = ٥ − س دورة كاملة واحدة حول محور السينات يساوى $9\pi$ من الوحدات المكعبة



**الحل**

$\text{ص}_1 = \frac{\text{٤}}{\text{س}}$ ، $\text{ص}_2 = \text{٥} - \text{س}$

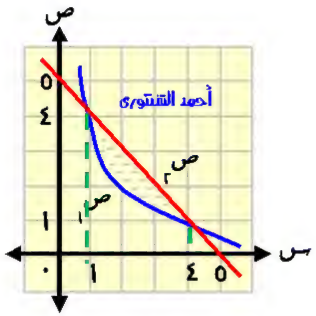
نضع : ص₁ = ص₂ ∴ ٥ س − س² = ٤

∴ س² − ٥ س + ٤ = ٠

∴ ( س − ١ ) ( س − ٤ ) = ٠

و منها : س = ١ ، س = ٤

∵ ص₂ ≥ ص₁ لكل : س ∈ [ ١ ، ٤ ] ، الدوران حول محور السينات




∴ ح = $\pi \int_{1}^{4} (\text{ص}_2^2 - \text{ص}_1^2)\,\text{ء س}$

= $\pi \int_{1}^{4} \left(\text{٢٥} - \text{١٠ س} + \text{س}^2 - \frac{\text{١٦}}{\text{س}^2}\right)\text{ء س}$

= $\pi \left[\text{٢٥ س} - \text{٥ س}^2 + \frac{1}{3}\text{س}^3 + \frac{\text{١٦}}{\text{س}}\right]_1^4$

= $\pi \left[(\text{١٠٠} - \text{٨٠} + \frac{\text{٦٤}}{\text{٣}} + \text{٤}) - (\text{٢٥} - \text{٥} + \frac{1}{3} + \text{١٦})\right]$

= ٩ π وحدة مكعبة

---

## الاختبار الخامس

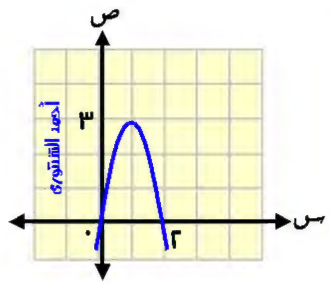
**أولاً : أجب عن السؤال التالى :**

[١] يوضح الشكل المقابل :

منحنى د/(س) للدالة د حيث :

د(س) = أ س³ + ب س²

، أ ، ب ثابتان أكمل :




(٦) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين س = ٢ ، س = ٠ بالوحدات المربعة يساوى ....

**الحل**

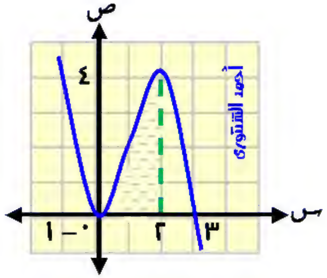
∵ د(س) = أ س³ + ب س² ∴ د/(س) = ٣ أ س² + ٢ ب س

، ∵ منحنى د/(س) يمر بالنقطتين ( ١ ، ٣ ) ، ( ٢ ، ٠ )

∴ ٣ أ + ٢ ب = ٣ ، ١٢ أ + ٤ ب = ٠ و بحل المعادلتين ينتج :

أ = −١ ، ب = ٣ ∴ د(س) = − س³ + ٣ س²

الشكل المقابل يبين منحنى د(س)




(٦) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين س = ٢ ، س = ٠ .

م = $\int_{0}^{2} (-\text{س}^3 + \text{٣ س}^2)\,\text{ء س}$

= $\left[-\frac{1}{4}\text{س}^4 + \text{س}^3\right]_0^2$

= − ٤ + ٨ = ٤ وحدات مربعة

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \text{قتا}^2 \frac{\text{س} + \text{٥}}{\text{٢}}\,\text{ء س}$ ، (٢) $\int \frac{\text{٥ س}}{\text{٣ س}^2 - \text{١}}\,\text{ء س}$

**الحل**

(١) $\int \text{قتا}^2 \frac{\text{س} + \text{٥}}{\text{٢}}\,\text{ء س} = -\text{٢ ظتا} \frac{\text{س} + \text{٥}}{\text{٢}} + \text{ث}$

(٢) $\int \frac{\text{٥ س}}{\text{٣ س}^2 - \text{١}}\,\text{ء س} = \frac{\text{٥}}{\text{٦}} \int \frac{\text{٦ س}}{\text{٣ س}^2 - \text{١}}\,\text{ء س} = \frac{\text{٥}}{\text{٦}} \int \frac{(\text{٣ س}^2 - \text{١})'}{\text{٣ س}^2 - \text{١}}\,\text{ء س}$

= $\frac{\text{٥}}{\text{٦}}$ لوₕ | ٣ س² − ١ | + ث

[٣] (ب) خزان فارغ سعته ١٠ أمتار مكعبة يصب فيه الماء تدريجياً بمعدل ( ٢ ن + ٣ ) متر مكعب / دقيقة حيث ن الزمن بالدقائق أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

**الحل**

نفرض أن : حجم الخزان = ع ∴ $\frac{دع}{دن} = ٢ن + ٣$

∴ $ع = \int (٢ن + ٣)\, دن = ن^{٢} + ٣ن + ث$

عندما يكون الخزان فارغاً فإن : ع = ٠ ، ن = ٠ ∴ ث = ٠

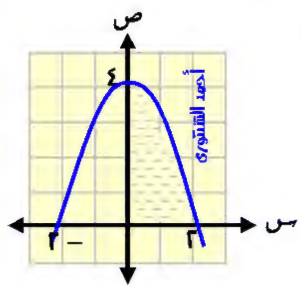
∴ $ع = ن^{٢} + ٣ن$ ، عندما يمتلئ الخزان فإن : ع = ١٠ $م^{٢}$

∴ $١٠ = ن^{٢} + ٣ن$ ∴ $ن^{٢} + ٣ن - ١٠ = ٠$

∴ $(ن - ٢)(ن + ٥) = ٠$ ∴ ن = −٥ مرفوض

، ن = ٢ أى أن : الزمن اللازم لامتلاء الخزان = ٢ دقيقة

[٥] (أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = ٤ - س^{٢}$ و الجزأين الموجبين من محورى الإحداثيات دورة كاملة حول محور السينات




**الحل**

∵ $ص = ٤ - س^{٢}$ ، ص = ٠

∴ $٤ - س^{٢} = ٠$ ∴ $س^{٢} - ٤ = ٠$

∴ $(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

و منها : س = ٢ ، س = −٢ مرفوض

حيث المنطقة محددة بالجزأين الموجبين لمحورى الإحداثيات

، الدوران حول محور السينات

∴ $ع = \pi \int_{٠}^{٢} ص^{٢}\, دس = \pi \int_{٠}^{٢} (١٦ - ٨س^{٢} + س^{٤})\, دس$

$= \pi \left[ ١٦ س - \frac{٨}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٥} س^{٥} \right]_{٠}^{٢}$

$= \pi \left( ٣٢ - \frac{٦٤}{٣} + \frac{٣٢}{٥} \right) = \frac{٢٥٦}{١٥} \pi$ وحدة مكعبة

## الاختبار السادس

**أولاً : أجب عن السؤال التالى :**

[١] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(٤) $\int \frac{س - ٤}{(س - ٢)^{٦}}\, دس = \frac{٧(س - ٤)^{٢}}{٢(س - ٢)^{٧}} + ث$ (أ) (ب)

**الحل**

(٤) (ب) ، التصحيح :

الطرف الأيمن $= \int (س - ٤)(س - ٢)^{-٦}\, دس$

$= \int (س - ٢ - ٢)(س - ٢)^{-٦}\, دس$

$= \int (س - ٢)^{-٥}\, دس - ٢ \int (س - ٢)^{-٦}\, دس$

$= -\frac{١}{٤}(س - ٢)^{-٤} - ٢ \times \left(-\frac{١}{٥}\right)(س - ٢)^{-٥} + ث$

$= -\frac{١}{٤}(س - ٢)^{-٤} + \frac{٢}{٥}(س - ٢)^{-٥} + ث$

$= \frac{١}{٢٠}(س - ٢)^{-٥} \left[ -٥(س - ٢) + ٨ \right] + ث$

$= \frac{١}{٢٠}(س - ٢)^{-٥} ( -٥ س + ١٠ + ٨ ) + ث$

$= \frac{١}{٢٠}(س - ٢)^{-٥} ( ١٨ - ٥ س ) + ث$

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٧ س^{٣}}{٢ - ٥ س^{٤}}$ ء س ،

(٢) $\int ( ٣ هـ^{-٥ س} + \frac{\pi}{س} )$ ء س

**الحل**

(١) المقدار = $\frac{٧}{٢٠} \int \frac{٢٠ س^{٣}}{٢ - ٥ س^{٤}}$ ء س = $\int \frac{(٢ - ٥ س^{٤})'}{٢ - ٥ س^{٤}}$ ء س

= $\frac{٧}{٢٠}$ لوهـ $| ٢ - ٥ س^{٤} |$ + ث

(٢) المقدار = ٣ $\int هـ^{-٥ س}$ ء س + $\pi \int \frac{١}{س}$ ء س

= $- \frac{٣}{٥} هـ^{-٥ س} + \pi$ لوهـ |س| + ث

[٣] (أ) أوجد : $\int$ طتا س $قتا^{٣}$ س ء س

**الحل**

المقدار = $\int قتا^{٢}$ س ( طتا س قتا س ) ء س

= $- \int قتا^{٢}$ س ( − طتا س قتا س ) ء س

= $- \int قتا^{٢}$ س $( قتا س )'$ ء س = $- \frac{١}{٣} قتا^{٣}$ س + ث

[٤] (ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند أى نقطة عليه يساوى ٦ $س^{٢}$ + ب س ، و كان د(٠) = ٥ ، د(٢) = −٣ أوجد قيمة الثابت ب ثم أرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د

**الحل**

∵ $\frac{ءص}{ءس} = \int ( ٦ س^{٢} + ب س )$ ء س ∴ ص = ٢ $س^{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ ب $س^{٢}$ + ث

، ∵ د(٠) = ٥ ∴ ث = ٥

، ∵ د(٢) = −٣ ∴ −٣ = ١٦ + ٢ ب + ٥ ، و منها : ب = −١٢

∴ ص = د(س) = ٢ $س^{٣}$ − ٦ $س^{٢}$ + ٥

∴ $د'(س)$ = ٦ $س^{٢}$ − ١٢ س = ٦ س ( س − ٢ )

∴ $د'(س)$ = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متزايدة فى ]٢ ، ∞[ ، و فى ]−∞ ، ٠[

و متناقصة فى ]٠ ، ٢[

، $د''(س)$ = ١٢ س − ١٢ = ١٢ ( س − ١ )

، ∵ $د''(٠)$ < ٠ ∴ د(٠) = ٥ قيمة عظمى محلية

، ∵ $د''(٢)$ > ٠ ∴ د(٢) = −٣ قيمة صغرى محلية

، ∵ $د''(س)$ = ٠ عندما : س = ١

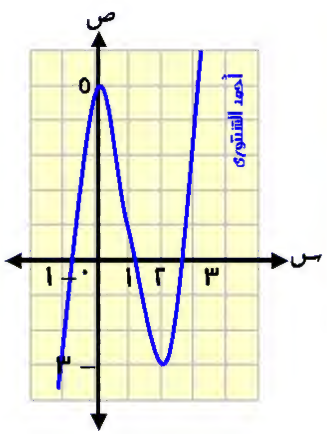
، ∵ $د''(س)$ < ٠ فى ]−∞ ، ١[ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ $د''(س)$ > ٠ فى ]١ ، ∞[ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ١ ، ١ ) نقطة إنقلاب ،

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

| س | −∞ | | ٠ | | ١ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $د'$ | | + | ٠ | − | | − | ٠ | + | |
| سلوك د | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |
| إشارة $د''$ | | − | | − | ٠ | + | | + | |
| تحدب د | | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل | |
| ص | | | ٥ | | ١ | | −٣ | | |
| | | | قيمة عظمى محلية | | نقطة إنقلاب | | قيمة صغرى محلية | | |

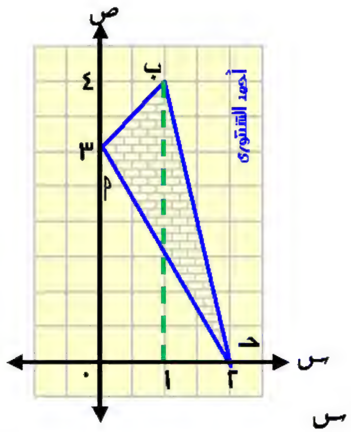


**[٥] (ب)** إذا كانت أ ( ٠ ، ٣ ) ، ب ( ١ ، ٤ ) ، حـ ( ٢ ، ٠ )

أوجد باستخدام التكامل :

أولاً : مساحة سطح المثلث أ ب حـ

ثانياً : حجم الجسم من دوران المثلث أ و حـ دورة كاملة حول محور الصادات




**الحل**

أولاً : معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى : (ص − ٣)/(س − ٠) = (٤ − ٣)/(١ − ٠)

أى : (ص − ٣)/س = ١ ∴ ص١ = س + ٣

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى : (ص − ٠)/(س − ٢) = (٤ − ٠)/(١ − ٢)

أى : ص/(س − ٢) = ١ ∴ ص٢ = ٨ − ٤ س

معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ هى : (ص − ٣)/(س − ٠) = (٠ − ٣)/(٢ − ٠)

أى : (ص − ٣)/س = − ٣/٢ ∴ ص٣ = ٣ − ٣/٢ س

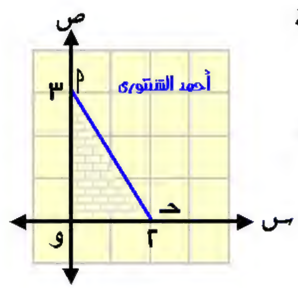
م ( △ أ ب حـ ) = ∫ من ٠ إلى ١ ( ص١ − ص٣ ) ء س + ∫ من ١ إلى ٢ ( ص٢ − ص٣ ) ء س

= ∫ من ٠ إلى ١ ( س + ٣ − ٣ + ٣/٢ س ) ء س + ∫ من ١ إلى ٢ ( ٨ − ٤ س − ٣ + ٣/٢ س ) ء س

= ∫ من ٠ إلى ١ ٥/٢ س ء س + ∫ من ١ إلى ٢ ( ٥ − ٥/٢ س ) ء س

= [ ٥/٤ س٢ ] من ٠ إلى ١ + [ ٥ س − ٥/٤ س٢ ] من ١ إلى ٢ = [ ٥/٤ − ٠ ]

+ [ ( ١٠ − ٥ ) − ( ٥ − ٥/٤ ) ] = ٥/٢ وحدة مربعة




ثانياً : ∵ الدوران حول محور الصادات

، ص٣ = ٣ − ٣/٢ س ∴ س٣ = ٢ − ٢/٣ ص

، ع = π ∫ من ٠ إلى ٣ س٣٢ ء ص

= π ∫ من ٠ إلى ٣ ( ٢ − ٢/٣ ص )٢ ء ص

= π ∫ من ٠ إلى ٣ ( ٤ − ٨/٣ ص + ٤/٩ ص٢ ) ء ص

= π [ ٤ ص − ٤/٣ ص٢ + ٤/٢٧ ص٣ ] من ٠ إلى ٣

= π [ ( ١٢ − ١٢ + ٤ ) − ( ٠ ) ] = ٤ π وحدة مكعبة

## الاختبار السابع

**أولاً : أجب عن السؤال التالى :**

**[أ]** فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

**(٤)** ∫ ( ١ − حتا س )٤ حا س ء س = − ١/٥ ( ١ + حتا س )٥ + ث

(أ)　(ب)

**(٤)** (ب) ، التصحيح :

∫ ( ١ − حتا س )٤ حا س ء س = ∫ ( ١ − حتا س )٤ ( ١ − حتا س )/ ء س

= ١/٥ ( ١ − حتا س )٥ + ث

**حل آخر**

نضع : ص = ١ − حتا س ∴ ء ص = حا س ء س

المقدار = ∫ ص٤ ء ص = ١/٥ ص٥ + ث

= ١/٥ ( ١ − حتا س )٥ + ث

**حل ثالث**

∫ ( ١ − حتا س ) حا$^{٤}$ س حا س ء س = ∫ ( ١ − ١ + ٢ حا$^{٢}$ $\frac{١}{٢}$ س )$^{٤}$ ×

٢ حا $\frac{١}{٢}$ س حتا $\frac{١}{٢}$ س ء س = ٣٢ ∫ حا$^{٩}$ $\frac{١}{٢}$ س حتا $\frac{١}{٢}$ س ء س =

٦٤ ∫ حا$^{٩}$ $\frac{١}{٢}$ س ( $\frac{١}{٢}$ حتا $\frac{١}{٢}$ س ) ء س = ٦٤ ∫ حا$^{٩}$ $\frac{١}{٢}$ س ( حا $\frac{١}{٢}$ س )$'$ ء س

= ٦٤ × $\frac{١}{١٠}$ حا$^{١٠}$ $\frac{١}{٢}$ س + ث = $\frac{١}{٥}$ ( ٢ حا$^{٢}$ $\frac{١}{٢}$ س )$^{٥}$ + ث

= $\frac{١}{٥}$ ( ١ − حتا س )$^{٥}$ + ث

(٦) ∫ ( $\frac{هـ^{٢}}{س}$ + $\frac{س}{هـ}$ ) ء س = ٢ هـ لو$_{هـ}$ | س | − $\frac{س^{٢}}{هـ}$ + ث

(أ)  (ب)

الحل

(٦) (ب) ، التصحيح : المقدار = ٢ هـ ∫ $\frac{١}{س}$ ء س + ∫ $\frac{١}{هـ}$ س ء س =

= ٢ هـ لو$_{هـ}$ | س | + $\frac{س^{٢}}{٢ هـ}$ + ث

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) ∫ س حا س ء س ،

(٢) ∫$_{-١}^{١}$ $\sqrt{س^{٤} + س^{٢}}$ ء س

الحل

(١) نضع : ص = س ∴ ء ص = ء س ،

ء ع = حا س ء س ∴ ع = − حتا س

∴ المقدار = − س حتا س + ∫ حتا س ء س

= − س حتا س + حا س + ث

(٢) ∵ $\sqrt{س^{٤} + س^{٢}}$ = | س | $\sqrt{س^{٢} + ١}$

، د(س) = $\sqrt{س^{٤} + س^{٢}}$ دالة زوجية

∴ ∫$_{-١}^{١}$ $\sqrt{س^{٤} + س^{٢}}$ ء س = ٢ ∫$_{٠}^{١}$ س $\sqrt{س^{٢} + ١}$ ء س

= ∫$_{٠}^{١}$ ( س$^{٢}$ + ١ )$^{\frac{١}{٢}}$ × ( ٢ س ) ء س

= ∫$_{٠}^{١}$ ( س$^{٢}$ + ١ )$^{\frac{١}{٢}}$ × ( س$^{٢}$ + ١ )$'$ ء س = [ $\frac{٢}{٣}$ ( س$^{٢}$ + ١ )$^{\frac{٣}{٢}}$ ]$_{٠}^{١}$

= $\frac{٢}{٣}$ [ ( ٢ )$^{\frac{٣}{٢}}$ − ( ١ )$^{\frac{٣}{٢}}$ ] = $\frac{٢}{٣}$ ( ٢ $\sqrt{٢}$ − ١ )

[٤] (أ) أوجد ∫$_{٠}^{٣}$ س $\sqrt{س + ١}$ ء س

الحل

نفرض أن : ص = س + ١ ∴ ء ص = ء س ، س = ص − ١

، عندما : س = ٠ فإن : ص = ١ ، عندما : س = ٣ فإن : ص = ٤

∴ المقدار = ∫$_{١}^{٤}$ ( ص − ١ ) × ص$^{\frac{١}{٢}}$ ء ص = ∫$_{١}^{٤}$ ( ص$^{\frac{٣}{٢}}$ − ص$^{\frac{١}{٢}}$ ) ء ص

= [ $\frac{٢}{٥}$ ص$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٢}{٣}$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$ ]$_{١}^{٤}$

= ( $\frac{٢}{٥}$ × ٣٢ − $\frac{٢}{٣}$ × ٨ ) − ( $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{٢}{٣}$ ) = $\frac{١١٦}{١٥}$

[٥] (أ) إذا كانت : د(س) = س$^{٣}$ − ٣ س + ٣ أوجد :

أولاً : القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [ ٠ ، ٢ ]

ثانياً : مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمات

س = ٠ ، س = ٢ ، ص = ٠

الحل

أولاً : ∵ د(س) = س$^{٣}$ − ٣ س + ٣

∴ $د^{/}(س) = ٣ س^{٢} - ٣ = ٣ ( س + ١ ) ( س - ١ )$

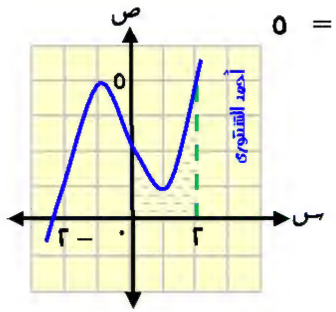
نضع : $د^{/}(س) = ٠$ ∴ $س = ١ \in [ ٠ ، ٢ ]$

، $س = -١ \notin [ ٠ ، ٢ ]$

، ∵ $د(٠) = ٣$ ، $د(١) = ١$ ، $د(٢) = ٥$

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٥

، القيمة الصغرى المطلقة = ١



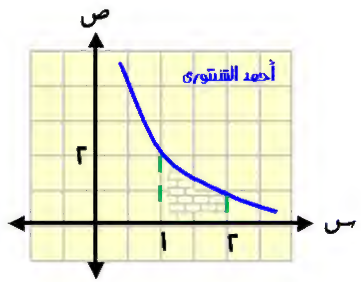

ثانياً : $م = \int_{٠}^{٢} ( س^{٣} - ٣ س + ٣ ) ء س$

$= [ \frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٣ س ]_{٠}^{٢}$

$= ٤ - ٦ + ٦ = ٤$ وحدات مربعة

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى س ص = ٢ و المستقيمان س = ١ ، س = ٢

الحل




$ص = \frac{٢}{س}$ ، الدوران حول محور السينات

∴ $ح = \pi \int_{١}^{٢} ص^{٢} ء س$

$= \pi \int_{١}^{٢} ( ٤ س^{-٢} ) ء س$

$= \pi [ - ٤ س^{-١} ]_{١}^{٢}$

$= \pi [ - \frac{٤}{س} ]_{١}^{٢} = \pi ( - ٢ + ٤ ) = ٢ \pi$ وحدة مكعبة

## الاختبار الثامن

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

(٤) إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ ٢ ، ٧ ] فإن :

$\int_{٢}^{٧} د(س) ء س + \int_{٧}^{٤} د(س) ء س = ....$

الحل

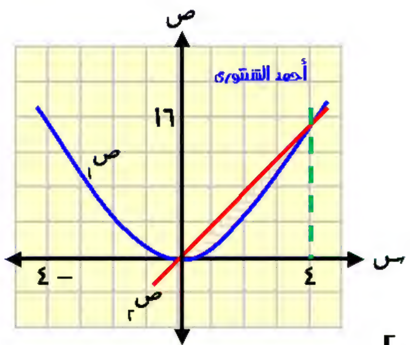
(٤) $\int_{٢}^{٧} د(س) ء س + \int_{٧}^{٤} د(س) ء س = \int_{٢}^{٧} د(س) ء س -$

$\int_{٤}^{٧} د(س) ء س = \int_{٢}^{٤} د(س) ء س + \int_{٤}^{٧} د(س) ء س -$

$\int_{٤}^{٧} د(س) ء س = \int_{٢}^{٤} د(س) ء س$

(٥) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = س^{٢}$ ، $ص = ٤ س$ تساوى .... وحدة مربعة

الحل




(٥) $ص_{١} = س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٤ س$

نضع : $ص_{١} = ص_{٢}$ ∴ $س^{٢} = ٤ س$

∴ $س^{٢} - ٤ س = ٠$

∴ $س ( س - ٤ ) = ٠$

و منها : س = ٠ ، س = ٤

، ∵ $ص_{٢} \geq ص_{١}$ لكل : $س \in [ ٠ ، ٤ ]$

∴ $م = \int_{٠}^{٤} ( ص_{٢} - ص_{١} ) ء س$

$= \int_{١}^{٤} ( ٤ س - س^{٢} ) ء س = [ ٢ س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣} ]_{٠}^{٤}$

$= [ ( ٣٢ - \frac{٦٤}{٣} ) - ( ٠ ) ] = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

## ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

**[٢] (أ)** أوجد : (١) $\int \frac{(\text{س}+٣)^{٣}-٢٧}{\text{س}}\,\text{ء س}$ ،

(٢) $\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ء س}$

**الحل**

(١) $\because (\text{س}+٣)^{٣}-٢٧ = (\text{س}+٣-٣)\left[(\text{س}+٣)^{٢}+٣(\text{س}+٣)+٩\right]$

$= \text{س}\,(\text{س}^{٢}+٦\,\text{س}+٩+٣\,\text{س}+٩+٩)$

$= \text{س}\,(\text{س}^{٢}+٩\,\text{س}+٢٧)$

$\therefore$ المقدار $= \int (\text{س}^{٢}+٩\,\text{س}+٢٧)\,\text{ء س}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^{٣}+\frac{٩}{٢}\text{س}^{٢}+٢٧\,\text{س}+\text{ث}$

(٢) نضع : $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ $\therefore \text{ء ص} = ٢\,\text{س ء س}$ ،

$\text{ء ع} = \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ء س}$ $\therefore \text{ع} = -\text{هـ}^{-\text{س}}$

$\therefore$ المقدار $= -\text{س}^{٢}\text{هـ}^{-\text{س}} + ٢\int \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ء س}$

، نضع : $\text{ن} = \text{س}$ $\therefore \text{ء ن} = \text{ء س}$ ،

$\text{ء ل} = \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ء س}$ $\therefore \text{ل} = -\text{هـ}^{-\text{س}}$

$\therefore$ المقدار $= -\text{س}^{٢}\text{هـ}^{-\text{س}} + ٢\left[-\text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}} + \int \text{هـ}^{-\text{س}}\,\text{ء س}\right]$

$= -\text{س}^{٢}\text{هـ}^{-\text{س}} - ٢\,\text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}} - ٢\,\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{ث}$

$= -\text{هـ}^{-\text{س}}\,(\text{س}^{٢}+٢\,\text{س}+٢) + \text{ث}$

**[٣] (أ)** أوجد : $\int_{٠}^{٥} |\,\text{س}-٢\,|\,\text{ء س}$

**الحل**

المقدار $= \int_{٠}^{٢} -(\text{س}-٢)\,\text{ء س} + \int_{٢}^{٥} (\text{س}-٢)\,\text{ء س}$

$= \left[-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}+٢\,\text{س}\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{١}{٢}\text{س}^{٢}-٢\,\text{س}\right]_{٢}^{٥}$

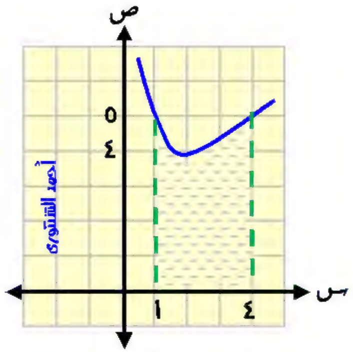
$= \left[(-٢+٤)-٠\right] + \left[\left(\frac{٢٥}{٢}-١٠\right)-(٢-٤)\right] = \frac{١٣}{٢}$

**[٥] (ب)** إذا كانت م المنطقة المحددة بالمنحنى $\text{س ص} = ٤+\text{س}^{٢}$ و المستقيمات $\text{س}=١$ ، $\text{س}=٤$ ، $\text{ص}=٠$ أوجد :

أولاً : مساحة المنطقة م بالوحدات المربعة لأقرب وحدة

ثانياً : حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**




$\text{ص} = \frac{٤+\text{س}^{٢}}{\text{س}} = \frac{٤}{\text{س}} + \text{س}$

$\text{م} = \int_{١}^{٤} \left(\frac{٤}{\text{س}}+\text{س}\right)\text{ء س}$

$= \left[٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} + \frac{١}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{١}^{٤}$

$= ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٤ + ٨ - ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,١ - \frac{١}{٢}$

$= ٤\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,٤ + \frac{١٥}{٢} \simeq ١٣$ وحدة مربعة

$\therefore \text{ح} = \pi\int_{١}^{٤} \text{ص}^{٢}\,\text{ء س} = \pi\int_{١}^{٤} (١٦\,\text{س}^{-٢}+٨+\text{س}^{٢})\,\text{ء س}$

$= \pi\left[-١٦\,\text{س}^{-١}+٨\,\text{س}+\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{١}^{٤}$

$= \pi\left(-٤+٣٢+\frac{٦٤}{٣}\right)-\left(-١٦+٨+\frac{١}{٣}\right)$

$= ٥٧\,\pi$ وحدة مكعبة

# الاختبار التاسع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{-1}^{3} \text{د(س) ء س} = ٧$ ، $\int_{5}^{3} \text{د(س) ء س} = -١١$ فإن : $\int_{-1}^{5} \text{د(س) ء س}$ يساوى ....

(أ) −٤ (ب) ١٨ (حـ) −١٨ (ء) ٧٧

الحل

$\because \int_{5}^{3} \text{د(س) ء س} = -١١ \quad \therefore \int_{3}^{5} \text{د(س) ء س} = ١١$

$\therefore \int_{-1}^{5} \text{د(س) ء س} = \int_{-1}^{3} \text{د(س) ء س} + \int_{3}^{5} \text{د(س) ء س} =$

$= ٧ + ١١ = ١٨$

(٥) $\int_{-1}^{3} |\text{س} - ١| \text{ ء س} = ....$

(أ) −٦ (ب) ٠ (حـ) ٤ (ء) ١

الحل

$\int_{-1}^{3} |\text{س} - ١| \text{ ء س} = \int_{-1}^{1} (-\text{س} + ١) \text{ ء س} + \int_{1}^{3} (\text{س} - ١) \text{ ء س}$

$= [-\frac{١}{٢}\text{س}^2 + \text{س}]_{-1}^{1} + [\frac{١}{٢}\text{س}^2 - \text{س}]_{1}^{3}$

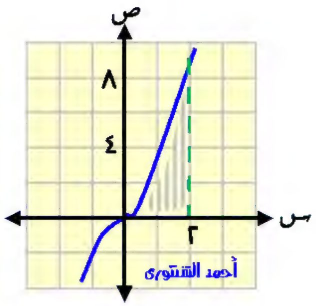
$= [(-\frac{١}{٢} + ١) - (-\frac{١}{٢} - ١)] +$

$[(\frac{٩}{٢} - ٣) - (\frac{١}{٢} - ١)] = ٤$

(٦) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = $\text{س}^3$ و المستقيمين ص = ٠ ، س = ٢ تساوى .... وحدة مربعة

(أ) ١ (ب) ٣ (حـ) ٤ (ء) ٨

الحل




نضع : ص = ٠ $\therefore \text{س}^3 = ٠$

و منها : س = ٠

∴ حدا التكامل هما : س = ٠ ، س = ٢

$\therefore \text{م} = \int_{0}^{2} \text{س}^3 \text{ ء س} = [\frac{١}{٤}\text{س}^4]_{0}^{2}$

$= \frac{١}{٤} \times ١٦ = ٤$ وحدات مربعة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^2 - ١} \text{ ء س}$ ، (٢) $\int ٩ \text{س}^2 \text{هـ}^{\text{س}^3} \text{ ء س}$

الحل

(١) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^2 - ١} \text{ ء س} = \frac{٣}{٢} \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^2 - ١} \text{ ء س} = \frac{٣}{٢} \int \frac{(\text{س}^2 - ١)'}{\text{س}^2 - ١} \text{ ء س}$

$= \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^2 - ١|$

(٢) نضع : ص = $٣ \text{س}^2$ $\therefore$ ء ص = ٦ س ء س ،

ء ع = $٣ \text{هـ}^{\text{س}^3}$ ء س $\therefore$ ع = $\text{هـ}^{\text{س}^3}$

$\therefore$ المقدار = $٣ \text{س}^2 \text{هـ}^{\text{س}^3} - \int ٦ \text{س} \text{هـ}^{\text{س}^3} \text{ ء س}$

، نضع : ق = ٢ س $\therefore$ ء ق = ٢ ء س ،

ء ل = $٣ \text{هـ}^{\text{س}^3}$ ء س $\therefore$ ل = $\text{هـ}^{\text{س}^3}$

∴ المقدار = ٣ س$^{٢}$ هـ$^{٣س}$ − [ ٢ س هـ$^{٣س}$ − ٢ ∫ هـ$^{٣س}$ ء س ]

= ٣ س$^{٢}$ هـ$^{٣س}$ − ٢ س هـ$^{٣س}$ + $\frac{٣}{٢}$ هـ$^{٣س}$ + ث

= هـ$^{٣س}$ ( ٣ س$^{٢}$ − ٢ س + $\frac{٣}{٢}$ ) + ث

**[٥]** المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع منحنى الدالة د فى النقطة حـ ( س ، ص ) حيث س > ٠ ، أ ( ٠ ، ٢ ) ، ب ( ٦ ، ٤ ) ، د (س) = $\frac{٩}{س}$

أوجد : (أ) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (ب) إحداثى نقطة حـ

(حـ) معادلة العمودى على منحنى د عند النقطة حـ ، و أثبت أنه يمر بنقطة الأصل

(ء) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالعمودى $\overleftrightarrow{\text{وحـ}}$ و منحنى الدالى د و المستقيم س = ٦ دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**

(أ) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى : $\frac{ص − ٢}{س − ٠}$ = $\frac{٤ − ٢}{٦ − ٠}$ أى : $\frac{ص − ٢}{س}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ س = ٣ ص − ٦ = ٠ (١)

(ب) ∵ ص = $\frac{٩}{س}$ بالتعويض من (١) ينتج : ص = $\frac{٩}{٣ ص − ٦}$

و منها : ٣ ص$^{٢}$ − ٦ ص + ٩ = ٠

∴ ٣ (ص$^{٢}$ − ٢ ص + ٣ ) = ٠

∴ ٣ ( ص − ٣ ) ( ص + ١ ) = ٠

و منها : ص = ٣ ، ص = − ١

، بالتعويض فى (١) ينتج : عندما : ص = ٣ فإن : س = ٣

، عندما : ص = − ١ فإن : س = − ٩ مرفوض ( حيث : س > ٠ )

∴ إحداثى نقطة حـ ( ٣ ، ٣ )

(حـ) ∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{−٩}{س^{٢}}$

∴ ميل المماس عند حـ = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(٣ ، ٣)}$

= − ١

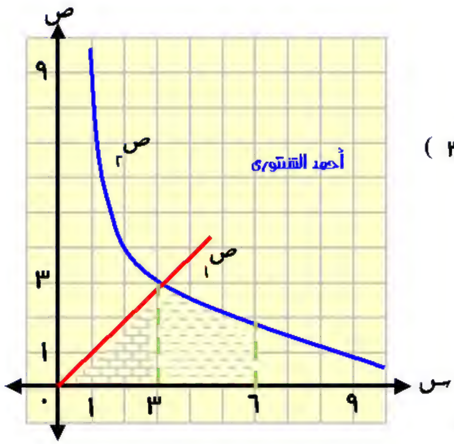
∴ ميل العمودى عند حـ = ١

، معادلة العمودى عند حـ هى :

ص − ٣ = ١ × ( س − ٣ )

أى : ص = س

، ∵ هذه المعادلة لا تحتوى على حد مطلق فإن العمودى عند حـ يمر بنقطة الأصل




(ء) ح = π $\int_{٠}^{٣}$ ص$_{١}^{٢}$ ء س + π $\int_{٣}^{٦}$ ص$_{٢}^{٢}$ ء س

= π $\int_{٠}^{٣}$ س$^{٢}$ ء س + π $\int_{٣}^{٦}$ ٨١ س$^{−٢}$ ء س

= π $\left[ \frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{٠}^{٣}$ + π $\left[ − ٨١ س^{−١} \right]_{٣}^{٦}$

= π ( ٩ − ٠ ) + π ( − $\frac{٨١}{٦}$ + $\frac{٨١}{٣}$ ) = $\frac{٤٥}{٢}$ π وحدة مكعبة

## الاختبار العاشر

**أولاً : أجب عن السؤال التالى :**

**[١]** اكمل ما يلى :

(٤) $\int_{−١}^{٣}$ ( ٤ س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٥ ) ء س = ....

**الحل**

(٤) المقدار = $\left[ س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٥ س \right]_{−١}^{٣}$

= ( ٨١ − ٥٤ + ١٥ ) − ( ١ + ٢ − ٥ ) = ٤٤

(٥) إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ ١ ، ٤ ] فإن :

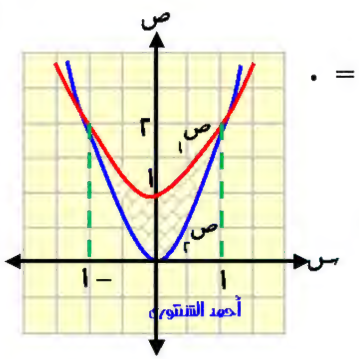
$$\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{د(س) ءس} + \int_{\text{٤}}^{\text{١}} \text{د(س) ءس} = \text{....}$$

الحل

(٥) ∵ $\int_{\text{٤}}^{\text{١}} \text{د(س) ءس} = -\int_{\text{١}}^{\text{٤}} \text{د(س) ءس}$ ∴ المقدار = صفر

(٦) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $\text{ص} = \text{س}^{\text{٤}} + \text{١}$ ، $\text{ص} = \text{٢ س}^{\text{٢}}$ تساوى .... وحدة مربعة

الحل




(٥) $\text{ص}_{\text{١}} = \text{س}^{\text{٤}} + \text{١}$ ، $\text{ص}_{\text{٢}} = \text{٢ س}^{\text{٢}}$

نضع : $\text{ص}_{\text{١}} = \text{ص}_{\text{٢}}$ ∴ $\text{س}^{\text{٤}} + \text{١} = \text{٢ س}^{\text{٢}}$

∴ $\text{س}^{\text{٤}} - \text{٢ س}^{\text{٢}} + \text{١} = \text{٠}$ ∴ $(\text{س}^{\text{٢}} - \text{١})^{\text{٢}} = \text{٠}$

∴ $(\text{س} - \text{١})(\text{س} + \text{١}) = \text{٠}$

و منها : س = ١ ، س = –١

، ∵ $\text{ص}_{\text{١}} \geq \text{ص}_{\text{٢}}$ لكل : س ∈ [–١ ، ١]

∴ $\text{م} = \int_{-\text{١}}^{\text{١}} (\text{ص}_{\text{١}} - \text{ص}_{\text{٢}}) \text{ ءس}$

$= \text{٢} \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{ص}_{\text{١}} - \text{ص}_{\text{٢}}) \text{ ءس}$

$= \text{٢} \int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{س}^{\text{٤}} + \text{١} - \text{٢ س}^{\text{٢}}) \text{ ءس}$

$= \text{٢} \left[ \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{س}^{\text{٥}} + \text{س} - \frac{\text{٢}}{\text{٣}} \text{س}^{\text{٣}} \right]_{\text{٠}}^{\text{١}}$

$= \text{٢} \left[ \left(\frac{\text{١}}{\text{٥}} + \text{١} - \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\right) - (\text{٠}) \right] = \frac{\text{١٦}}{\text{١٥}}$ وحدة مربعة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \text{طا}(\text{٣ س} + \text{١}) \text{ ءس}$ ،

(٢) $\int (\text{١} - \text{س}^{\text{٢}})(\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٥}} \text{ ءس}$

الحل

(١) $\int \text{طا}(\text{٣ س} + \text{١}) \text{ ءس} = \int \frac{\text{حا}(\text{٣ س} + \text{١})}{\text{حتا}(\text{٣ س} + \text{١})} \text{ ءس}$

$= -\frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \frac{-\text{٣ حا}(\text{٣ س} + \text{١})}{\text{حتا}(\text{٣ س} + \text{١})} \text{ ءس} = -\frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \frac{\text{حتا}'(\text{٣ س} + \text{١})}{\text{حتا}(\text{٣ س} + \text{١})} \text{ ءس}$

$= -\frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{حتا}(\text{٣ س} + \text{١})|$

(٢) $\int (\text{١} - \text{س}^{\text{٢}})(\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٥}} \text{ ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٥}} (\text{٣} - \text{٣ س}^{\text{٢}}) \text{ ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٥}} (\text{٣} - \text{٣ س}^{\text{٢}}) \text{ ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٥}} (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})' \text{ ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{٦}} (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٦}} + \text{ث} = \frac{\text{١}}{\text{١٨}} (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٦}} + \text{ث}$

حل آخر

نضع : $\text{ع} = \text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}}$

∴ $\text{ءع} = (\text{٣} - \text{٣ س}^{\text{٢}}) \text{ ءس} = \text{٣} (\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}) \text{ ءس}$

∴ المقدار $= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٥}} \times \text{٣} (\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}) \text{ ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \text{ع}^{\text{٥}} \text{ ءع} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \frac{\text{١}}{\text{٦}} \text{ع}^{\text{٦}} + \text{ث}$

$= \frac{\text{١}}{\text{١٨}} (\text{٣ س} - \text{س}^{\text{٣}})^{\text{٦}} + \text{ث}$

[٣] (ب) إذا كان $\int_{2}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = 9$ ، $\int_{5}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = 4$

أوجد قيمة $\int_{-2}^{5} [\,3\,\text{د}(\text{س}) - 6\,\text{س}\,]\,\text{ءس}$

الحل

، $\because \int_{5}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = 4$ $\therefore \int_{3}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = -4$

، $\because \int_{-2}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = 9$

$\therefore \int_{-2}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{-2}^{3} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{3}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = 9 - 4 = 5$

$\therefore \int_{-2}^{5} [\,3\,\text{د}(\text{س}) - 6\,\text{س}\,]\,\text{ءس} = 3\int_{-2}^{5} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

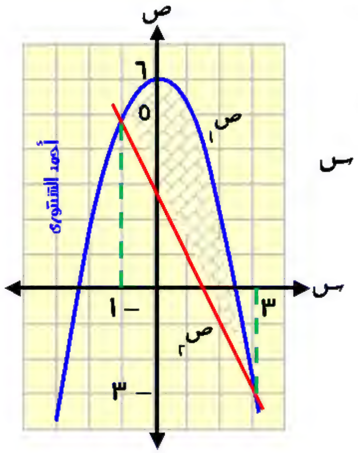
$- 6\int_{-2}^{5} \text{س}\,\text{ءس} = 3 \times 5 - 6\left[\frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{-2}^{5}$

$= 15 - 6\left(\frac{25}{2} - 2\right) = 15 - 75 + 12 = -48$

[٤] (أ) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين

$\text{ص} + \text{س}^2 = 6$ ، $\text{ص} + 2\,\text{س} - 3 = 0$ .

الحل




(٥) $\text{ص}_1 = 6 - \text{س}^2$ ، $\text{ص}_2 = 3 - 2\,\text{س}$

نضع : $\text{ص}_1 = \text{ص}_2$ $\therefore 6 - \text{س}^2 = 3 - 2\,\text{س}$

$\therefore \text{س}^2 - 2\,\text{س} - 3 = 0$ .

$\therefore (\text{س} - 3)(\text{س} + 1) = 0$ .

و منها : س = ٣ ، س = −١

، $\because \text{ص}_1 \geq \text{ص}_2$ لكل : $\text{س} \in [-1 ، 3]$

$\therefore \text{م} = \int_{-1}^{3} (\text{ص}_1 - \text{ص}_2)\,\text{ءس}$

$= \int_{-1}^{3} (6 - \text{س}^2 - 3 + 2\,\text{س})\,\text{ءس}$

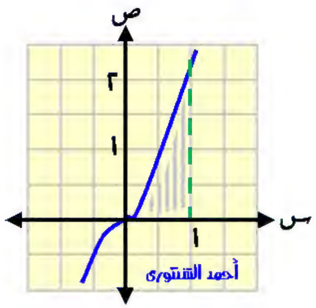
$= \int_{-1}^{3} (3 - \text{س}^2 + 2\,\text{س})\,\text{ءس}$

$= \left[3\,\text{س} - \frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{س}^2\right]_{-1}^{3}$

$= (9 - 9 + 9) - (-3 + \frac{1}{3} + 1) = \frac{32}{3}$ وحدة مربعة

[٥] (ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنيات $\text{ص} = \text{س}^3 + 1$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات

الحل




حدود التكامل هى : س = ٠ ، س = ١

و المنطقة تقع فوق محور السينات لأن : ص = ٠

و الدوران حول محور السينات

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{0}^{1} \text{ص}^2\,\text{ءس}$

$= \pi \int_{0}^{1} (\text{س}^6 + 2\,\text{س}^3 + 1)\,\text{ءس}$

$= \pi \left[\frac{1}{7}\text{س}^7 + \frac{1}{2}\text{س}^4 + \text{س}\right]_{0}^{1}$

$= \pi \left[(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 1) - (0)\right] = \frac{23}{14}\pi$ وحدة مكعبة

تم بحمد الله و عونه

أحمد الشتورى

# اجابات اختبارات التفاضل و التكامل
## الاختبار الأول

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) أى الدوال التالية تحقق العلاقة : $\frac{ء^3 ص}{ء س^3} = ص$

(أ) $ص = \frac{1}{12}(س+1)^4$ (ب) ص = حاس

(جـ) $ص = هـ^{س}$ (ء) $ص = \frac{س}{س - 1}$

الحل

بايجاد المشتقة الثالثة للدوال نجد أن : الدالة $ص = هـ^{س}$ تحقق العلاقة حيث :

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء^2 ص}{ء س^2} = \frac{ء^3 ص}{ء س^3} = هـ^{س}$ " إدرس الدوال الأخرى بنفسك "

(٢) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{1}{\pi}$ سم / ث فإن محيط الدائرة يزداد بمعدل .... سم / ث

(أ) $\frac{2}{\pi}$ (ب) ٢ (جـ) $\pi$ (ء) $2\pi$

الحل

∵ $م = 2\pi نق$ ∴ $\frac{ءم}{ءن} = 2\pi \frac{ءنق}{ءن} = 2\pi \times \frac{1}{\pi} = 2$

(٣) منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^3 - 3س^2 + 2$ محدب لأعلى عندما س ∈ ....

(أ) $]-\infty ، 0[$ (ب) $]-\infty ، 1[$

(جـ) $]1 ، 3[$ (ء) $]1 ، \infty[$

الحل

∵ $د(س) = س^3 - 3س^2 + 2$ ∴ $د'(س) = 3س^2 - 6س$

، $د''(س) = 6س - 6 = 6(س - 1)$

عندما : $د''(س) = 0$ فإن : س = ١

من الجدول المقابل الذى يبين إشارة د''

ينتج : المنحنى محدب لأعلى

فى $]-\infty ، 1[$

| س | ∞ | ١ | ∞− |
|---|---|---|---|
| إشارة د'' | + | ٠ | − |
| تحدب منحنى د | لأسفل | | لأعلى |

(٤) $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (حاس + حتاس)\, ءس$ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) صفر (ء) $\pi$

الحل

$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (حاس + حتاس)\, ءس = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} (حاس + حتاس)\, ءس$

$= [-حتاس + حاس]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = (-حتا \frac{1}{2}\pi + حا \frac{1}{2}\pi) -$

$(-حتا 0 + حا 0) = (-0 + 1) - (-1 + 0) = 2$

(٥) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{3}^{5} 2د(س)\, ءس = 8$ ، $\int_{3}^{4} 3د(س)\, ءس = 9$ فإن $\int_{4}^{5} 5د(س)\, ءس = ....$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (ء) ٥

الحل

∵ $\int_{3}^{5} 2د(س)\, ءس = 8$ ∴ $2ت(5) - 2ت(3) = 8$

∴ $ت(5) - ت(3) = 4$ و منها : $ت(3) = ت(5) - 4$ (١)

، ∵ $\int_{3}^{4} 3د(س)\, ءس = 9$ ∴ $3ت(4) - 3ت(3) = 9$

∴ $ت(4) - ت(3) = 3$ ، و بالتعويض من (١) ينتج :

$ت(4) - ت(5) + 4 = 3$ ∴ $ت(4) - ت(5) = -1$

∴ $ت(5) - ت(4) = 1$ ∴ $\int_{4}^{5} 5د(س)\, ءس = 5$

(٦) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ و محور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى ....

(أ) ١٦ $\pi$ (ب) ١٢ $\pi$ (حـ) ٨ $\pi$ (د) ٤ $\pi$

**الحل**

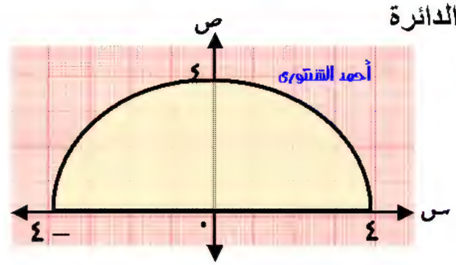
للحل المباشر :

∵ ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ بالتربيع : ص$^{٢}$ = ١٦ − س$^{٢}$

∴ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١٦ و هى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها = ٤ وحدات طول فتكون : مساحتها = ١٦ $\pi$ وحدات مربعة

∴ ص = $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ تمثل نصف هذه الدائرة

فتكون : مساحتها = ٨ $\pi$ وحدات مربعة




الحل بالتكامل :

نضع : ص = ٠ ∴ ١٦ − س$^{٢}$ = ٠

و منها : س = ٤ ، س = −٤

و هما حدا التكامل

∴ المساحة المطلوبة ( م ) = $\int_{-٤}^{٤} \sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ء س = ٢ $\int_{٠}^{٤} \sqrt{١٦ - س^{٢}}$ ء س

نضع : س = ٤ حا θ ∴ ء س = ٤ حتا θ ء θ

، عندما : س = ٠ فإن : حا θ = ٠ ∴ θ = ٠

، عندما : س = ٤ فإن : حا θ = ١ ∴ θ = $\frac{١}{٢}$ $\pi$

، ١٦ − س$^{٢}$ = ١٦ − ١٦ حا$^{٢}$ θ = ١٦ ( ١ − حا$^{٢}$ θ ) = ١٦ حتا$^{٢}$ θ

∴ $\sqrt{١٦ - س^{٢}}$ = ٤ حتا θ

∴ م = ٢ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٤ حتا θ × ٤ حتا θ ء θ = ١٦ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٢ حتا$^{٢}$ θ ء θ

= ١٦ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ( حتا ٢ θ + ١ ) ء θ = ١٦ $\left[ \frac{١}{٢} \right.$ حا ٢ θ + θ $\left. \right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= ١٦ [ $\frac{١}{٢}$ حا $\pi$ + $\frac{١}{٢}$ $\pi$ − $\frac{١}{٢}$ حا ٠ − ٠ ] = ١٦ × $\frac{١}{٢}$ $\pi$ = ٨ $\pi$ وحدات مربعة

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

[٢] (أ) أوجد : $\int$ حا س حتا$^{٣}$ س ء س

**الحل**

$\int$ حا س حتا$^{٣}$ س ء س = − $\int$ حتا$^{٣}$ س ( − حا س ) ء س

= − $\int$ حتا$^{٣}$ س ( حتا س )$'$ ء س = − $\frac{١}{٤}$ حتا$^{٤}$ س + ث

(ب) إذا كان : هـ$^{س ص}$ − س$^{٢}$ + ص$^{٣}$ = ٠ .

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٠ .

**الحل**

∵ هـ$^{س ص}$ − س$^{٢}$ + ص$^{٣}$ = ٠ . باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ ص هـ$^{س ص}$ + س هـ$^{س ص}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ س + ٣ ص$^{٢}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ . (١)

عند : س = ٠ . فإن : هـ$^{٠}$ − ٠ + ص$^{٣}$ = ٠ .

∴ ١ + ص$^{٣}$ = ٠ . و منها : ص = −١ بالتعويض من (١) ينتج :

( −١ ) × هـ$^{٠}$ + ٠ × هـ$^{٠}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ × ٠ + ٣ × ( −١ )$^{٢}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ .

∴ ( −١ ) × ٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ . و منها : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٣}$

[٣] (أ) أوجد معادلة المماس للمنحنى :

س$^{٢}$ − ٣ س ص − ص$^{٢}$ + ٣ = ٠ . عند النقطة ( −١ ، ٤ )

**الحل**

∵ س$^{٢}$ − ٣ س ص − ص$^{٢}$ + ٣ = ٠ . باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

$٢ س - ٣ ص - ٣ س \frac{ع ص}{ع س} - ٢ ص \frac{ع ص}{ع س} = ٠$

و منها : $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٢ س - ٣ ص}{٣ س + ٢ ص}$

∴ م ( ميل المماس ) = $\left[\frac{ع ص}{ع س}\right]_{(-١ ، ٤)} = -\frac{١٤}{٥}$

∴ معادلة المماس هى : $ص - ٤ = -\frac{١٤}{٥} ( س + ١ )$

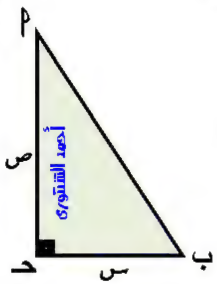
أى : $١٤ س + ٥ ص - ٦ = ٠$

**(ب)** مثلث قائم الزاوية ، فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة ٦ سم ، ٣٠ سم ، فإذا كان طول الضلع الأول يتزايد بمعدل $\frac{١}{٣}$ سم / د ، و طول الضلع الثانى يتناقص بمعدل ١ سم / د أوجد :

١ – معدل التزايد فى مساحة المثلث بعد ٣ دقائق

٢ – الزمن الذى بعده يتوقف تزايد مساحة المثلث

**الحل**




نفرض أن : س ، ص طولا ضلعى القائمة بعد ن دقيقة ، م مساحة المثلث حينئذ حيث س ، ص ، م دوال فى الزمن

∴ $س = ٦ + \frac{١}{٣} ن$ ، $ص = ٣٠ - ن$

∴ $م = \frac{١}{٢} س ص = \frac{١}{٢} (٦ + \frac{١}{٣} ن)(٣٠ - ن)$

$= ٩٠ + ٢ ن - \frac{١}{٦} ن^٢$ ، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{ع م}{ع ن} = ٢ - \frac{١}{٣} ن$

بعد ٣ دقائق : ∴ $\frac{ع م}{ع ن} = ٢ - \frac{١}{٣} × ٣ = ١$ سم / د

يتوقف تزايد المساحة عندما : $\frac{ع م}{ع ن} = ٠$

أى عندما : $٢ - \frac{١}{٣} ن = ٠$ و منها : ن = ٦ دقائق

**[٤] (أ)** حدد فترات التزايد و التناقص للدالة د حيث :

$د(س) = س + ٢ حا س$ ، $٠ < س < ٢π$

**الحل**

∵ $د(س) = س + ٢ حا س$ ∴ $د'(س) = ١ + ٢ حتا س$

بوضع $د'(س) = ٠$ يكون : $حتا س = -\frac{١}{٢}$

∴ $د'(س) = ٠$ عندما : $س = \frac{٢}{٣}π$ ، $س = \frac{٤}{٣}π$

∴ إشارة $د'(س)$ كما بالجدول التالى و تكون :

| س | ٠ | | $\frac{٢}{٣}π$ | | $\frac{٤}{٣}π$ | | $٢π$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′ | | + | ٠ | – | ٠ | + | |
| سلوك د | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

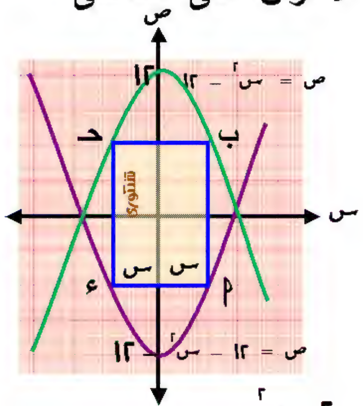
د(س) متزايدة فى الفترة $]٠ ، \frac{٢}{٣}π[$

د(س) متناقصة فى الفترة $]\frac{٢}{٣}π ، \frac{٤}{٣}π[$

د(س) متزايدة فى الفترة $]\frac{٤}{٣}π ، ٢π[$

**(ب)** رسم مستطيل بحيث يقع رأسان متجاوران منه على المنحنى $ص = س^٢ - ١٢$ و الرأسان الآخران على المنحنى $ص = ١٢ - س^٢$ أحسب أكبر مساحة لهذا المستطيل

**الحل**




بفرض أن : أ ء = ٢ س وحدة طول

و من هندسة الشكل نجد :

$أ ( س ، س^٢ - ١٢ )$ ،

$ب ( س ، ١٢ - س^٢ )$

∴ $أ ب = ١٢ - س^٢ - س^٢ + ١٢ = ٢٤ - ٢ س^٢$

∴ مساحة المستطيل م = أ ء × أ ب = ٢ س ( ٢٤ − ٢ $س^٢$ )

أى أن : م = د(س) = ٤٨ س − ٤ $س^٣$

، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $د^/(س)$ = ٤٨ − ١٢ $س^٢$ = −١٢ ( $س^٢$ − ٤ ) ، $د^{//}(س)$ = −٢٤ س

عند $د^/(س)$ = ٠ ∴ س = ٢ ، س = −٢ مرفوض

، ∵ $د^{//}(٢)$ = −٤٨ < ٠ ∴ عند س = ٢ تكون المساحة أكبر ما يمكن

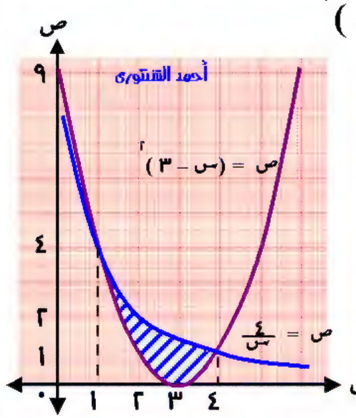
∴ م = ٤٨ × ٢ − ٤ × ٨ = ٦٤ وحدة مربعة

[٥] (أ) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين

ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = $( س − ٣ )^٢$

دورة كاملة حول محور السينات

الحل




بفرض : $ص_١$ = $\frac{٤}{س}$ ، $ص_٢$ = $( س − ٣ )^٢$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $ص_١$ = $ص_٢$

∴ س $( س − ٣ )^٢$ = ٤

∴ $س^٣$ − ٦ $س^٢$ + ٩ س − ٤ = ٠

∴ ( $س^٣$ − ١ ) − ( ٦ $س^٢$ − ٩ س + ٣ ) = ٠

∴ ( س − ١ )( $س^٢$ + س + ١ ) − ( س − ١ )( ٦ س − ٣ ) = ٠

∴ ( س − ١ ) ( $س^٢$ + س + ١ − ٦ س + ٣ ) = ٠

∴ ( س − ١ )( $س^٢$ − ٥ س + ٤ ) = ٠

∴ ( س − ١ )( س − ١ )( س − ٤ ) = ٠

∴ س = ١ ، س = ٤ لاحظ : نقط التقاطع من الشكل

، ∵ $ص_١$ ≥ $ص_٢$ لكل : س ∈ [ ١ ، ٤ ]

∴ ح = $\pi \int_{١}^{٤} ( ص_١^٢ − ص_٢^٢ )$ ء س

= $\pi \int_{١}^{٤} ( \frac{١٦}{س^٢} − ( س − ٣ )^٤ )$ ء س

= $\pi \left[ −\frac{١٦}{س} − \frac{١}{٥} ( س − ٣ )^٥ \right]_{١}^{٤}$

= $\pi$ [ ( −٤ − $\frac{١}{٥}$ × ١ ) − ( −١٦ − $\frac{١}{٥}$ × −٣٢ ) ]

= $\frac{٢٧}{٥} \pi$ وحدة مكعبة

(ب) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د الذى يحقق الخواص التالية :

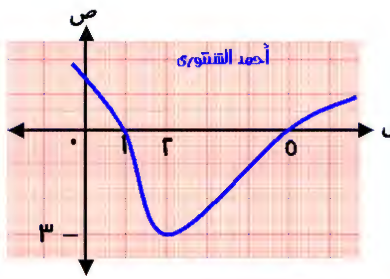
د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = −٣ ،

$د^{//}(س)$ > ٠ لكل س ≠ ٠ ،

$د^/(س)$ < ٠ لكل س < ٢ ،

$د^/(س)$ > ٠ لكل س > ٢

الحل




∵ د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = −٣

∴ المنحنى يمر بالنقط (١ ، ٠) ،

(٥ ، ٠) ، (٢ ، −٣)

∵ $د^{//}(س)$ > ٠ لكل س ≠ ٠ .

∴ المنحنى محدب لأعلى فى ] −∞ ، ٢ [ ، ] ٢ ، ∞ [

∵ $د^/(س)$ < ٠ لكل س < ٢ ، $د^/(س)$ > ٠ لكل س > ٢

∴ (٢ ، −٣) نقطة صغرى محلية ، د(س) متناقصة فى ] −∞ ، ٢ ]

، د(س) متزايدة فى [ ٢ ، ∞ [

## الاختبار الثانى

**أولاً : أجب عن السؤال التالى :**

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث : د (س) = هـ$^{٢س+١}$ عند النقطة ( $-\frac{١}{٢}$ ، ١ ) هى ....

(أ) ٢ ص = س + ١  (ب) ص = ٢ س + ٢

(جـ) ص = ٢ س − ٣  (ء) ٢ ص = ٣ س + ١

الحل

∵ د (س) = هـ$^{٢س+١}$  ∴ د$'$(س) = ٢ هـ$^{٢س+١}$

∴ م ( ميل المماس ) = $[$د$'$(س)$]_{(-\frac{١}{٢} ، ١)}$ = ٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ١ = ٢ ( س + $\frac{١}{٢}$ )

أى : ص = ٢ س + ٢

(٢) إذا كان ص = ٤ ن$^{٣}$ + ٤ ، ع = ٣ ن$^{٢}$ − ٢ فإن معدل تغير ع بالنسبة إلى ص يساوى ....

(أ) ٢ ن  (ب) ٢  (جـ) $\frac{١}{٢ن}$  (ء) ٤

الحل

∵ ص = ٤ ن$^{٣}$ + ٤ ، ع = ٣ ن$^{٢}$ − ٢

∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ١٢ ن$^{٢}$ ، $\frac{ءع}{ءن}$ = ٦ ن

∴ $\frac{ءع}{ءص}$ = $\frac{ءع}{ءن}$ ÷ $\frac{ءص}{ءن}$ = $\frac{١}{٢ن}$



(٣) أكبر قيمة للمقدار : ٨ س − س$^{٢}$ حيث س ∈ ح هى ....

(أ) ٨  (ب) ١٦  (جـ) ٣٢  (ء) ٦٤

الحل

بفرض أن : د (س) = ٨ س − س$^{٢}$  ∴ د$'$(س) = ٨ − ٢ س

، د$''$(س) = −٢  عندما : د$'$(س) = ٠ فإن : س = ٤

، ∵ د$''$(٤) = −٢ < ٠  ∴ عند س = ٤ يكون للمقدار أكبر قيمة

∴ د(٤) = ٣٢ − ١٦ = ١٦

(٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{س - ٢}$ و كان المنحنى يمر بالنقطة ( ٣ ، ٠ ) فإن د ( هـ$^{٢}$ + ٢ ) تساوى ....

(أ) ٢  (ب) ٣  (جـ) لو$_{هـ}$ ٢  (ء) لو$_{هـ}$ ٣

الحل

∵ د$'$(س) = $\frac{١}{س - ٢}$  ∴ د(س) = $\int \frac{١}{س - ٢}$ ء س

∴ د(س) = لو$_{هـ}$ | س − ٢ | + ث ، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( ٣ ، ٠ )

∴ ٠ = لو$_{هـ}$ | ١ | + ث  و منها : ث = ٠

∴ د(س) = لو$_{هـ}$ | س − ٢ |

، د ( هـ$^{٢}$ + ٢ ) = لو$_{هـ}$ | هـ$^{٢}$ + ٢ − ٢ | = لو$_{هـ}$ | هـ$^{٢}$ | = ٢ لو$_{هـ}$ هـ = ٢

(٥) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{١}^{٢}$ د(س) ء س = ٩ ، $\int_{٦}^{٢}$ د(س) ء س = −٧ فإن $\int_{١}^{٦}$ د(س) ء س = ....

(أ) ٢　　(ب) ٨　　(حـ) ١٦　　(ء) − ٦٣

الحل

∵ $\int_{1}^{2}$ د(س) ءس = ٩　　∴ ت(٢) − ت(١) = ٩　　(١)

، ∵ $\int_{6}^{2}$ د(س) ءس = −٧　　∴ ت(٢) − ت(٦) = −٧　　(٢)

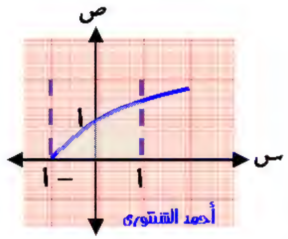
بطرح (٢) من (١) ينتج : ت(٦) − ت(١) = ١٦

∴ $\int_{1}^{6}$ د(س) ءس = ١٦

(٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = $\sqrt{\text{س} + 1}$ و المستقيمات ص = ٠ ، س = −١ ، س = ١ تساوى ....

(أ) $\pi$　　(ب) $\frac{3}{2}\pi$　　(حـ) $2\pi$　　(ء) $\frac{5}{2}\pi$

الحل




ع = $\pi \int_{-1}^{1}$ ص² ءس

= $\pi \int_{-1}^{1}$ (س + ١) ءس

= $\pi$ [ $\frac{1}{2}$ س² + س ]$_{-1}^{1}$

= $\pi$ [ ( $\frac{1}{2}$ + ١ ) − ( $\frac{1}{2}$ − ١ ) ] = $2\pi$ وحدة مكعبة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int$ س (٢س − ١)³ ءس ،　(٢) $\int$ س هـ$^{-2\text{س}}$ ءس

الحل

(١) $\int$ س (٢س − ٣)³ ءس = $\frac{1}{2}\int$ ٢س (٢س − ١)³ ءس

= $\frac{1}{2}\int$ (٢س − ١ + ١)(٢س − ١)³ ءس

= $\frac{1}{2}\int$ (٢س − ١)⁴ ءس + $\frac{1}{2}\int$ (٢س − ١)³ ءس

= $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ × (٢س − ١)⁵ + $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ × (٢س − ١)⁴ + ث

= $\frac{1}{20}$ (٢س − ١)⁵ + $\frac{1}{16}$ (٢س − ١)⁴ + ث

= $\frac{1}{80}$ (٢س − ١)⁴ [ ٤(٢س − ١) + ٥ ] + ث

= $\frac{1}{80}$ (٢س − ١)⁴ (٨س + ١) + ث

حل آخر

نضع : ص = ٢س − ١　　∴ ءص = ٢ ءس

∴ ءس = $\frac{1}{2}$ ءص　　، س = $\frac{1}{2}$ ( ص + ١ )

∴ المقدار = $\int \frac{1}{2}$ ( ص + ١ ) × ص³ × $\frac{1}{2}$ ءص

= $\frac{1}{4}\int$ ( ص⁴ + ص³ ) ءص = $\frac{1}{4}$ [ $\frac{1}{5}$ ص⁵ + $\frac{1}{4}$ ص⁴ ] + ث

= $\frac{1}{20}$ ص⁵ + $\frac{1}{16}$ ص⁴ + ث = $\frac{1}{80}$ ص⁴ ( ٤ص + ٥ ) + ث

= $\frac{1}{80}$ (٢س − ١)⁴ [ ٤(٢س − ١) + ٥ ] + ث

= $\frac{1}{80}$ (٢س − ١)⁴ (٨س + ١) + ث

(٢) نضع : ص = س　　∴ ءص = ءس ،

ءع = هـ$^{-2\text{س}}$ ءس　　∴ ع = − $\frac{1}{2}$ هـ$^{-2\text{س}}$

∴ المقدار = − $\frac{1}{2}$ س هـ$^{-2\text{س}}$ + $\frac{1}{2}\int$ هـ$^{-2\text{س}}$ ءس

$= -\frac{1}{2}$ س هـ$^{-٢س}$ $- \frac{1}{4}$ هـ$^{-٢س}$ + ث

$= -\frac{1}{2}$ هـ$^{-٢س}$ (٢ س + ١) + ث

**(ب)** أوجد معدل تغير $\sqrt{١٦ + س^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س - ٢}$ عندما س = − ٣

**الحل**

نضع : ص = $\sqrt{١٦ + س^٢}$ = $(١٦ + س^٢)^{\frac{1}{2}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2}(١٦ + س^٢)^{-\frac{1}{2}} \times ٢س = \frac{س}{\sqrt{١٦ + س^٢}}$

، ع = $\frac{س}{س - ٢}$ ∴ $\frac{ءع}{ءس} = \frac{(س - ٢) \times ١ - س \times ١}{(س - ٢)^٢} = \frac{-٢}{(س - ٢)^٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{س}{\sqrt{١٦ + س^٢}} \times \frac{(س - ٢)^٢}{-٢}$

، عندما س = − ٣ ∴ $\frac{ءص}{ءع} = -\frac{٣}{٥} \times -\frac{٢٥}{٢} = \frac{١٥}{٢}$

**[٣] (أ)** إذا كان : س حتا ص + ص حتا س = ١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

**الحل**

∵ س حتا ص + ص حتا س = ١ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

حتا ص − س حا ص $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ حتا س − ص حا س = ٠

∴ ( حتا س − س حا ص ) $\frac{ءص}{ءس}$ = ص حا س − حتا ص

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{ص حا س − حتا ص}}{\text{حتا س − س حا ص}}$

**(ب)** أوجد القيم القصوى للدالة د فى الفترة [ − ١ ، ١ ]

حيث : د(س) = ٢ س$^٣$ + ٦ س$^٢$ + ٥

**الحل**

∵ د(س) = ٢ س$^٣$ + ٦ س$^٢$ + ٥

∴ د$'$(س) = ٦ س$^٢$ + ١٢ س = ٦ س ( س + ٢ )

نضع : د$'$(س) = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [ −١ ، ١ ]

، س = − ٢ ∉ [ −١ ، ١ ] " مرفوض "

∴ د ( ٠ ) = ٥ ، د ( − ١ ) = ٩ ، د ( ١ ) = ١٣

∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٣ ، القيمة الصغرى المطلقة = ٥

**[٤] (أ)** إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٢\,س + س^٢ & \text{عندما } س < ٠ \\ ٢\,س - س^٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \end{cases}$ أوجد :

**(١)** القيم العظمى و الصغرى المحلية للدلة د

**(٢)** $\int_{-١}^{٣}$ د (س) ء س

**الحل**

**(١)** ∵ د ( ٠$^+$ ) = د ( ٠$^-$ ) = د ( ٠ ) = ٠

∴ د (س) متعددة التعريف مجاهـا ح و متصلة عند س = ٠ أى متصلة على ح

، ∵ عندما : س > ٠ فإن : د ( ٠ + و ) − د ( ٠ ) = ٢ ( ٠ + و ) + ( ٠ + و )$^٢$ − ٠

= ٢ و + و$^٢$ = و ( ٢ + و )

∴ د$'$( ٠$^+$ ) = $\lim_{و \to ٠^+} \frac{د(٠ + و) - د(٠)}{و}$ = $\lim_{و \to ٠^+} \frac{و(٢ + و)}{و}$ = ٢

، ∵ عندما : س < ٠ فإن : د ( ٠ + و ) − د ( ٠ ) = ٢ ( ٠ + و ) − ( ٠ + و )$^٢$ − ٠

$= ٢و - و^{٢} = و\,(٢ - و)$

، $د^{/}(٠)^{-} = \underset{و \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{د(٠ + و) - د(٠)}{و} = \underset{و \to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \dfrac{و\,(٢ - و)}{و} = ٢$

∴ $د^{/}(٠)^{+} = د^{/}(٠)^{-} = ٢$ ∴ $د^{/}(س) = \begin{cases} ٢ + ٢س & \text{عندما } س < ٠ \\ ٢ & \text{عندما } س = ٠ \\ ٢ - ٢س & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

بوضع : $د^{/}(س) = ٠$ ∴ $٢ + ٢س = ٠$ عندما $س < ٠$ و منها : $س = -١$

، $٢ - ٢س = ٠$ عندما $س > ٠$ و منها : $س = ١$

∴ $(١ ، ١)$ ، $(-١ ، -١)$ نقطتان حرجتان من الجدول التالى :

| س | ∞ − | | ١ − | | ٠ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ | | − | ٠ | + | ٠ | + | ٠ | − | |
| سلوك د | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | |

$د(١) = ١$ قيمة عظمى محلية ، $د(-١) = -١$ قيمة صغرى محلية

(٢) $\int_{-١}^{٣} د(س)\,ء س = \int_{-١}^{٠} (٢س + س^{٢})\,ء س + \int_{٠}^{٣} (٢س - س^{٢})\,ء س = [س^{٢} + \frac{١}{٣}س^{٣}]_{-١}^{٠} + [س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}]_{٠}^{٣} = (٠ - ١ + \frac{١}{٣}) + (٩ - ٩ - ٠) = -\frac{٢}{٣}$

(ب) يتزايد حجم مكعب بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله بمعدل ٢٧ سم$^{٣}$ / د ، أوجد معدل الزيادة فى مساحة أوجهه عند اللحظة التى يكون فيها طول حرفه ٣ سم

الحل

بفرض أن : طول حرف المكعب = ل وحدة طول

∴ حجم المكعب $ع = ل^{٣}$ وحدة مكعبة ∴ $\dfrac{ءع}{ءن} = ٣ل^{٢} \times \dfrac{ءل}{ءن}$

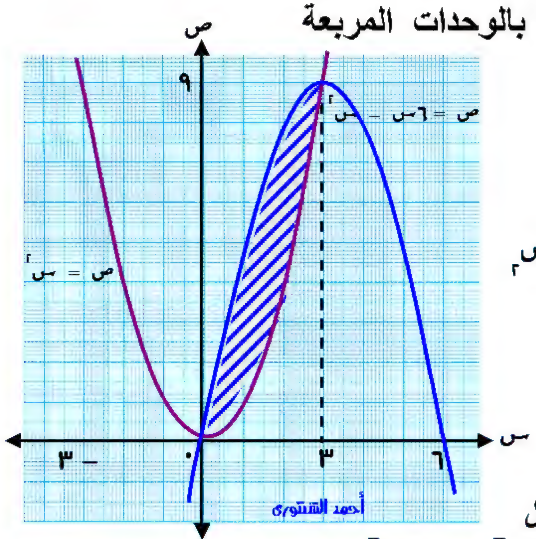
∴ $٢٧ = ٣ \times ٩ \times \dfrac{ءل}{ءن}$ و منها : $\dfrac{ءل}{ءن} = ١$ سم / د

، ∵ مساحة أوجه المكعب $م = ٦ل^{٢}$

∴ $\dfrac{ءم}{ءن} = ١٢ل \times \dfrac{ءل}{ءن} = ١٢ \times ٣ \times ١ = ٣٦$ سم$^{٢}$ / د

[٥] (أ) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $ص = س^{٢}$ ، $ص = ٦س - س^{٢}$ بالوحدات المربعة

الحل




بفرض : $ص_{١} = س^{٢}$ ،

$ص_{٢} = ٦س - س^{٢}$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $ص_{١} = ص_{٢}$

∴ $س^{٢} = ٦س - س^{٢}$

∴ $٢س^{٢} - ٦س = ٠$

∴ $٢س\,(س - ٣) = ٠$

∴ $س = ٠$ ، $س = ٣$

لاحظ : نقط التقاطع من الشكل المقابل

، ∵ $ص_{٢} \geq ص_{١}$ لكل : $س \in [٠ ، ٣]$

∴ $م = \int_{٠}^{٣} (ص_{٢} - ص_{١})\,ء س = \int_{٠}^{٣} (٦س - س^{٢} - س^{٢})\,ء س$

$= \int_{٠}^{٣} (٦س - ٢س^{٢})\,ء س = [٣س^{٢} - \frac{٢}{٣}س^{٣}]_{٠}^{٣}$

$= (٢٧ - ١٨) - (٠) = ٩$ وحدة مربعة

(ب) إذا كان للدالة د حيث $د(س) = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س$ نقطة إنقلاب عند $(٢ ، ٢)$ فأوجد قيمتى الثابتين أ ، ب ثم إرسم الشكل العام لمنحنى الدالة

الحل

∵ د(س) = س$^{٣}$ + أ س$^{٢}$ + ب س    ∴ د$'$(س) = ٣ س$^{٢}$ + ٢ أ س + ب

، د$''$(س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ ( ٢ ، ٢ ) نقطة إنقلاب للدالة

∴ د$''$(٢) = ٠    ∴ ١٢ + ٢ أ = ٠    و منها : أ = −٦

، المنحنى للدالة يمر بالنقطة ( ٢ ، ٢ )    ∴ د(٢) = ٢

∴ ٨ − ٢٤ + ٢ ب = ٢    و منها : ب = ٩

∴ د(س) = س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٩ س

∴ د$'$(س) = ٣ س$^{٢}$ − ١٢ س + ٩ = ٣ ( س − ٣ ) ( س − ١ )

، د$''$(س) = ٦ س − ١٢ = ٦ ( س − ٢ )

عندما : د$'$(س) = ٠ فإن : س = ٣ ، س = ١

∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٣ ، س = ١

و تكون الدالة متزايدة فى ] ٣ ، ∞ [ ، و فى ] −∞ ، ١ [

و متناقصة فى ] ١ ، ٣ [

، عندما : د$''$(س) = ٠ فإن : س = ٢

، ∵ د$''$(٣) = ٦ > ٠    ∴ د(٣) = ٠ قيمة صغرى محلية

، ∵ د$''$(١) = −٦ < ٠    ∴ د(١) = ٤ قيمة عظمى محلية

، ∵ د$''$(س) < ٠ فى ] −∞ ، ٢ [ يكون المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د$''$(س) > ٠ فى ] ٢ ، ∞ [ يكون المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

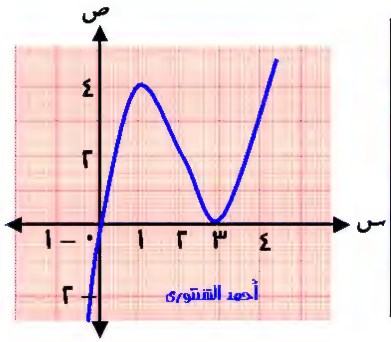
، النقطة ( ٢ ، ٢ ) نقطة إنقلاب

، نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات : ( ٣ ، ٠ ) ، ( ٠ ، ٠ )

نقط إضافية : ( ٤ ، ٤ ) ، ( −١ ، −١٦ )

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

| س | −∞ | | ١ | | ٢ | | ٣ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د$'$ | | + | ٠ | − | | − | ٠ | + | |
| سلوك د | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |
| إشارة د$''$ | | − | | − | ٠ | + | | + | |
| تحدب د | | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل | |
| ص | | | ٤ | | ٢ | | ٠ | | |
| | | | قيمة عظمى محلية | | نقطة إنقلاب | | قيمة صغرى محلية | | |






## الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) ميل المماس لمنحنى الدائرة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٥ عند س = ٣ يساوى ....

(أ) −$\frac{٤}{٣}$    (ب) −$\frac{٣}{٤}$    (جـ) $\frac{٥}{١٢}$    (د) $\frac{٤}{٣}$

الحل

∵ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ٢٥    باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠    و منها : $\frac{دص}{دس}$ = −$\frac{س}{ص}$

، س = ٣    فإن : ص = ± ٤    ∴ ميل المماس = $[\frac{دص}{دس}]_{س = ٣}$ = −$\frac{٣}{٤}$

(٢) إذا كان د(س) = $\frac{س}{س − ٢}$    فإن د$'''$(٣) = ....

(أ) −٣٦    (ب) −١٢    (جـ) ٦    (د) ٤

الحل

∵ $د(س) = س(س - ٢)^{-١}$

∴ $د'(س) = (س - ٢)^{-١} - س(س - ٢)^{-٢}$

$= (س - ٢)^{-٢}(س - ٢ - س) = -٢(س - ٢)^{-٢}$

∴ $د''(س) = ٤(س - ٢)^{-٣}$ ، $د'''(س) = -١٢(س - ٢)^{-٤}$

∴ $د'''(٣) = -١٢$

**(٣)** إذا كان $\frac{ءص}{ءس} = قتا^٢ س$ ، ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٤}\pi$ فإن ص = ....

(أ) −( ٢ + طتا س ) (ب) −( ٣ + طتا س )

(حـ) ٢ − طتا س (ء) ٣ − طتا س

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءس} = قتا^٢ س$ ∴ $ص = \int قتا^٢ س \, ءس = - طتا س + ث$

∵ ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٤}\pi$ ∴ ٢ = −١ + ث و منها : ث = ٣

∴ ص = − طتا س + ٣

**(٤)** إذا كان $\int_{٢}^{٤} د(س) \, ءس = ٧$ ، $\int_{٤}^{٢} ر(س) \, ءس = ٢$

فإن $\int_{٢}^{٤} [ ٢د(س) - ٣ر(س) - ٥ ] \, ءس$ تساوى ....

(أ) −١٨ (ب) −٨ (حـ) ١٠ (ء) ١٤

الحل

∵ $\int_{٤}^{٢} ر(س) \, ءس = ٢$ ∴ $\int_{٢}^{٤} ر(س) \, ءس = -٢$

∴ $\int_{٢}^{٤} [ ٢د(س) - ٣ر(س) - ٥ ] \, ءس = ٢\int_{٢}^{٤} د(س) \, ءس$

$- ٣\int_{٢}^{٤} ر(س) \, ءس - ٥\int_{٢}^{٤} ءس$

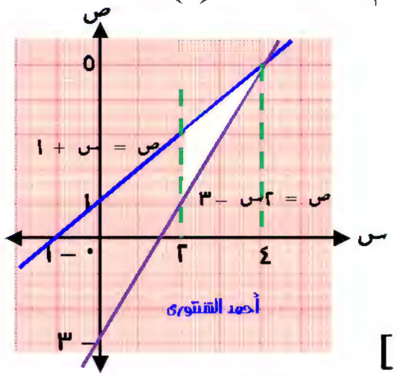
$= ٢ \times ٧ - ٣ \times (-٢) - ٥ [س]_{٢}^{٤}$

$= ١٤ + ٦ - ٥ \times (٤ - ٢) = ٢٠ - ١٠ = ١٠$

**(٥)** مساحة المنطقة المحدودة بالمستقيمات ص = ٢س − ٣ ، ص = س + ١ ، س = ٢ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (حـ) $\frac{٩}{٢}$ (ء) ٦

الحل




بفرض : $ص_١ = ٢س - ٣$ ،

$ص_٢ = س + ١$

لايجاد نقط التقاطع نضع : $ص_١ = ص_٢$

∴ ٢س − ٣ = س + ١

∴ س = ٤

∵ $ص_٢ \geq ص_١$ لكل : س ∈ [ ٢ ، ٤ ]

∴ $م = \int_{٢}^{٤} (ص_٢ - ص_١) \, ءس = \int_{٢}^{٤} (س + ١ - ٢س + ٣) \, ءس$

$= \int_{٢}^{٤} (٤ - س) \, ءس = [ ٤س - \frac{١}{٢}س^٢ ]_{٢}^{٤}$

= ( ١٦ − ٨ ) − ( ٨ − ٢ ) = ٢ وحدة مربعة

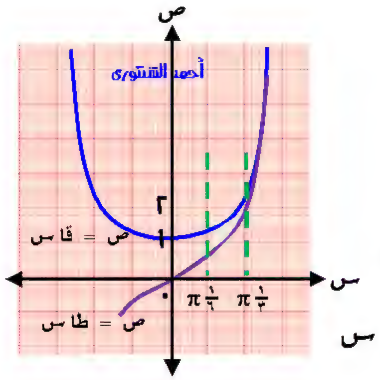
**(٦)** حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين ص = طا س ، ص = قا س و المستقيمين س = $\frac{١}{٢}\pi$ ، س = $\frac{١}{٣}\pi$ دورة كاملة حول محور السينات مقدراً بالوحدات المكعبة يساوى ....

(أ) $\frac{1}{12}\pi$    (ب) $\frac{1}{3}\pi$    (حـ) $\frac{2}{5}\pi$    (ء) $2\pi$

الحل

ص$_1$ = طا س ، ص$_2$ = قا س

، ∵ ص$_2$ ≥ ص$_1$ لكل : س ∈ $[\frac{1}{4}\pi , \frac{1}{3}\pi]$




∴ ع = $\pi \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}$ ( ص$_2^2$ − ص$_1^2$ ) ءس

= $\pi \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}$ ( قا$^2$ س − طا$^2$ س ) ءس

= $\pi \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}$ ءس = $\pi \, [\, س \,]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}$

= $\pi \, [\, \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi \,] = \frac{1}{12}\pi^2$ وحدة مكعبة

## ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد مشتقة ص بالنسبة إلى س حيث : ص = س$^2$ لوهـ س

الحل

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س لوهـ س + س$^2$ × $\frac{1}{س}$ = ٢ س لوهـ س + س

= س ( ٢ لوهـ س + ١ ) = س ( لوهـ س$^2$ + ١ )

(ب) إذا كانت د(س) = $\sqrt[3]{(س - ٤)^2}$ فأوجد فترات التحدب إلى أعلى و إلى أسفل و نقط الأنقلاب ( إن وجدت ) لمنحنى الدالة د

الحل

∵ د(س) = $( س - ٤ )^{\frac{2}{3}}$ ∴ د$'$(س) = $\frac{2}{3}( س - ٤ )^{-\frac{1}{3}}$

، د$''$(س) = $-\frac{2}{9}( س - ٤ )^{-\frac{4}{3}}$

= $\frac{-2}{9\sqrt[3]{(س - ٤)^4}}$

عندما : س > ٤ فإن : د$''$(س) < ٠

، عندما : س < ٤ فإن : د$''$(س) < ٠

أى أن : د$''$(س) < ٠ لكل س ∈ ح − { ٤ }

| س | ∞ − ٤ ∞ | |
|---|---|---|
| إشارة د$''$ | − غير موجودة | − |
| تحدب د | لأعلى | لأعلى |

لاحظ أن : د$''$(س) غير موجودة عندما : س = ٤

∴ منحنى الدالة د محدب لأعلى لكل س ∈ ح − { ٤ }

أى على : ] ٤ ، ∞ [ ، ] − ∞ ، ٤ [ و لا توجد نقط إنقلاب

[٣] (أ) أوجد : (١) $\int$ س ( س − ٥ )$^3$ ءس ،

(٢) $\int$ ٤ س هـ$^{٢س}$ ءس

الحل

(١) $\int$ ( س − ٥ + ٥ ) ( س − ٥ )$^3$ ءس = $\int$ ( س − ٥ )$^4$ ءس

+ ٥ $\int$ ( س − ٥ )$^3$ ءس = $\frac{1}{5}$ ( س − ٥ )$^5$ + $\frac{5}{4}$ ( س − ٥ )$^4$ + ث

= $\frac{1}{20}$ ( س − ٥ )$^4$ ( ٤ س − ٢٠ + ٢٥ )

= $\frac{1}{20}$ ( س − ٥ )$^4$ ( ٤ س + ٥ )

حل آخر

نضع : ص = س − ٥ ∴ ءص = ءس ، س = ص + ٥ .... أكمل

(٢) نضع : ص = ٤ س ∴ ءص = ٤ ءس ،

ءع = هـ$^{٢س}$ ءس ∴ ع = $\frac{1}{2}$ هـ$^{٢س}$

∴ المقدار $= ٤ س \times \frac{١}{٢} س هـ^{س^٢} - \int ٤ \times \frac{١}{٢} هـ^{س^٢} ء س$

$= ٢ س هـ^{س^٢} - \int ٢ هـ^{س^٢} ء س = ٢ س هـ^{س^٢} - هـ^{س^٢} + ث$

$= هـ^{س^٢} (٢ س - ١) + ث$

**(ب)** أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث

$د(س) = س^٤ - ٤ س^٣$ على الفترة $[٠ ، ٤]$

**الحل**

$\because د(س) = س^٤ - ٤ س^٣$

$\therefore د'(س) = ٤ س^٣ - ١٢ س^٢ = ٤ س^٢ (س - ٣)$

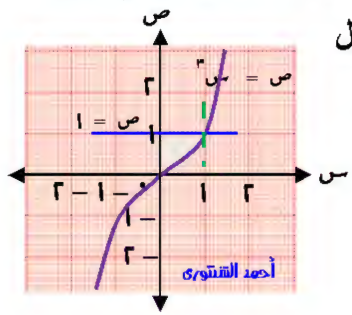
نضع : $د'(س) = ٠$ 　 $\therefore س = ٠ \in [٠ ، ٤]$

، $س = ٣ \in [٠ ، ٤]$

$\because د(٠) = ٠$ ، $د(٣) = -٢٧$ ، $د(٤) = ٠$

∴ القيمة العظمى المطلقة = صفر ، القيمة الصغرى المطلقة = $-٢٧$

**[٤] (أ)** إذا كان حجم الجسم الدورانى الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $ص = س^٣$ و المستقيمين $س = ٠$ ، $ص = ١$ دورة كاملة حول محور السينات يعادل حجم سلك إسطوانى الشكل طوله ٤٢ وحدة طول فما طول نصف قطر السلك




**الحل**

$ص_١ = س^٣$ ، $ص_٢ = ١$

نضع : $ص_١ = ص_٢$ 　 $\therefore س^٣ = ١$

و منها : $س = ١$

$\because ص_٢ \geq ص_١$ لكل $س \in [٠ ، ١]$ ، الدوران حول محور السينات

$\therefore ح = \pi \int_٠^١ (ص_٢^٢ - ص_١^٢) ء س = \pi \int_٠^١ (١ - س^٦) ء س$

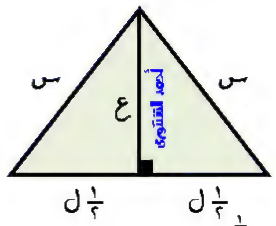
$= \pi \left[ س - \frac{١}{٧} س^٧ \right]_٠^١ = \pi \left[ ١ - \frac{١}{٧} \right] = \frac{٦}{٧} \pi$ وحدة مكعبة

∵ حجم السلك = حجم الجسم الدورانى

$\therefore \pi نق^٢ \times ٤٢ = \frac{٦}{٧} \pi$ 　 و منها : $نق = \frac{١}{٧}$ وحدة طول

**(ب)** يتناقص الضلعان المتساويان فى مثلث متساوى الساقين ذو قاعدة ثابتة طولها ل سم بمعدل ٣ سم / د ، ما هو معدل تناقص المساحة عندما يصبح المثلث متساوى الأضلاع

**الحل**




بفرض أن : طول كل من الساقين = س سم

$\therefore \frac{ءس}{ءن} = -٣$ سم / د ، من هندسة الشكل :

$ع^٢ = س^٢ - \frac{١}{٤} ل^٢$ 　 $\therefore ع = (س^٢ - \frac{١}{٤} ل^٢)^{\frac{١}{٢}}$

∴ مساحة المثلث $= م = \frac{١}{٢} ل ع = \frac{١}{٢} ل (س^٢ - \frac{١}{٤} ل^٢)^{\frac{١}{٢}}$

، $\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٤} ل (س^٢ - \frac{١}{٤} ل^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ س \frac{ءس}{ءن}$

$= \frac{١}{٢} ل س (س^٢ - \frac{١}{٤} ل^٢)^{-\frac{١}{٢}} \times (-٣)$

$= -\frac{٣}{٢} ل س (س^٢ - \frac{١}{٤} ل^٢)^{-\frac{١}{٢}}$

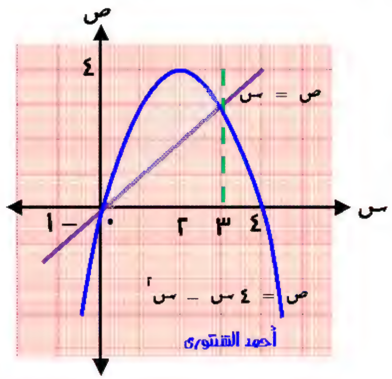
ليصبح المثلث متساوى الأضلاع نضع : $س = ل$ 　 فيكون :

$\frac{ءم}{ءن} = -\frac{٣}{٢} س^٢ (س^٢ - \frac{١}{٤} س^٢)^{-\frac{١}{٢}} = -\frac{٣}{٢} س^٢ (\frac{٣}{٤} س^٢)^{-\frac{١}{٢}}$

$= \frac{-\frac{٣}{٢} س^٢}{\frac{١}{٢} \sqrt{٣} س} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = -\sqrt{٣} س$

أى أن : المساحة تتناقص بمعدل $\sqrt{٣} س$ سم$^٢$ / د

**[٥] (أ)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين س − ص = ٠ ، ص = ٤ س − $س^{٢}$




**الحل**

بفرض : $ص_{١}$ = س ، $ص_{٢}$ = ٤ س − $س^{٢}$

لإيجاد نقط التقاطع نضع : $ص_{١}$ = $ص_{٢}$

∴ ٤ س − $س^{٢}$ = س

∴ $س^{٢}$ − ٣ س = ٠

∴ س ( س − ٣ ) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٣

، ∵ $ص_{٢}$ ≥ $ص_{١}$ لكل : س ∈ [ ٠ ، ٣ ]

∴ م = $\int_{٠}^{٣}$ ( $ص_{٢}$ − $ص_{١}$ ) ء س = $\int_{٠}^{٣}$ ( ٤ س − $س^{٢}$ − س ) ء س

= $\int_{٠}^{٣}$ ( ٣ س − $س^{٢}$ ) ء س = $[\frac{٣}{٢}س^{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}]_{٠}^{٣}$

= ( $\frac{٢٧}{٢}$ − ٩ ) − ( ٠ ) = $\frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

**(ب)** ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د الذى له الخواص التالية : د ( ٠ ) = ٣ ، د′( ٢ ) = د′( −٢ ) = ٠ ،

د′(س) < ٠ عندما : −٢ < س < ٢ ،

د″(س) < ٠ عندما : س > ٠ ،

د″(س) > ٠ عندما : س < ٠ .

**الحل**

∵ د ( ٠ ) = ٣ ∴ المنحنى يمر بالنقط ( ٠ ، ٣ )

، ∵ د′( ٢ ) = د′( −٢ ) = ٠

∴ للمنحنى نقط حرجة عند س = ٢ ، س = −٢

و عند هاتين النقطتين المماس // محور السينات

، ∵ د′(س) < ٠ عندما : −٢ < س < ٢

∴ د (س) تزايدية فى ] −٢ ، ٢ [

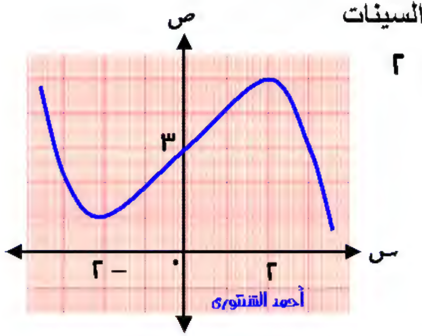
، ∵ د″(س) < ٠ عندما س > ٠ .

∴ المنحنى محدب لأعلى فى ] ٠ ، ∞ [

، ∵ د″(س) > ٠ عندما س < ٠ .

∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] −∞ ، ٠ [

، النقطة ( ٠ ، ٣ ) نقطة إنقلاب




## الاختبار الرابع

**أولاً : أجب عن السؤال التالى :**

**[١]** اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

**(١)** إذا كان ص = $\frac{٣ س - ٥}{س - ٢}$ فإن عند س = ١ ، $\frac{ء^{٣}ص}{ء س^{٣}}$ يساوى ....

(أ) −١٢  (ب) −٦  (ج) ٦  (ء) ١٢

**الحل**

∵ ص = ( ٣ س − ٥ ) $( س - ٢ )^{-١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ $( س - ٢ )^{-١}$ − $( س - ٢ )^{-٢}$ ( ٣ س − ٥ )

= $( س - ٢ )^{-٢}$ [ ٣ ( س − ٢ ) − ( ٣ س − ٥ ) ]

= $( س - ٢ )^{-٢}$ [ ٣ س − ٦ − ٣ س + ٥ ] = − $( س - ٢ )^{-٢}$

، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢ $( س - ٢ )^{-٣}$ ،

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = -٦ ( س - ٢ )^{-٤} = \frac{-٦}{( س - ٢ )^{-٤}}$ ∴ $[\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}]_{س = ١} = -٦$

**(٢)** ∫ قا³ س طا س ء س = ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ قا⁴ س + ث (ب) $\frac{١}{٣}$ قا³ س + ث

(حـ) $\frac{١}{٢}$ قا² س + ث (ء) $-\frac{١}{٢}$ قا² س + ث

الحل

∫ قا³ س طا س ء س = ∫ قا² س ( قا س طا س ) ء س =

∫ قا² س ( قا س )′ ء س = $\frac{١}{٣}$ قا³ س + ث

**(٣)** العمودى للدائرة : س² + ص² = ١٢ عند أى نقطة عليها يمر بالنقطة ....

(أ) ( ٢ ، ٣ ) (ب) ( ١ ، ١ )

(حـ) ( ٠ ، ٠ ) (ء) ( −٢ ، −٢ )

الحل

∵ س² + ص² = ٢٥ ∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ومنها : $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{س}{ص}$

، بفرض أن : النقطة ( حـ ، ء ) على الدائرة

∴ ميل المماس = $[\frac{ءص}{ءس}]_{(حـ ، ء)} = -\frac{حـ}{ء}$ ∴ ميل العمودى = $\frac{ء}{حـ}$

، معادلة العمودى هى : ص − ء = $\frac{ء}{حـ}$ ( س − حـ )

أى : حـ ص − حـ ء = ء س − حـ ء أى : ء س − حـ ص = ٠ .

وهى معادلة مستقيم يمر بالنقطة ( ٠ ، ٠ ) " معادلة قطر الدائرة "

أى أن : العمودى على الدائرة بالنقطة ( ٠ ، ٠ )

**(٤)** منحنى الدالة د حيث د(س) = ( س − ٢ ) هـ^س يكون محدباً لأسفل على الفترة ....

(أ) ] −∞ ، ∞ [ (ب) ] −١ ، ٢ [

(حـ) ] ٠ ، ٢ [ (ء) ] ٠ ، ∞ [

الحل

∵ د(س) = ( س − ٢ ) هـ^س

∴ د′(س) = هـ^س + ( س − ٢ ) هـ^س = هـ^س ( ١ + س − ٢ )

= هـ^س ( س − ١ )

، د″(س) = هـ^س ( س − ١ ) + هـ^س

= هـ^س ( س − ١ + ١ )

= س هـ^س ، د″(س) = ٠ عندما : س = ٠

، ∵ د″(س) > ٠ عندما : س > ٠

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل فى ] ٠ ، ∞ [

| س | ∞ ٠ −∞ | |
|---|---|---|
| إشارة د″ | + ٠ − | |
| تحدب منحنى د | لأسفل | لأعلى |

**(٥)** $\int_{-١}^{٣}$ ٣ س | س − ٤ | ء س يساوى ....

(أ) −٢٧ (ب) −٢٠ (حـ) ٢٠ (ء) ٢٧

الحل

$\int_{-١}^{٣}$ ٣ س | س − ٤ | ء س = $\int_{-١}^{٣}$ ٣ س ( −س + ٤ ) ء س

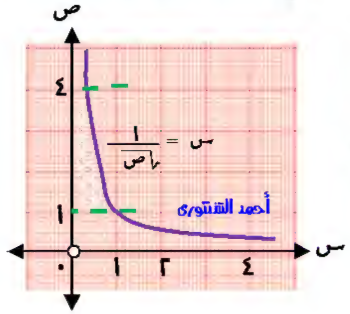
= $\int_{-١}^{٣}$ ( −٣ س² + ١٢ س ) ء س = $[ -س^٣ + ٦ س^٢ ]_{-١}^{٣}$

= ( −٢٧ + ٥٤ ) − ( ١ + ٦ ) = ٢٠

(٦) عند دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $\text{س} = \frac{1}{\sqrt{\text{ص}}}$ ، $1 \le \text{ص} \le 4$ ، و محور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات فإن حجم الجسم الناشئ مقدراً بالوحدات المكعبة يساوى ....

(أ) $\frac{4}{3}\pi$ (ب) $3\sqrt{2}\,\pi$ (جـ) $2\pi\ \text{لو}_{\text{هـ}} 2$ (د) $\frac{2}{3}\pi\ \text{لو}3$

**الحل**




∵ الدوران حول محور الصادات :

∴ $\text{ح} = \pi \int_1^4 \text{س}^2\, \text{ءص} = \pi \int_1^4 \frac{1}{\text{ص}}\, \text{ءص}$

$= \pi \left[\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ص}\right]_1^4 = \pi \left[\text{لو}_{\text{هـ}} 4 - \text{لو}_{\text{هـ}} 1\right]$

$= 2\pi\ \text{لو}_{\text{هـ}} 2$ وحدة مكعبة

## ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int (3\text{س}^2 - 4\text{هـ}^{2\text{س}})\, \text{ءس}$ ، (٢) $\int \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{\text{س} + 3}}\, \text{ءس}$

**الحل**

(١) $\int (3\text{س}^2 - 4\text{هـ}^{2\text{س}})\, \text{ءس} = 3 \times \frac{1}{3}\text{س}^3 - 4 \times \frac{1}{2}\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{ث}$

$= \text{س}^3 - 2\text{هـ}^{2\text{س}} + \text{ث}$

(٢) نضع : $\text{ص} = \text{س} + 3$ ∴ $\text{ءص} = \text{ءس}$ ، $\text{س} - 1 = \text{ص} - 4$

∴ المقدار $= \int (\text{ص} - 4) \times \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\, \text{ءص} = \int (\text{ص}^{\frac{1}{2}} - 4\text{ص}^{-\frac{1}{2}})\, \text{ءص}$

$= \frac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} - 4 \times 2\text{ص}^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= \frac{2}{3}(\text{س} + 3)^{\frac{3}{2}} - 8(\text{س} + 3)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$

$= \frac{2}{3}(\text{س} + 3)^{\frac{1}{2}}\left[\text{س} + 3 - 12\right] + \text{ث}$

$= \frac{2}{3}(\text{س} + 3)^{\frac{1}{2}}(\text{س} - 9) + \text{ث}$

**حل آخر**

ضع : $\text{س} - 1 = (\text{س} + 3) - 4$ ثم أكمل

(ب) إذا كان : $\text{حا ص} + \text{حتا } 2\text{س} = 0$ . فأثبت أن :

$\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} - \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 \text{طا ص} = 4\ \text{حتا } 2\text{س}\ \text{قا ص}$

**الحل**

∵ $\text{حا ص} + \text{حتا } 2\text{س} = 0$ . باشتقاق الطرفين مرتين بالنسبة لـ س

∴ $\text{حتا ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - 2\ \text{حا } 2\text{س} = 0$ .

، $\text{حتا ص}\ \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} - \text{حا ص}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 - 4\ \text{حتا } 2\text{س} = 0$ .

بالقسمة ÷ حتا ص ينتج : $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} - \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^2 \text{طا ص} = 4\ \text{حتا } 2\text{س}\ \text{قا ص}$

[٣] (أ) إذا كان $\int_1^4 \text{د(س)}\, \text{ءس} = 7$ ، $\int_4^1 \text{ر(س)}\, \text{ءس} = 3$

أحسب قيمة $\int_1^4 \left[\text{د(س)} + 2\text{ر(س)} - 4\right] \text{ءس}$

**الحل**

∵ $\int_4^1 \text{ر(س)}\, \text{ءس} = 3$ ∴ $\int_1^4 \text{ر(س)}\, \text{ءس} = -3$

∴ $\int_1^4 \left[\text{د(س)} + 2\text{ر(س)} - 4\right] \text{ءس} = \int_1^4 \text{د(س)}\, \text{ءس}$

$+ 2\int_1^4 \text{ر(س)}\, \text{ءس} - 4\int_1^4 \text{ءس}$

$= 7 + 2 \times (-3) - 4\left[\text{س}\right]_1^4$

$= 7 - 6 - 4 \times (4 - 1) = 1 - 12 = -11$

(ب) إذا كان منحنى للدالة د حيث :
د(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ء له قيمة عظمى محلية عند ( ٢ ، ٤ ) و له نقطة إنقلاب عند ( ١ ، ٢ )
أوجد معادلة المنحنى

الحل

∵ د(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ء

∴ د'(س) = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س + جـ ، د''(س) = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ ( ١ ، ٢ ) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة

∴ د''(١) = ٠ ∴ ٦ أ + ٢ ب = ٠ و منها : ب = −٣ أ (١)

، ∵ ( ٢ ، ٤ ) نقطة قيمة عظمى محلية لمنحنى الدالة

∴ د'(٢) = ٠ ∴ ١٢ أ + ٤ ب + جـ = ٠ ، بالتعويض من (١) ينتج :

١٢ أ − ١٢ أ + جـ = ٠ و منها : جـ = ٠ (٢)

، ∵ المنحنى للدالة يمر بالنقطة ( ١ ، ٢ ) ∴ د(١) = ٢

∴ أ + ب + جـ + ء = ٢ ، بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

∴ أ − ٣ أ + ء = ٢ ∴ −٢ أ + ء = ٢ (٣)

، ∵ المنحنى للدالة يمر بالنقطة ( ٢ ، ٤ ) ∴ د(٢) = ٤

∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء = ٤ ، بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

∴ ٨ أ − ١٢ أ + ء = ٤ ∴ −٤ أ + ء = ٤ (٤)

، بطرح (٤) من (٣) ينتج : ٢ أ = −٢ ∴ أ = −١

، بالتعويض فى (١) ينتج : ب = ٣

، بالتعويض فى (٣) ينتج : ٢ + ء = ٢ و منها : ء = ٠

∴ د(س) = − س^٣ + ٣ س^٢

[٤] (أ) أوجد مساحة المنطقة بالمنحنى √س + √ص = ١
و المستقيمين س = ٠ ، ص = ٠

الحل

∵ ص = ٠ ∴ √س = ١ ∴ س = ١

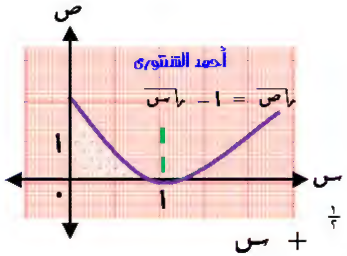
∴ حدود التكامل هى : س = ٠ ، س = ١

، ∵ √ص = ١ − √س بالتربيع :

∴ ص = ١ − ٢ √س + س = ١ − ٢ س^{١/٢} + س

∴ م = ∫ من ٠ إلى ١ ( ١ − ٢ س^{١/٢} + س ) ء س = [ س − $\frac{٤}{٣}$ س^{٣/٢} + $\frac{١}{٢}$ س^٢ ] من ٠ إلى ١

= ١ − $\frac{٤}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ وحدة مربعة




(ب) ارسم منحنى الدالة المتصلة د الذى يحقق الخواص التالية :

د(٤) = ٢ د(٣) = ٤ ، د(٢) = ٠

د'(س) < ٠ عندما : س > ٤ أو < ٢ ،

د''(س) < ٠ عندما : س > ٣ ،

د''(س) > ٠ عندما : س < ٣

الحل

∵ د(٤) = ٤ ∴ المنحنى يمر بالنقط ( ٤ ، ٤ )

، ∵ ٢ د(٣) = ٤ ∴ د(٣) = ٢ ∴ المنحنى يمر بالنقط ( ٣ ، ٤ )

، ∵ د(٢) = ٠ ∴ المنحنى يمر بالنقط ( ٢ ، ٠ )

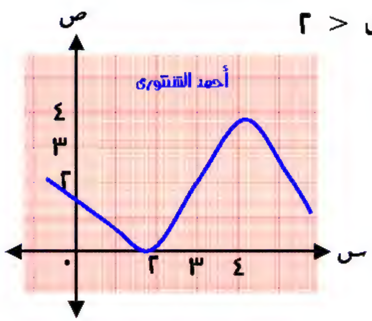
، ∵ د'(س) < ٠ عندما : س > ٤ أو س < ٢

∴ د(س) تناقصية فى ]−∞ ، ٢[
، ]٤ ، ∞[

، ∵ د''(س) < ٠ عندما س > ٣

∴ المنحنى محدب لأعلى فى ]٣ ، ∞[

، ∵ د''(س) > ٠ عندما س < ٣

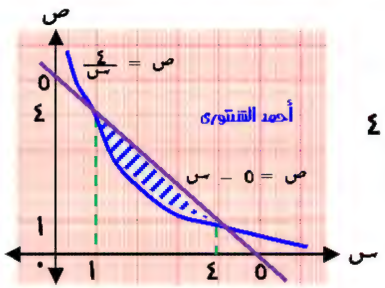


∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] $-\infty$ ، ٣ [

، النقطة ( ٣ ، ٢ ) نقطة إنقلاب

[٥] (أ) أثبت أن حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\frac{٤}{س}$ ، ص = ٥ − س دورة كاملة واحدة حول محور السينات يساوى ٩ π من الوحدات المكعبة

الحل




$ص_1 = \frac{٤}{س}$ ، $ص_2 = ٥ - س$

نضع : $ص_1 = ص_2$ ∴ $٥س - س^2 = ٤$

∴ $س^2 - ٥س + ٤ = ٠$

∴ ( س − ١ ) ( س − ٤ ) = ٠

و منها : س = ١ ، س = ٤

∵ $ص_2 \geq ص_1$ لكل : س ∈ [ ١ ، ٤ ] ، الدوران حول محور السينات

∴ $ح = \pi \int_1^4 (ص_2^2 - ص_1^2)\, ء س$

$= \pi \int_1^4 (٢٥ - ١٠س + س^2 - \frac{١٦}{س^2})\, ء س$

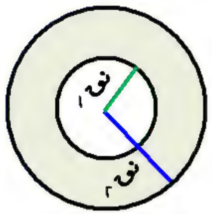
$= \pi \left[ ٢٥س - ٥س^2 + \frac{١}{٣}س^3 + \frac{١٦}{س} \right]_1^4$

$= \pi \left[ (١٠٠ - ٨٠ + \frac{٦٤}{٣} + ٤) - (٢٥ - ٥ + \frac{١}{٣} + ١٦) \right]$

= ٩ π وحدة مكعبة

(ب) إذا كانت ح مساحة الجزء المحصور بين دائرتين متحدى المركز طولا نصفا قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ حيث $نق_2 > نق_1$ أوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن فى اللحظة التى يكون فيها $نق_2 = ١٠$ سم ، $نق_1 = ٦$ سم ، إذا علم أن عند هذه اللحظة $نق_1$ يتزايد بمعدل ٠,٣ سم / ث ، $نق_2$ يتناقص بمعدل ٠,٢ سم / ث

الحل




من الشكل : $ح = \pi (نق_2^2 - نق_1^2)$

∴ $\frac{ءح}{ءن} = \pi \left( ٢نق_2 \frac{ءنق_2}{ءن} - ٢نق_1 \frac{ءنق_1}{ءن} \right)$

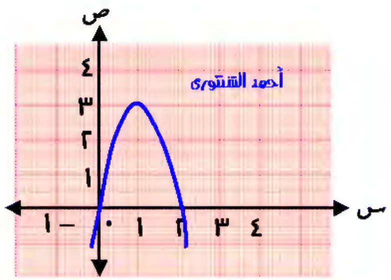
= π ( ٢ × ١٠ × ( −٠,٢ ) − ٢ × ٦ × ٠,٣ )

= − ٧,٦ π $سم^2$ / د        أى أن : ح تتناقص بمعدل ٧,٦ π $سم^2$ / د

## الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] يوضح الشكل المقابل :




منحنى $د^{/}(س)$ للدالة د حيث :

$د(س) = أ س^3 + ب س^2$

، أ ، ب ثابتان أكمل

(١) الدالة متناقصة لكل س ∈ ....

(٢) لمنحنى د نقطة حرجة عند س ∈ ....

(٣) منحنى د محدب لأعلى على الفترة ....

(٤) توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = ....

(٥) د(١) = ....

(٦) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين س = ٢ ، س = ٠ بالوحدات المربعة يساوى ....

الحل

∵ د(س) = أ س³ + ب س² ∴ د/(س) = ٣ أ س² + ٢ ب س

، ∵ منحنى د/(س) يمر بالنقطتين ( ١ ، ٣ ) ، ( ٢ ، ٠ )

∴ ٣ أ + ٢ ب = ٣ ، ١٢ أ + ٤ ب = ٠ و بحل المعادلتين ينتج :

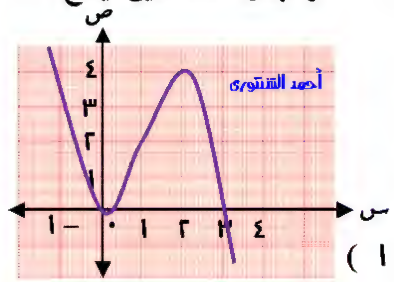
أ = −١ ، ب = ٣

∴ د(س) = − س³ + ٣ س²

، د/(س) = − ٣ س² + ٦ س

= − ٣ س ( س − ٢ )

، د//(س) = − ٦ س + ٦ = − ٦ ( س − ١ )




الشكل المقابل يبين منحنى د (س)

(١) ∵ د/(س) < ٠ عندما : س < ٠ أو > ٢

∴ الدالة متناقصة لكل س ∈ ]−∞ ، ٠[ ، س ∈ ]٢ ، ∞[

(٢) ∵ د/(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢

∴ لمنحنى د نقطة حرجة عند س ∈ { ٠ ، ٢ }

(٣) ∵ د//(س) < ٠ عندما : س > ١

∴ منحنى د محدب لأعلى على الفترة ]١ ، ∞[

(٤) ∵ د/(س) < ٠ عندما : س < ٠ ، د/(س) > ٠ عندما : س > ٠

∴ توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = ٠ " لاحظ : د//(٠) > ٠ "

(٥) د(١) = ٢

(٦) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمين س = ٢ ، س = ٠

م = ∫ من ٠ إلى ٢ ( −س³ + ٣ س² ) ء س = [ − ¼ س⁴ + س³ ] من ٠ إلى ٢

= −٤ + ٨ = ٤ وحدات مربعة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) ∫ قتا² (س + ٥)/٢ ء س ،

(٢) ∫ ٥ س / (٣ س² − ١) ء س

الحل

(١) ∫ قتا² (س + ٥)/٢ ء س = − ٢ طتا (س + ٥)/٢ + ث

(٢) ∫ ٥ س / (٣ س² − ١) ء س = ٥/٦ ∫ ٦ س / (٣ س² − ١) ء س = ٥/٦ ∫ (٣ س² − ١)/ / (٣ س² − ١) ء س

= ٥/٦ لوهـ | ٣ س² − ١ | + ث

(ب) للدالة د حيث د(س) = س³ − ٦ س² + ٩ س − ١

(١) عين فترات التزايد و التناقص للدالة د

(٢) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [ ٠ ، ٢ ]

الحل

∵ د(س) = س³ − ٦ س² + ٩ س − ١

∴ د/(س) = ٣ س² − ١٢ س + ٩

= ٣ ( س² − ٤ س + ٣ )

= ٣ ( س − ١ ) ( س − ٣ )

، د(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = ٣

| س | −∞ ١ ٣ ∞ |
|---|---|
| إشارة د/ | + ٠ − ٠ + |
| سلوك د | ↗ ↘ ↗ |

∴ الدالة متزايدة على ]−∞ ، ١[ ، ]٣ ، ∞[ ، متناقصة على ]١ ، ٣[

، ∵ د(س) = ٠ عندما : س = ١ ∈ [ ٠ ، ٢ ] ،

س = ٣ ∉ [ ٠ ، ٢ ]

، ∵ د(٠) = −١ ، د(١) = ٣ ، د(٢) = ١

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٣ ، القيمة الصغرى المطلقة = −١

[٣] (أ) إذا كان د(س) = ٤ + ظتا س − قا$^{٢}$ س أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة د عند نقطة تقع على المنحنى و إحداثيها السينى يساوى $\frac{١}{٤}\pi$

الحل

∵ د(س) = ٤ + ظتا س − قا$^{٢}$ س

عندما : س = $\frac{١}{٤}\pi$ فإن : د(س) = ٤ + ١ − ٢ = ٣

، د$'$(س) = − قتا$^{٢}$ س − ٢ قا س × قا س طا س

= − قتا$^{٢}$ س − ٢ قا$^{٢}$ س طا س

، ميل المماس = $[$د$'$(س)$]_{\frac{١}{٤}\pi}$ = −٢ − ٢ × ٢ × ١ = −٦

∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٦}$

، معادلة العمودى هى : ص − ٣ = $\frac{١}{٦}$ ( س − $\frac{١}{٤}\pi$ )

أى : س − ٢ ص + ١٨ − $\frac{١}{٤}\pi$ = ٠

(ب) خزان فارغ سعته ١٠ أمتار مكعبة يصب فيه الماء تدريجياً بمعدل ( ٢ن + ٣ ) متر مكعب / دقيقة حيث ن الزمن بالدقائق أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان

الحل

نفرض أن : حجم الخزان = ع ∴ $\frac{دع}{دن}$ = ٢ن + ٣

∴ ع = ∫ ( ٢ن + ٣ ) ء ن = ن$^{٢}$ + ٣ن + ث

عندما يكون الخزان فارغاً فإن : ع = ٠ ، ن = ٠ ∴ ث = ٠

∴ ع = ن$^{٢}$ + ٣ن ، عندما يمتلئ الخزان فإن : ع = ١٠ م$^{٣}$

∴ ١٠ = ن$^{٢}$ + ٣ن ∴ ن$^{٢}$ + ٣ن − ١٠ = ٠

∴ ( ن − ٢ )( ن + ٥ ) = ٠ ∴ ن = − ٥ مرفوض

، ن = ٢ أى أن : الزمن اللازم لامتلاء الخزان = ٢ دقيقة

[٤] (أ) أوجد نهـا$_{س \to \infty}$ $\left( \frac{٢س − ١}{٢س + ١} \right)^{٢س}$

الحل

بوضع : ص = ٢س + ١ ∴ ٢س = ص − ١

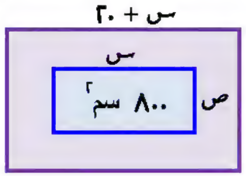
، ٢س − ١ = ص − ٢ ، عندما : س ← ∞ فإن : ص ← ∞

∴ المقدار = نهـا$_{ص \to \infty}$ $\left( \frac{ص − ٢}{ص} \right)^{ص − ١}$

= نهـا$_{ص \to \infty}$ $\left( ١ − \frac{٢}{ص} \right)^{ص}$ + نهـا$_{ص \to \infty}$ $\left( ١ − \frac{٢}{ص} \right)^{−١}$

= هـ$^{−٢}$ × ١ = هـ$^{−٢}$

(ب) يراد تصميم ملصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم$^{٢}$ من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى و السفلى ١٠ سم ، كل من الهامشين الجانبيين ٥ سم ، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن




الحل

نفرض أن : بعدا المادة المطبوعة هما س سم ، ص سم

∴ بعدا الملصق هما : س + ٢٠ سم ، ص + ١٠ سم ،

س ص = ٨٠٠ سم$^{٢}$ ومنها : ص = $\frac{٨٠٠}{س}$

∴ مساحة الملصق م = د(س) = ( س + ٢٠ )( ص + ١٠ )

∴ د(س) = ( س + ٢٠ )( $\frac{٨٠٠}{س}$ + ١٠ ) = ١٠ س + $\frac{١٦٠٠٠}{س}$ + ١٠٠٠

∴ د/(س) = ١٠ − $\frac{١٦٠٠٠}{س^٢}$ ، د//(س) = $\frac{٣٢٠٠٠}{س^٣}$

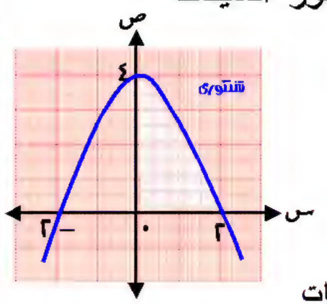
، د/(س) = ٠ عندما : ١٠ س² = ١٦٠٠٠ ومنها : س = ٤٠

، ∵ د//(٤٠) > ٠ ∴ س = ٤٠ تجعل مساحة الملصق أصغر ما يمكن

∴ ص = ٢٠ و تكون أبعاد الملصق هى :

٤٠ + ٢٠ = ٦٠ سم ، ٢٠ + ١٠ = ٣٠ سم

**[٥] (أ)** أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = ٤ − س² و الجزأين الموجبين من محورى الإحداثيات دورة كاملة حول محور السينات




**الحل**

∵ ص = ٤ − س² ، ص = ٠

∴ ٤ − س² = ٠ ∴ س² − ٤ = ٠

∴ ( س − ٢ ) ( س + ٢ ) = ٠

و منها : س = ٢ ، س = −٢ مرفوض

حيث المنطقة محددة بالجزأين الموجبين لمحورى الإحداثيات

، الدوران حول محور السينات

∴ ح = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ص² ءس = $\pi \int_{٠}^{٢}$ ( ١٦ − ٨ س² + س⁴ ) ءس

= π [ ١٦ س − $\frac{٨}{٣}$ س³ + $\frac{١}{٥}$ س⁵ ]$_{٠}^{٢}$

= π ( ٣٢ − $\frac{٦٤}{٣}$ + $\frac{٣٢}{٥}$ ) = $\frac{٢٥٦}{١٥}$ π وحدة مكعبة

**(ب)** إذا كان د (س) = س³ + أ س² + ب س + ٤ حيث أ ، ب ثابتان أوجد قيمتى أ ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، و نقطة إنقلاب عند س = ١ ثم ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة د

**الحل**

∵ د (س) = س³ + أ س² + ب س + ٤

∴ د/(س) = ٣ س² + ٢ أ س + ب ، د//(س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ عند س = ١ توجد نقطة إنقلاب ∴ د//(١) = ٠

∴ ٠ = ٦ + ٢ أ و منها : أ = −٣

، ∵ عند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية ∴ د/(٢) = ٠

∴ ٠ = ٦ + ٢ × ( −٣ ) × ٢ + ب و منها : ب = ٠

∴ د (س) = س³ − ٣ س² + ٤

∴ د/(س) = ٣ س² − ٦ س = ٣ س ( س − ٢ )

∴ د/(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢

∴ للدالة نقط حرجة عند : س = ٠ ، س = ٢

و تكون الدالة متزايدة فى ] ٢ ، ∞ [ ، و فى ] −∞ ، ٠ [

و متناقصة فى ] ٠ ، ٢ [

، د//(س) = ٦ س − ٦ = ٦ ( س − ١ )

، ∵ د//(٠) < ٠ ∴ د(٠) = ٤ قيمة عظمى محلية

، ∵ د//(٢) > ٠ ∴ د(٢) = ٠ قيمة صغرى محلية

، ∵ د//(س) = ٠ عندما : س = ١

، ∵ د//(س) < ٠ فى ] −∞ ، ١ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د//(س) > ٠ فى ] ١ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

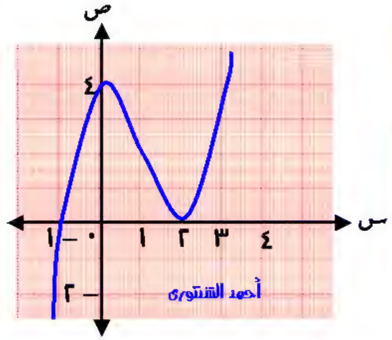
، النقطة ( ١ ، ٢ ) نقطة إنقلاب

، نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات : ( ٣ ، ٠ ) ، ( ٠ ، ٤ ) ، ( −١ ، ٠ )

، نقط إضافية : ( ٣ ، ٤ ) ، ( −٢ ، −١٦ )

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

| س | ∞ − | ٠ | ١ | ٢ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′ | + | ٠ | − | ٠ | + |
| سلوك د | ↗ | | ↘ | | ↗ |
| إشارة د″ | − | | ٠ | | + |
| تحدب د | لأعلى | | | | لأسفل |
| ص | | ٤ | ٢ | ٠ | |
| | | قيمة عظمى محلية | نقطة إنقلاب | قيمة صغرى محلية | |




## الاختبار السادس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(١) القيمة العظمى المحلية للدالة أكبر من القيمة الصغرى المحلية

(أ) (ب)

الحل

(١) (ب) ، التصحيح : القيمة العظمى المطلقة للدالة أكبر من القيمة الصغرى المطلقة

(٢) معدل تغير $\sqrt{\text{ن}^{٢}+٣}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$ هو $\frac{\text{ن}\,(\text{ن}+١)^{٢}}{\sqrt{\text{ن}^{٢}+٣}}$

(أ) (ب)

الحل

(٢) (أ) لأن : بوضع : $\text{ص} = \sqrt{\text{ن}^{٢}+٣} = (\text{ن}^{٢}+٣)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}(\text{ن}^{٢}+٣)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢\text{ن} = \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ن}^{٢}+٣}}$ ،

$\text{ع} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+١} \quad \therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{(\text{ن}+١)\times ١ - \text{ن}\times ١}{(\text{ن}+١)^{٢}} = \frac{١}{(\text{ن}+١)^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن}+١)^{٢}}{\sqrt{\text{ن}^{٢}+٣}}$

(٣) إذا كان $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٢$ فإن : $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{-١}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$

(أ) (ب)

الحل

(٣) (أ) لأن : $\because \sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٢ \quad \therefore \text{ص}^{\frac{١}{٢}} = ٢ - \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{١}{٢}\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}} \quad \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\text{ص}^{\frac{١}{٢}}$ ... 

$\therefore \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}\text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}\text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$= -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}\text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}}\text{ص}^{-\frac{١}{٢}} \times \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\text{ص}^{\frac{١}{٢}}$

$= -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}}\text{ص}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{س}^{-١} = -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} \times (٢ - \text{س}^{\frac{١}{٢}}) + \frac{١}{٢}\text{س}^{-١}$

$= -\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} - \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}\text{س}^{-١} = -\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} = \frac{-١}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}$

(٤) $\int \frac{\text{س}-٤}{(\text{س}-٢)^{٦}}\,\text{دس} = \frac{٧(\text{س}-٤)^{٢}}{٢(\text{س}-٢)^{٧}} + \text{ث}$

(أ) (ب)

الحل

(٤) (ب) ، التصحيح :

الطرف الأيمن $= \int (\text{س}-٤)(\text{س}-٢)^{-٦}\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}-٢-٢)(\text{س}-٢)^{-٦}\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}-٢)^{-٥}\,\text{دس} - ٢\int (\text{س}-٢)^{-٦}\,\text{دس}$

$= -\frac{١}{٤}(\text{س}-٢)^{-٤} - ٢ \times \left(-\frac{١}{٥}\right)(\text{س}-٢)^{-٥} + \text{ث}$

$= -\frac{1}{4}(س-٢)^{-4} + \frac{1}{3}(س-٢)^{-5} +$ ث

$= \frac{1}{12}(س-٢)^{-5}[-٣(س-٢)+٤] +$ ث

$= \frac{1}{12}(س-٢)^{-5}(-٣س+٦+٤) +$ ث

$= \frac{1}{12}(س-٢)^{-5}(١٠-٣س) +$ ث

(٥) إذا كان ص = س لوهـ س − س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = لوهـ س

(ب) (أ)

الحل

(٥) (أ) لأن : ∵ ص = س لوهـ س − س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = لوهـ س + س × $\frac{1}{س}$ − ١ = لوهـ س + ١ − ١ = لوهـ س

(٦) إذا كانت ( أ ، د(أ) ) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة د فإن

د″(أ) = صفر (ب) (أ)

الحل

(٦) (ب) ، التصحيح : إذا كانت ( أ ، د(أ) ) نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة المتصلة فإن د″(أ) = صفر أو د″(أ) غير موجودة

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٧س^3}{٢-٥س^4}$ ءس ،

(٢) $\int (٣هـ^{-٥س} + \frac{\pi}{س})$ ءس

الحل

(١) المقدار = $\frac{٧}{٢٠}\int \frac{٢٠س^3}{٢-٥س^4}$ ءس = $\int \frac{(٢-٥س^4)'}{٢-٥س^4}$ ءس

$= \frac{٧}{٢٠}$ لوهـ | ٢ − ٥س⁴ | + ث

(٢) المقدار = $٣\int هـ^{-٥س}$ ءس + $\pi \int \frac{1}{س}$ ءس

$= -\frac{٣}{٥}هـ^{-٥س} + \pi$ لوهـ | س | + ث

(ب) إذا كان : ص = أ هـ$^{س^2-1}$ حيث : أ ثابت أثبت أن :

$\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ = ٤ س ص ( ٣ + ٢ س² )

الحل

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س أ هـ$^{س^2-1}$

$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = ٢ أ هـ$^{س^2-1}$ + ٤س² أ هـ$^{س^2-1}$

$\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ = ٤س أ هـ$^{س^2-1}$ + ٨س أ هـ$^{س^2-1}$ + ٨س³ أ هـ$^{س^2-1}$

= ١٢س أ هـ$^{س^2-1}$ + ٨س³ أ هـ$^{س^2-1}$

= ٤س أ هـ$^{س^2-1}$ ( ٣ + ٢س² ) = ٤ س ص ( ٣ + ٢س³ )

[٣] (أ) أوجد : $\int$ طتا س قتا³ س ءس

الحل

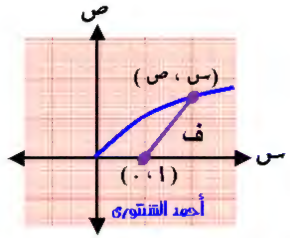
المقدار = $\int$ قتا² س ( طتا س قتا س ) ءس

$= -\int$ قتا² س ( − طتا س قتا س ) ءس

$= -\int$ قتا² س ( قتا س )′ ءس = $-\frac{1}{3}$ قتا³ س + ث

(ب) إذا كانت ف بعد النقطة ( ١ ، ٠ ) عن النقطة ( س ، ص ) الواقعة على المنحنى ص = $\sqrt{س}$ فأوجد إحداثى النقطة ( س ، ص ) التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن

الحل




ف$^{٢}$ = ( س − ١ )$^{٢}$ + ( ص − ٠ )$^{٢}$

= س$^{٢}$ − ٢ س + ١ + ص$^{٢}$

، ∵ ص = √س ∴ ص$^{٢}$ = س

∴ ف$^{٢}$ = س$^{٢}$ − ٢ س + ١ + س = س$^{٢}$ − س + ١

∴ ف = ( س$^{٢}$ − س + ١ )$^{\frac{١}{٢}}$ ، ءف / ءس = ½ ( س$^{٢}$ − س + ١ )$^{-\frac{١}{٢}}$ ( ٢ س − ١ )

بوضع ءف / ءس = ٠ ∴ س = ½

| س | ∞ | ½ | − ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$^{/}$ | + | ٠ | − |
| سلوك د | ↗ | | ↘ |

، ∵ عندما : س > ½ فإن : ءف / ءس > ٠

، عندما : س < ½ فإن : ءف / ءس < ٠

∴ عند س = ½ تكون ف أصغر ما يمكن ، و عندها ص = ١ / √٢

∴ إحداثى النقطة التى تكون عندها ف أصغر ما يمكن هى ( ½ ، ١ / √٢ )

[٤] (أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث :

د (س) = | س | (س − ٤ ) فى الفترة [ − ١ ، ٣ ]

الحل

د (س) = { س$^{٢}$ − ٤ س عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ − س$^{٢}$ + ٤ س عندما − ١ ≤ س < ٠ }   " لاحظ : الفترة المعطاة "

∵ د ( ٠ )$^{+}$ = د ( ٠ )$^{-}$ = د ( ٠ ) = ٠

∴ د (س) متعددة التعريف مجاها فى الفترة [ − ١ ، ٣ ] " الفترة المعطاة "

و متصلة عند س = ٠ أى متصلة على فى الفترة [ − ١ ، ٣ ]

، ∵ عندما : ٠ ≤ س ≤ ٣

فإن : د ( ٠ + و ) − د ( ٠ ) = ( ٠ + و )$^{٢}$ − ٤ ( ٠ + و ) − ٠

= و$^{٢}$ − ٤ و = و ( و − ٤ )

∴ د$^{/}$ ( ٠ )$^{+}$ = نهـا (و ← ٠$^{+}$) [ د ( ٠ + و ) − د ( ٠ ) ] / و = نهـا (و ← ٠$^{+}$) و ( و − ٤ ) / و = − ٤

، ∵ عندما : − ١ ≤ س < ٠

فإن : د ( ٠ + و ) − د ( ٠ ) = − ( ٠ + و )$^{٢}$ + ٤ ( ٠ + و ) − ٠

= − و$^{٢}$ + ٤ و = و ( − و + ٤ )

∴ د$^{/}$ ( ٠ )$^{-}$ = نهـا (و ← ٠$^{-}$) [ د ( ٠ + و ) − د ( ٠ ) ] / و = نهـا (و ← ٠$^{-}$) و ( − و + ٤ ) / و = ٤

∴ د$^{/}$ ( ٠ )$^{+}$ ≠ د$^{/}$ ( ٠ )$^{-}$ ∴ د$^{/}$ ( ٠ ) غير موجودة

∴ د$^{/}$ (س) = { ٢ س − ٤ عندما ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ غير موجودة عندما س = ٠ ؛ − ٢ س + ٤ عندما − ١ ≤ س < ٠ }   بوضع : د$^{/}$ (س) = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ عندما س > ٠ و منها : س = ٢ ∈ [ − ١ ، ٣ ]

، − ٢ س − ٤ = ٠ عندما س < ٠ و منها : س = − ٢ ∉ [ − ١ ، ٣ ]

، ∵ د (− ١) = − ٥ ، د ( ٢ ) = − ٤ ، د ( ٣ ) = − ٣ ، د ( ٠ ) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٠ ، القيمة الصغرى المطلقة = − ٥

(ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند أى نقطة عليه يساوى ٦ س$^{٢}$ + ب س ، و كان د ( ٠ ) = ٥ ، د ( ٢ ) = − ٣ أوجد قيمة الثابت ب ثم أرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د

الحل

∵ ءص / ءس = ∫ ( ٦ س$^{٢}$ + ب س ) ءس ∴ ص = ٢ س$^{٣}$ + ½ ب س$^{٢}$ + ث

، ∵ د ( ٠ ) = ٥ ∴ ٥ = ث

، ∵ د ( ٢ ) = − ٣ ∴ − ٣ = ١٦ + ٢ ب + ٥ ، و منها : ب = − ١٢

∴ ص = د (س) = ٢ س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٥

∴ د/(س) = ٦ س^٢ − ١٢ س = ٦ س ( س − ٢ )

∴ د/(س) = ٠ عندما : س = ٠ ، س = ٢ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متزايدة فى ] ٢ ، ∞ [ ، و فى ] − ∞ ، ٠ [

و متناقصة فى ] ٠ ، ٢ [ ، د//(س) = ١٢ س − ١٢ = ١٢ ( س − ١ )

، ∵ د//(٠) < ٠ ∴ د(٠) = ٥ قيمة عظمى محلية

، ∵ د//(٢) > ٠ ∴ د(٢) = − ٣ قيمة صغرى محلية

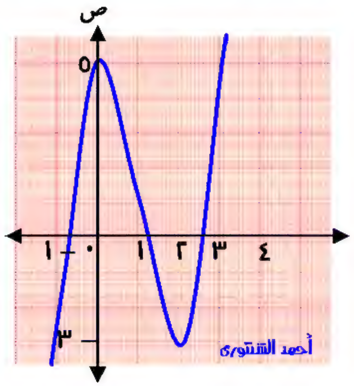
، ∵ د//(س) = ٠ عندما : س = ١

، ∵ د//(س) < ٠ فى ] − ∞ ، ١ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د//(س) < ٠ فى ] ١ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ١ ، ١ ) نقطة إنقلاب ، و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

| س | − ∞ | | ٠ | | ١ | | ٢ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ | | + | ٠ | − | | − | ٠ | + | |
| سلوك د | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | |
| إشارة د// | | − | | − | ٠ | + | | + | |
| تحدب د | | لأعلى | | لأعلى | | لأسفل | | لأسفل | |
| ص | | | ٥ | | ١ | | − ٣ | | |
| | | | قيمة عظمى محلية | | نقطة إنقلاب | | قيمة صغرى محلية | | |




[٥] (أ) أوجد معدل تغير لوهـ | ٩ + س^٣ | بالنسبة إلى س^٢ + ٣

عندما س + ١

الحل

نضع : ص = لوهـ | ٩ + س^٣ | ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣ \text{س}^٢}{٩ + \text{س}^٣}$

، ع = س^٢ + ٣ ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٢ س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{٣ \text{س}^٢}{٩ + \text{س}^٣} \times \frac{١}{٢ \text{س}}$

، عندما س = ١ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢٠}$

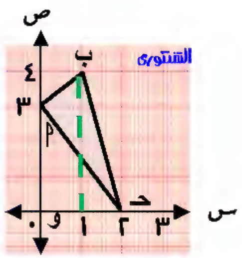
(ب) إذا كانت أ ( ٠ ، ٣ ) ، ب ( ١ ، ٤ ) ، حـ ( ٢ ، ٠ )

أوجد باستخدام التكامل :

أولاً : مساحة سطح المثلث أ ب حـ

ثانياً : حجم الجسم من دوران المثلث أ و حـ دورة كاملة حول محور الصادات

الحل




أولاً : معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٠} = \frac{٤ - ٣}{١ - ٠}$

أى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س}} = ١$ ∴ ص١ = س + ٣

معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٢} = \frac{٤ - ٠}{١ - ٢}$

أى : $\frac{\text{ص}}{\text{س} - ٢} = ١$ ∴ ص٢ = ٨ − ٤ س

معادلة $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٠} = \frac{٠ - ٣}{٢ - ٠}$

أى : $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س}} = - \frac{٣}{٢}$ ∴ ص٣ = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ س

م ( △ أ ب حـ ) = $\int_{٠}^{١}$ ( ص١ − ص٣ ) ءس + $\int_{١}^{٢}$ ( ص٢ − ص٣ ) ءس

= $\int_{٠}^{١}$ ( س + ٣ − ٣ + $\frac{٣}{٢}$ س ) ءس + $\int_{١}^{٢}$ ( ٨ − ٤ س − ٣ + $\frac{٣}{٢}$ س ) ءس

= $\int_{٠}^{١}$ $\frac{٥}{٢}$ س ءس + $\int_{١}^{٢}$ ( ٥ − $\frac{٥}{٢}$ س ) ءس

= [ $\frac{٥}{٤}$ س^٢ ]$_{٠}^{١}$ + [ ٥ س − $\frac{٥}{٤}$ س^٢ ]$_{١}^{٢}$

= [ $\frac{٥}{٤}$ − ٠ ] + [ ( ١٠ − ٥ ) − ( ٥ − $\frac{٥}{٤}$ ) ] = $\frac{٥}{٢}$ وحدة مربعة

ثانياً : الدوران حول محور الصادات

، ص٣ = ٣ − $\frac{٣}{٢}$ س ∴ س٣ = ٢ − $\frac{٢}{٣}$ ص

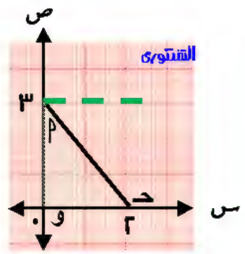
، ح = π $\int_{٠}^{٣}$ س٣² ء ص

= π $\int_{٠}^{٣}$ ( ٢ − $\frac{٢}{٣}$ ص )² ء ص

= π $\int_{٠}^{٣}$ ( ٤ − $\frac{٨}{٣}$ ص + $\frac{٤}{٩}$ ص² ) ء ص

= π [ ٤ ص − $\frac{٤}{٣}$ ص² + $\frac{٤}{٢٧}$ ص³ ]$_{٠}^{٣}$

= π [ ( ١٢ − ١٢ + ٤ ) − ( ٠ ) ] = ٤ π وحدة مكعبة




## الاختبار السابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[١] فى كل من العبارات التالية أختر الحرف (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و الحرف (ب) إذا كانت العبارة خاطئة

(١) إذا كان : ص² = ٣ س² − ٧ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص}{٣ س}$

(أ) (ب)

الحل

(١) (ب) ، التصحيح :

∵ ص² = ٣ س² − ٧ ∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٣ س}{ص}$

(٢) للدالة د : د(س) = س³ − ٣ س + ١ نقطة إنقلاب هى ( ٠ ، ١ )

(أ) (ب)

الحل

(٢) (أ) لأن : ∵ د(س) = س³ − ٣ س + ١

∴ د′(س) = ٣ س² − ٣ ، د″(س) = ٦ س

، ∵ د″(س) = ٠ عندما : س = ٠ ∴ د(٠) = ١

، ∵ د″(س) > ٠ عندما س > ٠ ، د″(س) < ٠ عندما س < ٠ .

∴ النقطة ( ٠ ، ١ ) نقطة إنقلاب

(٣) $\frac{ء}{ءس}$ [ ظتا ( حتا ٣ س ) ] = ٣ حا ٣ س قتا² ( حتا ٣ س )

(أ) (ب)

الحل

(٣) (أ) لأن : $\frac{ءص}{ءس}$ [ ظتا ( حتا ٣ س ) ] =

− قتا² ( حتا ٣ س ) × ( − ٣ حا ٣ س ) =

٣ حا ٣ س قتا² ( حتا ٣ س )

(٤) ∫ ( ١ − حتا س )⁴ حا س ء س = − $\frac{١}{٥}$ ( ١ + حتا س )⁵ + ث

(أ) (ب)

(٤) (ب) ، التصحيح :

∫ ( ١ − حتا س )⁴ حا س ء س = ∫ ( ١ − حتا س )⁴ ( ١ − حتا س )′ ء س

= $\frac{١}{٥}$ ( ١ − حتا س )⁵ + ث

حل آخر

نضع : ص = ١ − حتا س ∴ ء ص = حا س ء س ∴ ء س = $\frac{١}{حا س}$ ء ص

المقدار = ∫ ص⁴ حا س × $\frac{١}{حا س}$ ء ص = ∫ ص⁴ ء ص = $\frac{١}{٥}$ ص⁵ + ث

= $\frac{١}{٥}$ ( ١ − حتا س )⁵ + ث

حل ثالث

$\int (1 - \text{حتا س})^{4} \, \text{حا س ءس} = \int (1 - 1 + 2\,\text{حا}^{2}\tfrac{1}{2}\text{س})^{4} \times$

$2\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\text{س حتا}\tfrac{1}{2}\text{س ءس} = 32 \int \text{حا}^{9}\tfrac{1}{2}\text{س حتا}\tfrac{1}{2}\text{س ءس} =$

$64 \int \text{حا}^{9}\tfrac{1}{2}\text{س} \, (\tfrac{1}{2}\text{حتا}\tfrac{1}{2}\text{س}) \, \text{ءس} = 64 \int \text{حا}^{9}\tfrac{1}{2}\text{س} \, (\text{حا}\tfrac{1}{2}\text{س})' \, \text{ءس}$

$= 64 \times \tfrac{1}{10}\text{حا}^{10}\tfrac{1}{2}\text{س} + \text{ث} = \tfrac{1}{5}(2\,\text{حا}^{2}\tfrac{1}{2}\text{س})^{5} + \text{ث}$

$= \tfrac{1}{5}(1 - \text{حتا س})^{5} + \text{ث}$

(٥) $\lim_{\text{س} \to \infty} (1 + \frac{5}{\text{س}})^{\text{س}} = \text{هـ}^{5}$　　(أ)　　(ب)

الحل

(٥) (أ) لأن : العبارة صحيحة مباشرة

(٦) $\int (\frac{2\text{هـ}}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{هـ}}) \, \text{ءس} = 2\,\text{هـ لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| - \frac{\text{س}^{2}}{\text{هـ}} + \text{ث}$

(أ)　　(ب)

الحل

(٦) (ب) ، التصحيح : المقدار $= 2\,\text{هـ} \int \frac{1}{\text{س}} \, \text{ءس} + \text{هـ} \int \text{س ءس} =$

$= 2\,\text{هـ لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \frac{\text{س}^{2}}{2\text{هـ}} + \text{ث}$

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \text{س حا س ءس}$ ،

(٢) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\text{س}^{4} + \text{س}^{2}} \, \text{ءس}$

الحل

(١) نضع : ص = س　∴ ءص = ءس ،

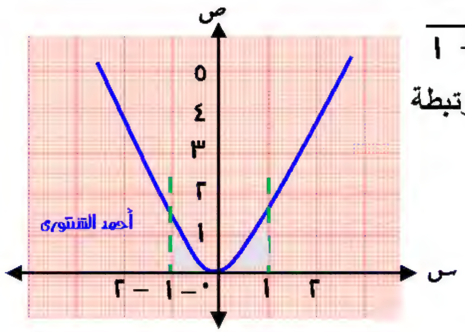
ءع = حا س ءس　∴ ع = − حتا س

∴ المقدار = − س حتا س + $\int$ حتا س ءس

= − س حتا س + حا س + ث

(٢) $\sqrt{\text{س}^{4} + \text{س}^{2}} = |\text{س}| \sqrt{\text{س}^{2} + 1}$

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة المرتبطة




$\therefore \int_{-1}^{1} \sqrt{\text{س}^{4} + \text{س}^{2}} \, \text{ءس} =$

$2 \int_{0}^{1} \text{س} \sqrt{\text{س}^{2} + 1} \, \text{ءس} =$

$\int_{0}^{1} (\text{س}^{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \times (2\text{س}) \, \text{ءس}$

$= \int_{0}^{1} (\text{س}^{2} + 1)^{\frac{1}{2}} \times (\text{س}^{2} + 1)' \, \text{ءس} = [\tfrac{2}{3}(\text{س}^{2} + 1)^{\frac{3}{2}}]_{0}^{1}$

$= \tfrac{2}{3}[(2)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}] = \tfrac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

(ب) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = لو$_{\text{هـ}}$ ( ٢ − $\sqrt{2}$ حتا س ) عند النقطة التى تقع عليه و إحداثيها السينى يساوى $\tfrac{1}{4}\pi$

الحل

∵ ص = لو$_{\text{هـ}}$ ( ٢ − $\sqrt{2}$ حتا س )

∴ عند : س = $\tfrac{1}{4}\pi$ فإن : ص = لو$_{\text{هـ}}$ $(2 - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}})$ = لو$_{\text{هـ}}$ ١ = ٠ .

، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{2}\,\text{حا س}}{2 - \sqrt{2}\,\text{حتا س}}$

، ميل المماس $= [\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}]_{(\frac{1}{4}\pi \,،\, 0)} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2 - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$

∴ معادلة المماس هى : ص − ٠ = ١ × ( س − $\tfrac{1}{4}\pi$ )

أى : ص = س − $\tfrac{1}{4}\pi$

**[٣] (أ)** عين فترات التحدب لأعلى و فترات التحدب لأسفل و نقط الإنقلاب ( إن وجدت ) لمنحنى الدالة د حيث :

د(س) = ( س − ١ )$^{٤}$ + ٣

**الحل**

∵ د(س) = ( س − ١ )$^{٤}$ + ٣ ∴ د$'$(س) = ٤ ( س − ١ )$^{٣}$

، د$''$(س) = ١٢ ( س − ١ )$^{٢}$

بوضع : د$''$(س) = ٠ ∴ س = ١

، عندما : س < ١ فإن : د$''$(س) > ٠

، عندما : س > ١ فإن : د$''$(س) > ٠

| س | $-\infty$ | ١ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة د$''$ | + | | + |
| تحدب منحنى د | لأسفل | | لأسفل |

∴ منحنى الدالة د محدب لأسفل لكل س ∈ ح و لا توجد نقط إنقلاب

**(ب)** متوازى مستطيلات من المعدن قاعدته على شكل مربع ، فإذا تزايد طول ضلع القاعدة بمعدل ٠,٤ سم / ث و تناقص الارتفاع بمعدل ٠,٥ سم / ث أوجد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة بمعدل ٦ سم و الارتفاع بمعدل ٥ سم

**الحل**

نفرض أن : طول ضلع القاعدة = س سم ، الارتفاع = ع سم

∴ الحجم ح = س$^{٢}$ ع    باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ ن

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٢ س ع $\frac{دس}{دن}$ + س$^{٢}$ $\frac{دع}{دن}$

= ٢ × ٦ × ٢ × ٠,٤ + ٣٦ × ٠,٥ = ٦ سم$^{٣}$ / ث

**[٤] (أ)** أوجد $\int_{٠}^{٣}$ س $\sqrt{س + ١}$ دس

**الحل**

نفرض أن : ص = س + ١ ∴ دص = دس ، س = ص − ١

، عندما : س = ٠ فإن : ص = ١ ، عندما : س = ٣ فإن : ص = ٤

∴ المقدار = $\int_{١}^{٤}$ ( ص − ١ ) × ص$^{\frac{١}{٢}}$ دص = $\int_{١}^{٤}$ ( ص$^{\frac{٣}{٢}}$ − ص$^{\frac{١}{٢}}$ ) دص

= [ $\frac{٢}{٥}$ ص$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٢}{٣}$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$ ]$_{١}^{٤}$

= ( $\frac{٢}{٥}$ × ٣٢ − $\frac{٢}{٣}$ × ٨ ) − ( $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{٢}{٣}$ ) = $\frac{١١٦}{١٥}$

**(ب)** ملعب على شكل مستطيل ينتهى ضلعان متقابلان منه بنصفى دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ متراً فإثبت أن مساحة سطح الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة ، و أوجد طول نصف قطرها

**الحل**

نفرض أن : طول المستطيل = ص متر

، عرض المستطيل = طول قطر الدائرة = ٢ س متر

أى أن : طول نصف قطر الدائرة = س متر




∵ محيط الملعب = ٤٠٠ متر

∴ ٢ س π + ٢ ص = ٤٠٠

و منها : ص = ٢٠٠ − س π

، مساحة الملعب = د(س)

= مساحة دائرة + مساحة مستطيل

= π س$^{٢}$ + س ص

∴ د(س) = π س$^{٢}$ + س ( ٤٠٠ − ٢ س π )

= π س$^{٢}$ + ٤٠٠ س − ٢ س$^{٢}$ π = ٤٠٠ س − س$^{٢}$ π

∴ د$'$(س) = ٤٠٠ − ٢ س π ، د$''$(س) = − ٢ π

بوضع : $د'(س) = ٠$ ∴ $٤٠٠ - ٢ س \pi$ و منها : $س = \frac{٢٠٠}{\pi}$

، ∵ $د''(\frac{٢٠٠}{\pi}) < ٠$ ∴ $س = \frac{٢٠٠}{\pi}$ تجعل مساحة الملعب أكبر ما يمكن

∴ $ص = ٢٠٠ - \frac{٢٠٠}{\pi} \times \pi =$ صفر

أى أن : الملعب يكون على شكل دائرة طول نصف قطرها $\frac{٢٠٠}{\pi}$ متر

[٥] (أ) إذا كانت : $د(س) = س^٣ - ٣ س + ٣$ أوجد :

أولاً : القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [ ٠ ، ٢ ]

ثانياً : مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و المستقيمات $س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $ص = ٠$

الحل

أولاً : ∵ $د(س) = س^٣ - ٣ س + ٣$

∴ $د'(س) = ٣ س^٢ - ٣ = ٣ ( س + ١ )( س - ١ )$

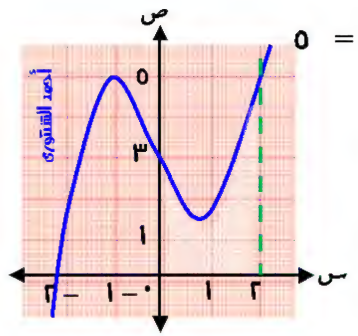
نضع : $د'(س) = ٠$ ∴ $س = ١ \in [ ٠ ، ٢ ]$

، $س = -١ \notin [ ٠ ، ٢ ]$

، ∵ $د(٠) = ٣$ ، $د(١) = ١$ ، $د(٢) = ٥$

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٥

، القيمة الصغرى المطلقة = ١




ثانياً : $م = \int_{٠}^{٢} ( س^٣ - ٣ س + ٣ ) ء س$

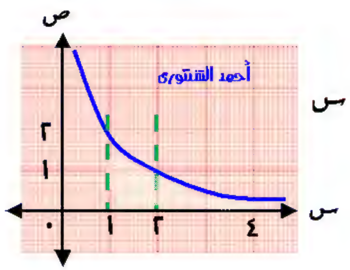
$= [ \frac{١}{٤} س^٤ - \frac{٣}{٢} س^٢ + ٣ س ]_{٠}^{٢}$

$= ٤ - ٦ + ٦ = ٤$ وحدات مربعة

(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $س ص = ٢$ و المستقيمان $س = ١$ ، $س = ٢$

الحل

$ص = \frac{٢}{س}$ ، الدوران حول محور السينات




∴ $ح = \pi \int_{١}^{٢} ص^٢ ء س = \pi \int_{١}^{٢} \frac{٤}{س^٢} ء س$

$= \pi \int_{١}^{٢} ( ٤ س^{-٢} ) ء س$

$= \pi [ -٤ س^{-١} ]_{١}^{٢}$

$= \pi [ -\frac{٤}{س} ]_{١}^{٢} = \pi ( -٢ + ٤ ) = ٢ \pi$ وحدة مكعبة

## الاختبار الثامن

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اكمل ما يلى :

(١) إذا كان : $س^٣ ص^٢ = ١$ فإن : $[\frac{ءص}{ءس}]_{س = ١} = ....$

الحل

(١) باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س : $٣ س^٢ ص^٢ + ٢ س^٣ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = - \frac{٣ص}{٢س}$ ، عند : $س = ١$ فإن : $ص = ١$

∴ $[\frac{ءص}{ءس}]_{س = ١} = - \frac{٣}{٢}$

(٢) $\frac{ء}{ءس} [ ٧ هـ^{قا س} ] = ....$

الحل

(٢) $\frac{ء}{ءس} [ ٧ هـ^{قا س} ] = ٧$ قا س طا س $هـ^{قا س}$

(٣) للدالة د : $د(س) = س^٣ - ٣ س - ١$ نقطة إنقلاب هى ....

الحل

(٣) ∵ $د(س) = س^٣ - ٣ س - ١$ ∴ $د'(س) = ٣ س^٢ - ٣$

، د″(س) = ٦ س ، ∵ د″(س) = ٠ عندما : س = ٠ ∴ (٠) = −١

، ∵ د″(س) < ٠ عندما س < ٠ ، د″(س) > ٠ عندما س > ٠

∴ النقطة ( ٠ ، −١ ) نقطة إنقلاب

**(٤)** إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ ٢ ، ٧ ] فإن :

$\int_{٢}^{٧}$ د(س) ءس + $\int_{٧}^{٤}$ د(س) ءس = ....

الحل

(٤) $\int_{٢}^{٧}$ د(س) ءس + $\int_{٧}^{٤}$ د(س) ءس = $\int_{٢}^{٧}$ د(س) ءس −

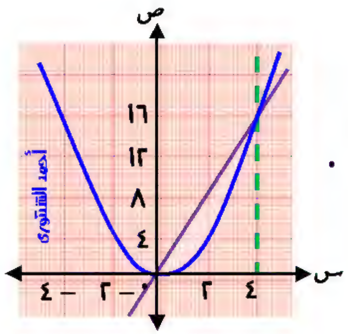
$\int_{٤}^{٧}$ د(س) ءس = $\int_{٢}^{٤}$ د(س) ءس + $\int_{٤}^{٧}$ د(س) ءس −

$\int_{٤}^{٧}$ د(س) ءس = $\int_{٢}^{٤}$ د(س) ءس

**(٥)** مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س$^{٢}$ ، ص = ٤ س

تساوى .... وحدة مربعة

الحل




(٥) ص$_{١}$ = س$^{٢}$ ، ص$_{٢}$ = ٤ س

نضع : ص$_{١}$ = ص$_{٢}$ ∴ س$^{٢}$ = ٤ س

∴ س$^{٢}$ − ٤ س = ٠ ∴ س ( س − ٤ ) = ٠

و منها : س = ٠ ، س = ٤

، ∵ ص$_{٢}$ ≥ ص$_{١}$ لكل : س ∈ [ ٠ ، ٤ ]

∴ م = $\int_{٠}^{٤}$ ( ص$_{٢}$ − ص$_{١}$ ) ءس

= $\int_{٠}^{٤}$ ( ٤ س − س$^{٢}$ ) ءس = [ ٢ س$^{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ ]$_{٠}^{٤}$

= [ ( ٣٢ − $\frac{٦٤}{٣}$ ) − ( ٠ ) ] = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

**(٦)** إذا كانت ص = س$^{٢}$ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ ، أ ≠ ٠

فإن : [ $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ ]$_{س = ٤}$ = ....

الحل

(٦) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + س$^{٢}$ × $\frac{أ}{س}$ × $\frac{١}{أ}$ = ٢ س لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + س

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ = ٢ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + ٢ س × $\frac{أ}{س}$ × $\frac{١}{أ}$ = ٢ لو$_{هـ}$ $\frac{س}{أ}$ + ٢

$\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ = ٢ × $\frac{أ}{س}$ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{٢}{س}$ ∴ [ $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ ]$_{س = ٤}$ = $\frac{١}{٢}$

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

**[٢] (أ)** أوجد : **(١)** $\int$ $\frac{(س + ٣)^{٣} − ٢٧}{س}$ ءس ،

**(٢)** $\int$ س$^{٢}$ هـ$^{−س}$ ءس

الحل

(١) ∵ (س + ٣)$^{٣}$ − ٢٧ = (س + ٣ − ٣) [ (س + ٣)$^{٢}$ + ٣ (س + ٣) + ٩ ]

= س ( س$^{٢}$ + ٦ س + ٩ + ٣ س + ٩ + ٩ )

= س ( س$^{٢}$ + ٩ س + ٢٧ )

∴ المقدار = $\int$ ( س$^{٢}$ + ٩ س + ٢٧ ) ءس

= $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ + $\frac{٩}{٢}$ س$^{٢}$ + ٢٧ س + ث

(٢) نضع : ص = س$^{٢}$ ∴ ءص = ٢ س ءس ،

ءع = هـ$^{−س}$ ءس ∴ ع = − هـ$^{−س}$

∴ المقدار = − س$^{٢}$ هـ$^{−س}$ + ٢ $\int$ س هـ$^{−س}$ ءس

، نضع : ق = س ∴ ءق = ءس ،

ء ل = هـ$^{-س}$ ء س      ∴ ل = − هـ$^{-س}$

∴ المقدار = − س$^{٢}$ هـ$^{-س}$ + ٢ [ − س هـ$^{-س}$ + ∫ هـ$^{-س}$ ء س ]

= − س$^{٢}$ هـ$^{-س}$ − ٢ س هـ$^{-س}$ − ٢ هـ$^{-س}$ + ث

= − هـ$^{-س}$ ( س$^{٢}$ + ٢ س + ٢ ) + ث

**(ب)** أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث :

د(س) = ٢ طا$^{٣}$ س عند النقطة التى تقع على منحنى الدالة د و إحداثيها السينى يساوى ¼ π

**الحل**

∵ د(س) = ٢ طا$^{٣}$ س      ∴ د$'$(س) = ٦ طا س قا$^{٢}$ س

، عند : س = ¼ π فإن : د(س) = ٢ × (١)$^{٣}$ = ٢

، ميل المماس = [ د$'$(س) ]$_{(¼π ، ٢)}$ = ٦ × ١ × ٢ = ١٢

∴ معادلة المماس هى : ص − ٢ = ١٢ × ( س − ¼ π )

أى : ٣ س − ص − ٢ − ٣ π = ٠

**[٣] (أ)** أوجد : $\int_{٠}^{٥}$ | س − ٢ | ء س

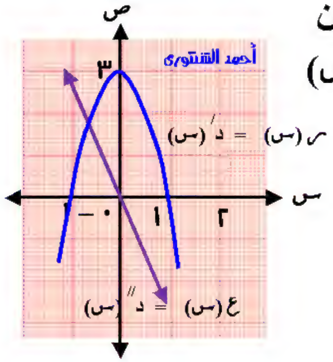
**الحل**

المقدار = $\int_{٠}^{٢}$ ( − س + ٢ ) ء س + $\int_{٢}^{٥}$ ( س − ٢ ) ء س

= [ − ½ س$^{٢}$ + ٢ س ]$_{٠}^{٢}$ + [ ½ س$^{٢}$ − ٢ س ]$_{٢}^{٥}$

= [ ( − ٢ + ٤ ) − ٠ ] + [ ( ٢٥/٢ − ١٠ ) − ( − ٢ + ٤ ) ] = ١٣/٢

**(ب)** يوضح الشكل المقابل : منحنيا الدالتين ر ، ع حيث : ر(س) = د$'$(س) ، ع(س) = د$''$(س) ، د دالة كثيرة حدود فى المتغير س ، ارسم الشكل العام لمنحنى د علماً بأنه يمر بالنقطتين ( − ١ ، ٠ ) ، ( ١ ، ٤ )




**الحل**

∵ د(س) دالة كثيرة حدود ، د$''$(س) دالة من الدرجة الأولى كما بالشكل

، د$'$(س) دالة من الدرجة الثانية كما بالشكل

∴ د(س) دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

بفرض أن : د(س) = أ س$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + حـ س + ء

∴ د$'$(س) = ٣ أ س$^{٢}$ + ٢ ب س + حـ ، د$''$(س) = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ منحنى د$''$(س) يمر بالنقطة ( ٠ ، ٠ ) ∴ د$''$(٠) = ٠

∴ ٠ = ٠ + ٢ ب و منها : ب = ٠

، ∵ منحنى د$'$(س) يمر بالنقط ( ٠ ، ٣ ) ، ( ١ ، ٠ )

∴ د$'$(٠) = ٣ ، د$'$(١) = ٠

∴ ٣ = ٠ + ٠ + حـ و منها : حـ = ٣ ، ٠ = ٣ أ + ٢ ب + حـ

، ∵ حـ = ٣ ، ب = ٠ ∴ أ = − ١

، ∵ منحنى د(س) يمر بالنقطة ( − ١ ، ٠ ) د( − ١ ) = ٠

∴ ٠ = − أ + ب − حـ + ء و منها : ء = ٢

∴ د(س) = − س$^{٣}$ + ٣ س + ٢

∴ د$'$(س) = − ٣ س$^{٢}$ + ٣ = − ٣ ( س − ١ ) ( س + ١ )

∴ د$'$(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = − ١ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متناقصة فى ] −∞ ، −١ [ ، و فى ] ١ ، ∞ [

و متزايدة فى ] −١ ، ١ [

، د″(س) = −٦ س ، ∵ د″(١) < ٠ ∴ د(١) = ٤ قيمة عظمى محلية

، ∵ د″(−١) > ٠ ∴ د(−١) = ٠ قيمة صغرى محلية

، ∵ د″(س) = ٠ عندما : س = ٠

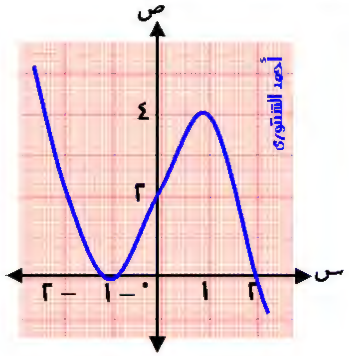
، ∵ د″(س) > ٠ فى ] −∞ ، ٠ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، ∵ د″(س) < ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ٢ ) نقطة إنقلاب ، المنحنى يمر بالنقطة ( ١ ، ٤ )

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

| س | ∞ ١ ٠ −١ −∞ | | |
|---|---|---|---|
| إشارة د′ | + ٠ − ٠ + | | |
| سلوك د | ↘ | ↗ | ↘ |
| إشارة د″ | − ٠ + | | |
| تحدب د | لأعلى | | لأسفل |
| ص | ٤ | ٢ | ٠ |
| | قيمة عظمى محلية | نقطة إنقلاب | قيمة صغرى محلية |




[٤] (أ) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د فى الفترة [ ٠ ، ٢ ]

حيث : د(س) = ٣ $\sqrt{\text{٤ − س}^2}$

الحل

∵ د(س) = ٣ $\sqrt{\text{٤ − س}^2}$ = ٣ ( ٤ − س² )^½

∴ د′(س) = ٣ × ½ × ( −٢ س ) ( ٤ − س² )^−½ = $\frac{\text{٣ س}}{\sqrt{\text{٤ − س}^2}}$

، ∵ د′(س) = ٠ عندما : س = ٠ ∈ [ ٠ ، ٢ ]

، د′(س) غير موجودة عند : ٤ − س² = ٠ أى عند : س = ٢ ∈ [ ٠ ، ٢ ]

، س = −٢ ∉ [ −١ ، ١ ] " مرفوض "

∴ د(٠) = ٦ ، د(٢) = ٠

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٦ ، القيمة الصغرى المطلقة = ٠

(ب) قضيب طوله ٥ أمتار مثبت فى الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رفع طرفه الآخر رأسياً إلى أعلى بواسطة ونش بمعدل ١ متر / دقيقة أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار

الحل




نفرض أن : ارتفاع طرف القضيب عن الأرض = س م

، طول مسقط القضيب على الأرض = ص م

من هندسة الشكل : س² + ص² = ٢٥

∴ عندما : س = ٣ فإن : ص = ٤

، ٢ س × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

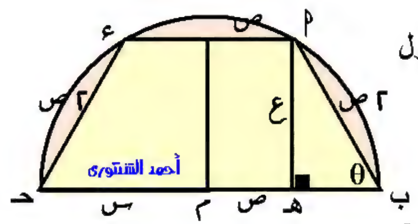
∴ ٢ × ٣ × ١ + ٢ × ٤ × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠ و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = −¾ م / د

[٥] (أ) رسم فى نصف دائرة شبه منحرف قاعدته هى قطر نصف الدائرة ، طول قاعدته الصغرى يساوى طول كل من ساقيه يساوى مقدار ثابت عين قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن

الحل

نفرض أن :

طول قاعدة شبه المنحرف الصغرى = طول ساقيه = ٢ ص وحدة طول ،




طول قاعدة شبه المنحرف الكبرى = طول قطر نصف الدائرة = ٢ س وحدة طول

، قياس زاوية قاعدة شبه المنحرف = θ

من هندسة الشكل : ب هـ = س − ص ،

ع$^{٢}$ = ٤ ص$^{٢}$ − (س − ص)$^{٢}$

= ٤ ص$^{٢}$ − (س$^{٢}$ − ٢ س ص + ص$^{٢}$)

= ٤ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص − ص$^{٢}$ = ٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص

∴ ع = (٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

، مساحة شبه المنحرف = د(س) = $\frac{١}{٢}$ × (٢ س + ٢ ص) × ع

∴ د(س) = (س + ص)(٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ د$^{/}$(س) = ١ × (٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص)$^{\frac{١}{٢}}$ +

$\frac{١}{٢}$ (٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ (− ٢ س + ٢ ص)(س + ص)

∴ د$^{/}$(س) = (٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ (٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص + ص$^{٢}$ − س$^{٢}$) =

∴ د$^{/}$(س) = (٣ ص$^{٢}$ − س$^{٢}$ + ٢ س ص)$^{-\frac{١}{٢}}$ (٤ ص$^{٢}$ + ٢ س ص − ٢ س$^{٢}$)

= $\frac{٤ ص^{٢} + ٢ س ص − ٢ س^{٢}}{\sqrt{٣ ص^{٢} − س^{٢} + ٢ س ص}}$

د$^{/}$(س) = ٠ عندما : ٤ ص$^{٢}$ + ٢ س ص − ٢ س$^{٢}$ = ٠

∴ ٢ (٢ ص − س)(ص + س) = ٠

و منها : س = ٢ ص أو : س = ص مرفوض " يصبح : ب هـ = ٠ "

، ∵ د$^{/}$(س) > ٠ عندما : س < ٢ ص ، د$^{/}$(س) < ٠ عندما : س > ٢ ص

∴ س = ٢ ص تجعل مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن

و عندها يكون : ب هـ = ص وحدة طول ، حتا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = $\frac{١}{٣}$ π

**(ب)** إذا كانت م المنطقة المحددة بالمنحنى س ص = ٤ + س$^{٢}$ و المستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠ . أوجد :

أولاً : مساحة المنطقة م بالوحدات المربعة لأقرب وحدة

ثانياً : حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة م دورة كاملة حول محور السينات

**الحل**

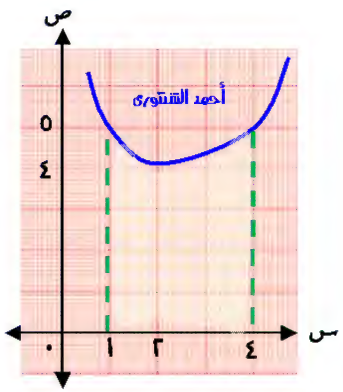
ص = $\frac{٤ + س^{٢}}{س}$ = $\frac{٤}{س}$ + س

م = $\int_{١}^{٤}$ ($\frac{٤}{س}$ + س) ء س

= [ ٤ لو$_{هـ}$ س + $\frac{١}{٢}$ س$^{٢}$ ]$_{١}^{٤}$

= ٤ لو$_{هـ}$ ٤ + ٨ − ٤ لو$_{هـ}$ ١ − $\frac{١}{٢}$

= ٤ لو$_{هـ}$ ٤ + $\frac{١٥}{٢}$ ≃ ١٣ وحدة مربعة




∴ ح = π $\int_{١}^{٤}$ ص$^{٢}$ ء س

= π $\int_{١}^{٤}$ ($\frac{١٦}{س^{٢}}$ + ٨ + س$^{٢}$) ء س

= π [ − $\frac{١٦}{س}$ + ٨ س + $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ ]$_{١}^{٤}$

= π ( − ٤ + ٣٢ + $\frac{٦٤}{٣}$ ) − ( − ١٦ + ٨ + $\frac{١}{٣}$ )

= ٥٧ π وحدة مكعبة

# الاختبار التاسع

**أولاً : أجب عن السؤال التالى :**

**[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة**

(١) إذا كان $س = ٤ ن^{٢} + ٧$ ، $ص = \sqrt{ن^{٣}}$ ، $ن = ١$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ....$

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (حـ) ٢ (ء) ٣

الحل

$\frac{ءس}{ءن} = ٤ن$ ، $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٣}{٢}\sqrt{ن}$ عندما : $ن = ١$ فإن :

$\frac{ءس}{ءن} = ٤$ ، $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٣}{٢}$ ، $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{ن=١} = \left[\frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}\right]_{ن=١} = \frac{٣}{٨}$

(٢) منحنى الدالة د محدباً لأسفل على ح إذا كان د (س) يساوى ....

(أ) $٢ - س^{٢}$ (ب) $٢ + س^{٣}$ (حـ) $٢ - س^{٤}$ (ء) $٢ + س^{٤}$

الحل

(ء) $٢ + س^{٤}$ لأن : ∵ $د(س) = ٢ + س^{٤}$ ∴ $د'(س) = ٤ س^{٣}$

، $د''(س) = ١٢ س^{٢}$ ، $د''(س) > ٠$ لكل $س \in ح$

∴ منحنى الدالة د محدباً لأسفل على ح " إدرس الدوال الأخرى بنفسك "

(٣) إذا كان لمنحنى الدالة د حيث $د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٤$ ،

$ك \in ح$ نقطة إنقلاب عند $س = ٢$ فإن $ك = ....$

(أ) $-٦$ (ب) $-٣$ (حـ) ٦ (ء) ٩

الحل

∵ $د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٤$ ∴ $د'(س) = ٣ س^{٢} + ٢ ك س$

، $د''(س) = ٦ س + ٢ ك$ ، ∵ نقطة إنقلاب عند $س = ٢$

عندما : $د''(٢) = ٠$ ∴ $١٢ + ٢ك = ٠$ و منها : $ك = -٦$

(٤) إذا كانت الدالة د متصلة على ح ، $\int_{-1}^{3} د(س)\, ءس = ٧$ ،

$\int_{5}^{3} د(س)\, ءس = -١١$ فإن : $\int_{-1}^{5} د(س)\, ءس$ يساوى ....

(أ) $-٤$ (ب) ١٨ (حـ) $-١٨$ (ء) ٧٧

الحل

∵ $\int_{5}^{3} د(س)\, ءس = -١١$ ∴ $\int_{3}^{5} د(س)\, ءس = ١١$

∴ $\int_{-1}^{5} د(س)\, ءس = \int_{-1}^{3} د(س)\, ءس + \int_{3}^{5} د(س)\, ءس =$

$= ٧ + ١١ = ١٨$

(٥) $\int_{-1}^{3} |س - ١|\, ءس = ....$

(أ) $-٦$ (ب) ٠ (حـ) ٤ (ء) ١

الحل

$\int_{-1}^{3} |س - ١|\, ءس = \int_{-1}^{1} (-س + ١)\, ءس +$

$\int_{1}^{3} (س - ١)\, ءس = \left[-\frac{١}{٢}س^{٢} + س\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{١}{٢}س^{٢} - س\right]_{1}^{3}$

$= \left[(-\frac{١}{٢} + ١) - (-\frac{١}{٢} - ١)\right] +$

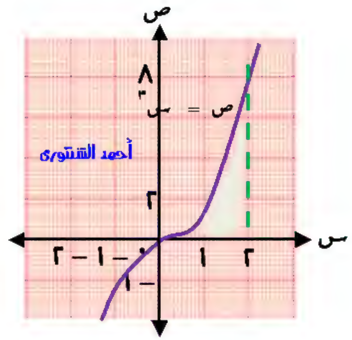
$\left[(\frac{٩}{٢} - ٣) - (\frac{١}{٢} - ١)\right] = ٤$

(٦) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^{٣}$ و المستقيمين

، $ص = ٠$ ، $س = ٢$ تساوى .... وحدة مربعة

(أ) ١ (ب) ٣ (حـ) ٤ (ء) ٨

**الحل**




نضع : ص = ٠ ∴ $س^٣ = ٠$

و منها : س = ٠

∴ حدا التكامل هما : س = ٠ ، س = ٢

∴ $م = \int_{٠}^{٢} س^٣ \, ء س = \left[ \frac{١}{٤} س^٤ \right]_{٠}^{٢}$

$= \frac{١}{٤} \times ١٦ = ٤$ وحدات مربعة

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

[٢] (أ) أوجد : (١) $\int \frac{٣ س}{س^٢ - ١} \, ء س$ ،

(٢) $\int ٩ س^٢ هـ^{س^٣} \, ء س$

**الحل**

(١) $\int \frac{٣ س}{س^٢ - ١} \, ء س = \frac{٣}{٢} \int \frac{٢ س}{س^٢ - ١} \, ء س = \frac{٣}{٢} \int \frac{(س^٢ - ١)'}{س^٢ - ١} \, ء س$

$= \frac{٣}{٢} لو_{هـ} | س^٢ - ١ |$

(٢) نضع : $ص = ٣ س^٢$ ∴ $ء ص = ٦ س \, ء س$ ،

$ء ع = ٣ هـ^{س^٣} ء س$ ∴ $ع = هـ^{س^٣}$

∴ المقدار $= ٣ س^٢ هـ^{س^٣} - \int ٦ س \, هـ^{س^٣} ء س$

، نضع : $ن = ٢ س$ ∴ $ء ن = ٢ \, ء س$ ،

$ء ل = ٣ هـ^{س^٣} ء س$ ∴ $ل = هـ^{س^٣}$

∴ المقدار $= ٣ س^٢ هـ^{س^٣} - \left[ ٢ س \, هـ^{س^٣} - ٢ \int هـ^{س^٣} ء س \right]$

$= ٣ س^٢ هـ^{س^٣} - ٢ س \, هـ^{س^٣} + \frac{٣}{٢} هـ^{س^٣} + ث$

$= هـ^{س^٣} \left( ٣ س^٢ - ٢ س + \frac{٣}{٢} \right) + ث$

(ب) أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها مماس المنحنى $ص^٣ = س^٢$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند س = ٨ لأقرب دقيقة

**الحل**

∵ $ص^٣ = س^٢$ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ $٣ ص^٢ \times \frac{ء ص}{ء س} = ٢ س$ ∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢ س}{٣ ص^٢}$

عند : س = ٨ فإن : $ص^٣ = ٦٤$ ∴ ص = ٤

∴ $ظا \theta = \left[ \frac{ء ص}{ء س} \right]_{(٨ ، ٤)} = \frac{١}{٣}$ ، $\theta = ١٨^\circ$ لأقرب دقيقة

[٣] (أ) إذا كان : حا س = س ص أثبت أن :

$س^٢ ( ص + ص'' ) + ٢ \, حتا س = ٢ ص$

**الحل**

∵ حا س = س ص (١) باشتقاق الطرفين مرتين بالنسبة لـ س ينتج :

∴ $حتا س = ص + س ص'$ و منها : $ص' = \frac{١}{س} ( حتا س - ص )$ (٢)

، $- حا س = ص' + ص' + س ص''$ بالتعويض من (١) ينتج :

$- س ص = ٢ ص' + س ص''$ بالتعويض من (٢) ينتج :

$- س ص = \frac{٢}{س} ( حتا س - ص ) + س ص''$ بالضرب × س ينتج :

$- س^٢ ص = ٢ \, حتا س - ٢ ص + س^٢ ص''$ و منها :

$س^٢ ( ص + ص'' ) + ٢ \, حتا س = ٢ ص$

(ب) إذا كان للمنحنى : $ص = ٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤ س + ٥$
مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة ( −١ ، ٢ )
أوجد معادلة المماس الآخر

**الحل**

∵ ص = ٢ س^٣ + ٣ س^٢ + ٤ س + ٥

∴ ءص/ءس = ٦ س^٢ + ٦ س + ٤ ، (ءص/ءس)_(−١ ، ٢) = ٤

، ∵ المماسان متوازيان ∴ ميل المماس الآخر = ٤

∴ ٦ س^٢ + ٦ س + ٤ = ٤ و منها : س = −١ ، س = ٠ .

، بالتعويض فى معادلة المنحنى ينتج :

عند : س = −١ فإن : ص = ٢ و هى النقطة المعطاة ،

عند : س = ٠ فإن : ص = ٥ و هى النقطة التى عندها المماس الآخر

و تكون معادلة المماس الآخر هى :

ص − ٥ = ٤ × ( س − ٠ ) أى : ٤ س − ص + ٥ = ٠ .

**[٤] (أ)** يرتفع بالون رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨ متر / دقيقة فإذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض يبعد ٢٠٠ متراً عن موقع إطلاق البالون ، أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد له عندما يكون البالون على ارتفاع ٢٠٠ متراً

**الحل**




نفرض أن : س ارتفاع البالون عن سطح الأرض بعد ن دقيقة

، θ قياس زاوية ارتفاع نظر المشاهد حيث س ، θ دوال فى الزمن

من الشكل المقابل : طا θ = (١/٢٠٠) س

، باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

∴ قا^٢ θ × ءθ/ءن = ١/٢٠٠ × ءس/ءن

عندما : س = ٢٠٠ م فإن : θ = ¼ π ، ∵ ءس/ءن = ٢٨ م / د

∴ قا^٢ ¼ π × ءθ/ءن = ٢٨/٢٠٠ ∴ ٢ × ءθ/ءن = ٢٨/٢٠٠

و منها : ءθ/ءن = ٠,٠٧ ء / د

**(ب)** إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة ( س ، ص ) على المنحنى هو ٣ ( س^٢ − ١ ) أوجد القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية لمنحنى الدالة د و نقط الإنقلاب إن وجدت ، علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة ( −٢ ، −١ ) ، ثم أرسم شكلاً عاماً لهذا المنحنى

**الحل**

∵ د′(س) = ٣ ( س^٢ − ١ ) = ٣ س^٢ − ٣

∴ د(س) = ∫ ( ٣ س^٢ − ٣ ) ء س = س^٣ − ٣ س + ث

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( −٢ ، −١ ) ∴ د(−٢) = −١

∴ −١ = −٨ + ٦ + ث و منها : ث = ١

∴ د(س) = س^٣ − ٣ س + ١

، د′(س) = ٣ س^٢ − ٣ = ٣ ( س^٢ − ١ ) = ٣ ( س − ١ ) ( س + ١ )

∴ د′(س) = ٠ عندما : س = ١ ، س = −١ و هى النقط الحرجة للدالة

و تكون الدالة متزايدة فى ] ١ ، ∞ [ ، و فى ] −∞ ، −١ [

و متناقصة فى ] −١ ، ١ [

، د″(س) = ٦ س ، ∵ د″(١) > ٠ ∴ د(١) = −١ قيمة صغرى محلية

، ∵ د″(−١) < ٠ ∴ د(−١) = ٣ قيمة عظمى محلية

، ∵ د″(س) = ٠ عندما : س = ٠ .

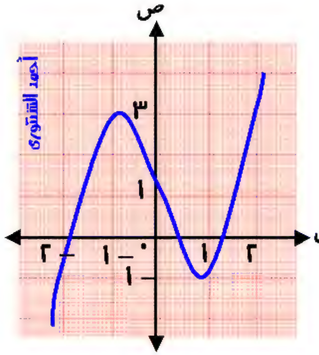
، ∵ د″(س) < ٠ فى ] −∞ ، ٠ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، ∵ د″(س) > ٠ فى ] ٠ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، النقطة ( ٠ ، ١ ) نقطة إنقلاب ، المنحنى يمر بالنقطة ( ٢ ، ٣ ) ، ( −٢ ، −١ )

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

| س | ∞ − | ١− | ٠ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د/ | + ٠ − ٠ + | | | | |
| سلوك د | ↗ | ↘ | ↗ | | |
| إشارة د// | − | ٠ | + | | |
| تحدب د | لأعلى | لأسفل | | | |
| ص | ٣ | ١ | ١− | | |
| | قيمة عظمى محلية | نقطة إنقلاب | قيمة صغرى محلية | | |




[٥] المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ يقطع منحنى الدالة د فى النقطة حـ ( س ، ص ) حيث س > ٠ ، أ ( ٠ ، ٢ ) ، ب ( ٦ ، ٤ ) ، د(س) = $\frac{٩}{\text{س}}$

أوجد : (أ) معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (ب) إحداثى نقطة حـ

(حـ) معادلة العمودى على منحنى د عند النقطة حـ ، و أثبت أنه يمر بنقطة الأصل

(ء) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالعمودى $\overleftrightarrow{\text{وحـ}}$ و منحنى الدالى د و المستقيم س = ٦ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

(أ) معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ هى : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٠} = \frac{٤ - ٢}{٦ - ٠}$ أى : $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س}} = \frac{١}{٣}$

∴ س − ٣ ص + ٦ = ٠ (١)

(ب) ∵ ص = $\frac{٩}{\text{س}}$ بالتعويض من (١) ينتج : ص = $\frac{٩}{٣\text{ص} - ٦}$

و منها : ٣ ص² − ٦ ص − ٩ = ٠ ∴ ٣ ( ص² − ٢ ص − ٣ ) = ٠

∴ ٣ ( ص − ٣ ) ( ص + ١ ) = ٠ و منها : ص = ٣ ، ص = −١

، بالتعويض فى (١) ينتج : عندما : ص = ٣ فإن : س = ٣

، عندما : ص = −١ فإن : س = −٩ مرفوض ( حيث : س > ٠ )

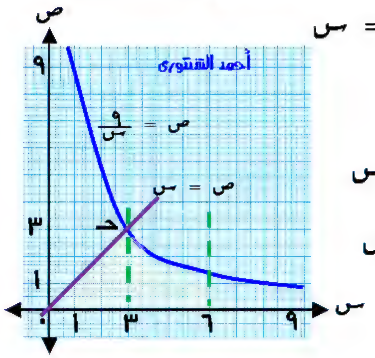
∴ إحداثى نقطة حـ ( ٣ ، ٣ )

(حـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٩}{\text{س}^٢}$ ∴ ميل المماس عند حـ = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(٣ ، ٣)}$ = −١

∴ ميل العمودى عند حـ = ١ ، معادلة العمودى عند حـ هى :

ص − ٣ = ١ × ( س − ٣ ) أى : ص = س

∵ هذه المعادلة لا تحتوى على حد مطلق ، فإن العمودى عند حـ يمر بنقطة الأصل




(ء) ح = $\pi \int_{٠}^{٣} \text{ص}_١^٢ \, \text{ءس} + \pi \int_{٣}^{٦} \text{ص}_٢^٢ \, \text{ءس}$

= $\pi \int_{٠}^{٣} \text{س}^٢ \, \text{ءس} + \pi \int_{٣}^{٦} \frac{٨١}{\text{س}^٢} \, \text{ءس}$

= $\pi \left[ \frac{١}{٣} \text{س}^٣ \right]_{٠}^{٣} + \pi \left[ \frac{-٨١}{\text{س}} \right]_{٣}^{٦}$

= π ( ٩ − ٠ ) + π ( $-\frac{٨١}{٦} + \frac{٨١}{٣}$ ) = $\frac{٤٥}{٢}\pi$ وحدة مكعبة

## الاختبار العاشر

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

[أ] اكمل ما يلى :

(١) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}+٢}$ = ....

الحل

(١) المقدار = $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \times \lim_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$ = هـ × ١ = هـ

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} ( ٥ - ٢ \text{ طاس} )^٣$ = ....

الحل

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} ( ٥ - ٢ \text{ طاس} )^٣$ = ٣ ( ٥ − ٢ طاس )² × ( −٢ قا²س )

= ( −٦ قا²س ) ( ٥ − ٢ طاس )²

**(٣)** إذا كان للدالة د : د(س) = ك س$^{٣}$ + ٩ س$^{٢}$ ، نقطة إنقلاب عند س = − ١ فإن ك = ....

**الحل**

**(٣)** ∵ د(س) = ك س$^{٣}$ + ٩ س$^{٢}$ ∴ د$^{/}$(س) = ٣ ك س$^{٢}$ + ١٨ س

، د$^{//}$(س) = ٦ ك س + ١٨

، ∵ للمنحنى نقطة إنقلاب عندما : س = − ١

∴ د$^{//}$(− ١) = ٠ ∴ − ٦ ك + ١٨ = ٠ ∴ ك = ٣

**(٤)** $\int_{-١}^{٣}$ ( ٤ س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ + ٥ ) ء س = ....

**الحل**

**(٤)** المقدار = [ س$^{٤}$ − ٢ س$^{٣}$ + ٥ س ]$_{-١}^{٣}$

= ( ٨١ − ٥٤ + ٥ ) − ( ١ + ٢ − ٥ ) = ٣٤

**(٥)** إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ ١ ، ٤ ] فإن :

$\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س + $\int_{٤}^{١}$ د(س) ء س = ....

**الحل**

**(٥)** ∵ $\int_{٤}^{١}$ د(س) ء س = − $\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س ∴ المقدار = صفر

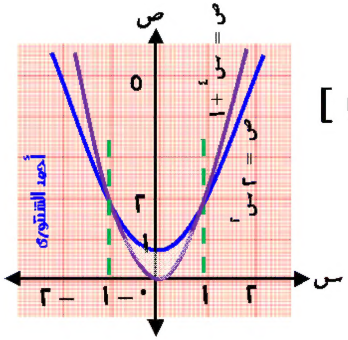
**(٦)** مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = س$^{٤}$ + ١ ، ص = ٢ س$^{٢}$ تساوى .... وحدة مربعة

**الحل**

**(٥)** ص$_{١}$ = س$^{٤}$ + ١ ، ص$_{٢}$ = ٢ س$^{٢}$

نضع : ص$_{١}$ = ص$_{٢}$ ∴ س$^{٤}$ + ١ = ٢ س$^{٢}$

∴ س$^{٤}$ − ٢ س$^{٢}$ + ١ = ٠ ∴ ( س$^{٢}$ − ١ )$^{٢}$ = ٠




∴ (س − ١ ) ( س + ١ ) = ٠

و منها : س = ١ ، س = − ١

، ∵ ص$_{٢}$ ≤ ص$_{١}$ لكل : س ∈ [− ١ ، ١ ]

∴ م = $\int_{-١}^{١}$ ( ص$_{١}$ − ص$_{٢}$ ) ء س

= ٢ $\int_{٠}^{١}$ ( ص$_{١}$ − ص$_{٢}$ ) ء س

= ٢ $\int_{٠}^{١}$ ( س$^{٤}$ + ١ − ٢ س$^{٢}$ ) ء س

= ٢ [ $\frac{١}{٥}$ س$^{٥}$ + س − $\frac{٢}{٣}$ س$^{٣}$ ]$_{٠}^{١}$

= ٢ [ ( $\frac{١}{٥}$ + ١ − $\frac{٢}{٣}$ ) − ( ٠ ) ] = $\frac{١٦}{١٥}$ وحدة مربعة

**ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :**

**[٢] (أ)** أوجد : **(١)** $\int$ طا ( ٣ س + ١ ) ء س ،

**(٢)** $\int$ ( ١ − س$^{٢}$ ) ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{٥}$ ء س

**الحل**

**(١)** $\int$ طا ( ٣ س + ١ ) ء س = $\int$ $\frac{\text{حا}(٣ س + ١)}{\text{حتا}(٣ س + ١)}$ ء س

= − $\frac{١}{٣}$ $\int$ $\frac{− ٣ \text{ حا}(٣ س + ١)}{\text{حتا}(٣ س + ١)}$ ء س = − $\frac{١}{٣}$ $\int$ $\frac{\text{حتا}(٣ س + ١)^{/}}{\text{حتا}(٣ س + ١)}$ ء س

= − $\frac{١}{٣}$ لو$_{هـ}$ | حتا ( ٣ س + ١ ) |

**(٢)** $\int$ ( ١ − س$^{٢}$ ) ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{٥}$ ء س = $\frac{١}{٣}$ $\int$ ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{٥}$ ( ٣ − ٣ س$^{٢}$ ) ء س

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{٥}$ ( ٣ − ٣ س$^{٢}$ ) ء س

= $\frac{١}{٣}$ $\int$ ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{٥}$ ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{/}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٦}$ ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{٦}$ + ث = $\frac{١}{١٨}$ ( ٣ س − س$^{٣}$ )$^{٦}$ + ث

**(ب)** إذا كانت المعادلتان البارامتريتان للدالة د حيث ص = د(س) هما : س = ٢ $ن^{٣}$ + ٣ ، ص = $ن^{٤}$ أوجد عند ن = ١ كل من : أولاً : معادلة مماس منحنى الدالة د

ثانياً : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

**الحل**

∵ س = ٢ $ن^{٣}$ + ٣ ∴ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٦ $ن^{٢}$

، ∵ ص = $ن^{٤}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٤ $ن^{٣}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٢}{٣}$ ن

أولاً : ميل المماس = $[\frac{ءص}{ءس}]_{ن = ١} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ س = ٥ ، ص = ١ عند ن = ١

∴ معادلة المماس هى : ص − ١ = $\frac{٢}{٣}$ ( س − ٥ )

أى : ٢ س − ٣ ص − ٧ = ٠

ثانياً : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = \frac{ء}{ءن}(\frac{ءص}{ءس}) \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{٤}{٣}ن \times \frac{١}{٦ن^{٢}} = \frac{١}{٩ن}$

∴ $[\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}]_{ن = ١} = \frac{١}{٩}$

**[٣] (أ)** أبحث تحدب منحنى الدالة د حيث د(س) = | $س^{٣}$ − ١ | موضحاً نقط الإنقلاب إن وجدت

**الحل**

د(س) = { $س^{٣}$ − ١ عندما س > ١ ، − $س^{٣}$ + ١ عندما س < ١ }   ∵ $د(١^{+}) = د(١^{-}) = د(١) = ٠$

∴ د(س) متعددة التعريف مجاها ح و متصلة عند س = ٠ . أى متصلة على ح

، ∵ عندما : س > ١ فإن : د(١+و) − د(١) = $(١+و)^{٣}$ − ١ − ٠

= ١ + ٣و + ٣$و^{٢}$ + $و^{٣}$ − ١ = و ( ٣ + ٣و + $و^{٢}$ )

∴ $د'^{+}(٠) = \underset{و \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{د(١+و) - د(١)}{و}$

$= \underset{و \to ٠^{+}}{نهـا} \frac{و(٣ + ٣و + و^{٢})}{و} = ٣$

، ∵ عندما : س < ١ فإن : د(١+و) − د(١) = − $(١+و)^{٣}$ + ١ − ٠

= −١ − ٣و − ٣$و^{٢}$ − $و^{٣}$ + ١ = و ( −٣ − ٣و − $و^{٢}$ )

، $د'^{-}(٠) = \underset{و \to ٠^{-}}{نهـا} \frac{د(١+و) - د(١)}{و}$

$= \underset{و \to ٠^{-}}{نهـا} \frac{و(-٣ - ٣و - و^{٢})}{و} = -٤$

∴ $د'(١^{+}) \neq د'(١^{-})$ ∴ د'(١) غير موجودة

∴ د'(س) = { ٣$س^{٢}$ عندما س > ١ ، غير موجودة عندما س = ١ ، −٣$س^{٢}$ عندما س < ١ }

، د''(س) = { ٦س عندما س > ١ ، −٦س عندما س < ١ }   ، ∵ د''(س) = ٠ عندما س = ٠

، د''(س) > ٠ عندما : س < ٠ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] − ∞ ، ٠ [

، د''(س) < ٠ عندما : ٠ < س < ١ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى ] ٠ ، ١ [

، ∵ د'(١) غير موجودة أى لا يوجد مماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، ٠)

∴ النقطة (١ ، ٠) ليست نقطة إنقلاب

، ∵ د''(س) > ٠ . عندما : ١ < س < ∞

∴ المنحنى محدب لأسفل فى ] ١ ، ∞ [

و الجدول المقابل يوضح ذلك :

| س | −∞ | ٠ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|---|
| إشارة د'' | + | ٠ − | غير موجودة | + |
| تحدب د | لأسفل | لأعلى | | لأسفل |

(ب) إذا كان $\int_{-٢}^{٣} د(س)\, ءس = ٩$ ، $\int_{٥}^{٣} د(س)\, ءس = ٤$

أوجد قيمة $\int_{-٢}^{٥} [\, ٣\, د(س) - ٦\, س \,]\, ءس$

**الحل**

، ∵ $\int_{٥}^{٣} د(س)\, ءس = ٤$   ∴ $\int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = -٤$

، ∵ $\int_{-٢}^{٣} د(س)\, ءس = ٩$

∴ $\int_{-٢}^{٥} د(س)\, ءس = \int_{-٢}^{٣} د(س)\, ءس + \int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = ٩ - ٤ = ٥$

∴ $\int_{-٢}^{٥} [\, ٣\, د(س) - ٦\, س \,]\, ءس = ٣ \int_{-٢}^{٥} د(س)\, ءس$

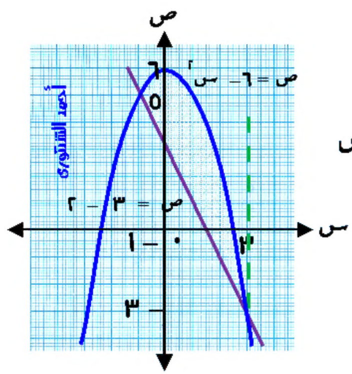
$- ٦ \int_{-٢}^{٥} س\, ءس = ٣ \times ٥ - ٦ \left[\, \frac{١}{٢} س^{٢} \,\right]_{-٢}^{٥}$

$= ١٥ - ٦ \left( \frac{٢٥}{٢} - ٢ \right) = ١٥ - ٧٥ + ١٢ = -٤٨$

[٤] (أ) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين

$ص + س^{٢} = ٦$ ، $ص + ٢\, س - ٣ = ٠$

**الحل**




(٥) $ص_{١} = ٦ - س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٣ - ٢\, س$

نضع : $ص_{١} = ص_{٢}$   ∴ $٦ - س^{٢} = ٣ - ٢\, س$

∴ $س^{٢} - ٢\, س - ٣ = ٠$

∴ $(\, س - ٣ \,)(\, س + ١ \,) = ٠$

و منها : س = ٣ ، س = −١

، ∵ $ص_{١} \geq ص_{٢}$ لكل : $س \in [-١ ، ٣]$

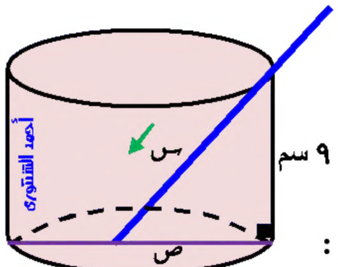
∴ $م = \int_{-١}^{٣} (\, ص_{١} - ص_{٢} \,)\, ءس = \int_{-١}^{٣} (\, ٦ - س^{٢} - ٣ + ٢\, س \,)\, ءس$

$= \int_{-١}^{٣} (\, ٣ - س^{٢} + ٢\, س \,)\, ءس = \left[\, ٣\, س - \frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢} \,\right]_{-١}^{٣}$

$= (\, ٩ - ٩ + ٩ \,) - (\, -٣ + \frac{١}{٣} + ١ \,) = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

(ب) إناء على شكل اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها من الداخل ٩ سم و طول نصف القطر الداخلى لقاعدته ٦ سم ، وضع ساق معدنية طولها ١٦ سم ، فإذا كان معدل انزلاق الساق مبتعدة عن حافة الاسطوانة ٢ سم / ث ، أوجد معدل انزلاق الساق على قاعدة الاسطوانة عندما تصل إلى نهاية قاعدتها

**الحل**




بفرض أن : طول جزء الساق المنزلق مبتعداً عن حافة الاسطوانة = س سم

، بعد الساق على قاعدة الاسطوانة = ص سم

من هندسة الشكل :

$س^{٢} = ٨١ + ص^{٢}$   (١)

عندما تصل الساق إلى نهاية قاعدة الاسطوانة فإن :

ص = ١٢ سم   بالتعويض فى (١) ينتج : س = ١٥ سم

، باشتقاق طرفى (١) بالنسبة لـ ن ينتج : $٢\, س \frac{ءس}{ءن} = ٢\, ص \frac{ءص}{ءن}$

∴ $٢ \times ١٥ \times ٢ = ٢ \times ١٢ \frac{ءص}{ءن}$   و منها : $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٥}{٢}$ سم / ث

[٥] (أ) إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند نقطة عليه ( س ، ص ) هو ٦ ( ١ − ٢ س ) و كان للمنحنى نقطة حرجة عند س = ١ و للدالة قيمة صغرى محلية تساوى ٤

أولاً : أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند س = −١

ثانياً : ارسم شكلاً عاماً للمنحنى موضحاً القيم العظمى و الصغرى المحلية و نقط الإنقلاب إن وجدت

الحل

∵ $د''(س) = ٦(١ - ٢س) = ٦ - ١٢س$

∴ $د'(س) = \int (٦ - ١٢س)\, ءس = ٦س - ٦س^{٢} + ث$

، ∵ للمنحنى نقطة حرجة عند : س = − ١

∴ $د'(-١) = ٠$ ∴ $٠ = ٦ - ٦ + ث$ و منها : ث = ٠

∴ $د'(س) = ٦س - ٦س^{٢} = ٦س(١ - س)$

، $د'(س) = ٠$ عندما : س = ٠ ، س = ١

، ∵ $د''(٠) > ٠$ ∴ عند : س = ٠ توجد قيمة صغرى محلية = ٤ " معطى "

∴ المنحى يمر بالنقطة ( ٠ ، ٤ )

∴ $د(س) = \int (٦س - ٦س^{٢})\, ءس = ٣س^{٢} - ٢س^{٣} + ث'$

، ∵ المنحنى يمر بالنقطة ( ٠ ، ٤ ) ∴ د ( ٠ ) = ٤

∴ $٤ = ٠ - ٠ + ث'$ و منها : $ث' = ٤$

∴ $د(س) = ٣س^{٢} - ٢س^{٣} + ٤$

، $د'(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٣(س^{٢} - ١) = ٣(س - ١)(س + ١)$

، $د'(س) = ٠$ عندما : س = ٠ ، س = ١

∴ الدالة متناقصة فى ] ١ ، ∞ [ ، وفى ] − ∞ ، − ١ [

و متزايدة فى ] ٠ ، ١ [

، $د''(س) = ٦ - ١٢س$ ، ∵ $د''(٠) > ٠$ ∴ د(١) = ٤ قيمة صغرى محلية

، ∵ $د''(١) < ٠$ ∴ د(١) = ٥ قيمة عظمى محلية

، ∵ $د''(س) = ٠$ عندما : س = $\frac{١}{٢}$

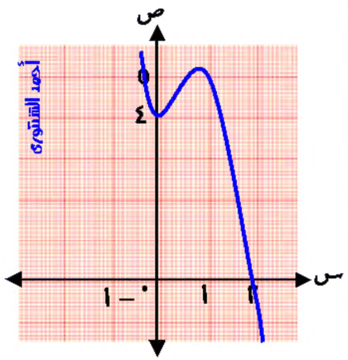
، ∵ $د''(س) > ٠$ فى ] − ∞ ، $\frac{١}{٢}$ [ ∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

، ∵ $د''(س) < ٠$ فى ] $\frac{١}{٢}$ ، ∞ [ ∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، النقطة ( $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$ ) نقطة إنقلاب

و يكون جدول التزايد و التناقص و التحدب و الشكل العام لمنحنى الدالة د كما يلى :

| س | − ∞ | | ٠ | | $\frac{١}{٢}$ | | ١ | | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة د′ | | − | ٠ | + | | + | ٠ | − | |
| سلوك د | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | |
| إشارة د″ | | + | | + | ٠ | − | | − | |
| تحدب د | | لأسفل | | لأسفل | | لأعلى | | لأعلى | |
| ص | | | ٤ | | $\frac{٩}{٢}$ | | ٥ | | |
| | | | قيمة صغرى محلية | | نقطة إنقلاب | | قيمة عظمى محلية | | |




(ب) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنيات $ص = س^{٣} + ١$ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ١ دورة كاملة حول محور السينات

الحل

حدود التكامل هى : س = ٠ ، س = ١

و المنطقة تقع فوق محور السينات لأن : ص = ٠

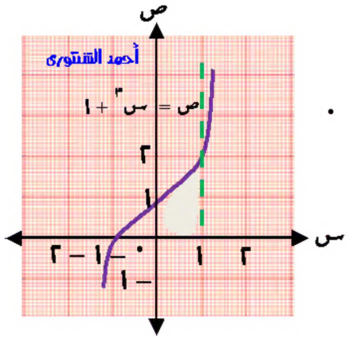
و الدوران حول محور السينات

∴ $ح = \pi \int_{٠}^{١} ص^{٢}\, ءس$

$= \pi \int_{٠}^{١} (س^{٦} + ٢س^{٣} + ١)\, ءس$

$= \pi \left[ \frac{١}{٧}س^{٧} + \frac{١}{٢}س^{٤} + س \right]_{٠}^{١}$

$= \pi \left[ (\frac{١}{٧} + \frac{١}{٢} + ١) - (٠) \right] = \frac{٢٣}{١٤}\pi$ وحدة مكعبة




تم بحمد الله